

ДВУСЛОЙНАЯ КВАЗИОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ ГАЗА С ИНОРОДНЫМИ ЧАСТИЦАМИ В СОПЛАХ

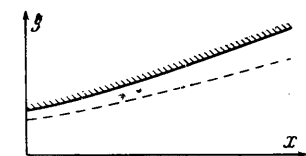
Э. М. АГРЕСТ, А. Н. КРАЙКО

(Москва)

В настоящее время для расчета течений смеси газа с инородными (твердыми или жидкими) частицами в соплах в рамках модели двускоростной (или многоскоростной) сплошной среды широко используется одномерное приближение. Наряду с этим имеются работы [1-6], в которых расчеты двухфазного течения в сверхзвуковой части сопла проводились методом характеристик и результаты которых в пределах принятой модели среды могут рассматриваться как точные. Сравнение точных и приближенных результатов [6] показало, что даже для сопел довольно простой формы (близких к коническим) точность одномерного приближения в случае течения смеси оказывается значительно более низкой, чем для чистого газа, причем погрешность растет с ростом относительного расхода частиц. Такое ухудшение точности в значительной степени вызвано расслоением потока, которое возникает из-за отставания частиц и приводит к образованию пристеночной области чистого газа. При большом содержании частиц пристеночный слой, в котором газ не подвергается тепловому и динамическому воздействию со стороны частиц, носит характер низкоэнтропийного низкотемпературного и высокоскоростного слоя с параметрами, существенно отличающимися от параметров газа в области, занятой частицами.

В соответствии с этим в данной работе проведена модификация одномерной теории, основанная на раздельном осреднении течения по пристеночному слою и ядру, где газ течет вместе с инородными частицами. Сравнение точных результатов с результатами, полученными при помощи обычной одномерной теории и предложенной двуслойной модели, показало, что проведенная модификация одномерной теории привела к существенному уменьшению ошибок в вычислении параметров течения.

1. Рассмотрим течение смеси газа и твердых или жидких частиц одного размера в расширяющейся части плоских или осесимметричных сопел. Пусть x и y — прямоугольные координаты, ось x направлена по оси сопла, как показано на фиг. 1, а u и v — соответствующие проекции вектора скорости газа V . Обозначим через p , T , ρ и h давление, температуру, плотность и удельную энтальпию газа. Соответствующим величинам для «газа» частиц припишем нижний индекс s . Будем использовать двускоростную и двухтемпературную модель, заменяющую реальное явление взаимопроникающим течением двух взаимодействующих сплошных сред: собственно газа и «газа» частиц. При этом наряду с обычными предположениями этой модели, описанными, например, в [7], будем пренебрегать объемом, который занимают частицы. В этом случае ρ совпадает с истинной плотностью газа, причем



Фиг. 1

ρ , как и h — функция p и T . Конечные соотношения, определяющие ρ , h , удельную внутреннюю энергию частиц e_s , силу f , с которой газ действует на частицы, и тепловой поток q от газа к частицам примем в виде

$$\rho = \rho(p, T), \quad h = h(p, T), \quad e_s = e_s(T_s) \quad (1.1)$$

$$f = \varphi^f |V - V_s|^\nu (V - V_s), \quad q = \varphi^q |T - T_s|^\omega (T - T_s)$$

где φ^f и φ^q — известные функции $|V - V_s|$, p , T , T_s и ρ_s , а ν и ω — константы, превосходящие минус единицу. Под f и q понимаются величины,

получающиеся отнесением силы и теплового потока, которые приходится на одну частицу, к ее массе.

Стационарные плоские и осесимметричные течения двускоростной сплошной среды описываются соотношениями (1.1) и дифференциальными уравнениями [7]

$$\begin{aligned} \rho (\nabla \nabla) \mathbf{V} + \nabla p + \rho_s \mathbf{f} &= 0, & \nabla (y^v \rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \mathbf{V} (\rho \nabla h - \nabla p) + \rho_s [(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \mathbf{f} + \mathbf{q}] &= 0, & (\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s &= \mathbf{f} \\ \nabla (y^v \rho_s \mathbf{V}_s) &= & c_s \mathbf{V}_s \nabla T_s &= q \end{aligned} \quad (1.2)$$

В выписанных уравнениях $v = 0$ и 1 для плоского и осесимметричного случая соответственно, а $c_s = de_s / dT_s$ — удельная теплоемкость частиц.

Все параметры в (1.1) и (1.2) удобно считать безразмерными. Пусть l , ρ_* , w_* и R — характерные размерные величины с размерностями длины, плотности, скорости и газовой постоянной. Тогда приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных координат к l , скоростей — к w_* , плотностей — к ρ_* , давления — к $\rho_* w_*^2$, температур — к w_*^2 / R , энтальпии и внутренней энергии — к w_*^2 и размерных значений \mathbf{f} и \mathbf{q} — к w_*^2 / l и к w_*^3 / l соответственно.

2. Отметим некоторые полезные для дальнейшего следствия, вытекающие из (1.1), (1.2) и условий симметрии на оси сопла и непротекания на стенке

$$v = v_s = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad v_w = u_w y'_w \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем штрихом обозначаются полные производные по x , индекс w присписывается параметрам на стенке, а $y_w = y_w(x)$ — уравнения стенки сопла, изображенной на фиг. 1 сплошной заштрихованной линией.

Из (1.1) и (1.2) с учетом (2.1) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.2)$$

и, следовательно, при $x = \text{const}$ и малых y распределение давления по y представляется квадратичной параболой.

Другое следствие связано с течением в слое чистого газа, который, как уже отмечалось, образуется у стенки из-за отставания частиц. Припишем параметрам на нижней границе слоя (штриховая линия на фиг. 1) индекс d . Учитывая, что граница есть линия тока частиц, из (1.2) получим

$$y'_d = \frac{v_{sd}}{u_{sd}}, \quad u'_{sd} = \frac{f_{xd}}{u_{sd}}, \quad v'_{sd} = \frac{f_{yd}}{u_{sd}}, \quad T'_{sd} = \frac{q_d}{c_{sd} u_{sd}} \quad (2.3)$$

Здесь $y_d = y_d(x)$ — уравнение границы, а f_x и f_y — проекции вектора \mathbf{f} на оси x и y .

В пристеночном слое на каждой линии тока газа выполняется интеграл энергии, а при отсутствии ударных волн сохраняется и удельная энтропия $s = s(p, T)$. Поэтому на стенке, которая есть линия тока газа, лежащая в области, свободной от частиц, уже при $x = 0$, и где, кроме того, имеет место второе равенство из (2.1), выполняются соотношения

$$\begin{aligned} w_w^2 + 2h_w &= w_{w0}^2 + 2h_{w0}, & s_w &= s_{w0}, & h_w &= h(p_w, T_w) \\ s_w &= s(p_w, T_w), & w_w &= u_w \sqrt{1 + y_w'^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

в которых индекс 0 присписан параметрам при $x = 0$. В частности, для совершенного газа с показателем адиабаты κ из (2.4) имеем

$$w_w^2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_w}{\rho_w} = \text{const}, \quad \rho_w = \text{const} \cdot p_w^{1/\kappa} \quad (2.5)$$

где константы определяются условиями при $x = 0$.

3. Как уже отмечалось, погрешности одномерной теории, основанной на осреднении параметров по сечению канала, быстро увеличиваются с ростом относительного расхода частиц, что связано с усилением неравномер-

ности по y . Поэтому примем двуслойную модель, предусматривающую раздельное осреднение для ядра потока и пристеночного слоя. Будем понимать под средним от произвольного параметра φ среднее по площади, т. е.

$$\frac{1+v}{y_d^{1+v}} \int_0^{y_d} y^v \varphi(x, y) dy, \quad \frac{1+v}{y_w^{1+v} - y_d^{1+v}} \int_{y_d}^{y_w} y^v \varphi(x, y) dy$$

для ядра и пристеночного слоя соответственно, и сохраним для средних по ядру прежние обозначения (например, u , p , ρ), а средним по пристеночному слою припишем верхний индекс градус. Средние параметры в отличие от исходных есть, как и параметры на стенке и на линии раздела, функции только x .

Уравнения для средних параметров получаются интегрированием (1.2) по y с учетом условий (2.1) на оси и на стенке сопла и первого равенства (2.3) — условия непротекания для частиц на границе раздела. При этом, как и в обычном одномерном приближении, принимается, что произвольные функциональные связи между истинными параметрами, в частности (1.1), справедливы и для осредненных величин. В результате после осреднения и некоторых преобразований получим

$$u' = \frac{1+v}{y_d^{1+v} \rho^2 \alpha (M^2 - 1)} \left\{ Q \left[\rho u \beta (u - u_d) - \rho \alpha + v(v - v_d) + \right. \right. \\ \left. \left. + h_d - h + \frac{w_d^2 - w^2}{2} \right] + y_d^v y_d' \rho u [\beta (p - p_d) + \rho \alpha] - \right. \\ \left. - y_d^v v (p - p_d) + \frac{y_d^{1+v}}{1+v} \rho_s [u f_x (\rho \beta - 1) - N] \right\} \quad (3.1)$$

$$p' = \frac{1+v}{y_d^{1+v}} [Q(u_d - u) + y_d^v y_d' (p_d - p)] - \rho_s f_x - \rho u u'$$

$$\rho' = \frac{1+v}{y_d^{1+v}} \left(\frac{Q}{u} - y_d^v y_d' \rho \right) - \frac{v}{u} u'$$

$$u_s' = \frac{f_x}{u_s}, \quad T_s' = \frac{q}{c_s u_s}, \quad \rho_s = \frac{(y_d^{1+v} \rho_s u_s)_0}{y_d^{1+v} u_s}$$

$$u^{\circ'} = \frac{1+v}{(y_w^{1+v} - y_d^{1+v}) \rho^{\circ 2} \alpha^{\circ} (M^{\circ 2} - 1)} \left\{ Q \left[\rho^{\circ} u^{\circ} \beta^{\circ} (u_d - u^{\circ}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho^{\circ} \alpha^{\circ} + v^{\circ} (v_d - v^{\circ}) + h^{\circ} - h_d + \frac{w^{\circ 2} - w_d^2}{2} \right] + \right. \\ \left. + y_w^v (p_w - p^{\circ}) (v^{\circ} - y_w' \rho^{\circ} u^{\circ} \beta^{\circ}) + y_d^v (p_d - p^{\circ}) (y_d' \rho^{\circ} u^{\circ} \beta^{\circ} - v^{\circ}) + \right. \\ \left. + \rho^{\circ 2} u^{\circ} \alpha^{\circ} (y_w^v y_w' - y_d^v y_d') \right\}$$

$$p^{\circ'} = \frac{1+v}{y_w^{1+v} - y_d^{1+v}} [Q(u^{\circ} - u_d) - y_w^v y_w' (p^{\circ} - p_w) -$$

$$- y_d^v y_d' (p_d - p^{\circ})] - \rho^{\circ} u^{\circ} u^{\circ'}, \quad \rho^{\circ} = \frac{m - y_d^{1+v} \rho u}{(y_w^{1+v} - y_d^{1+v}) u^{\circ}}$$

$$N = q + (V_s - V) f, \quad Q = y_d^v \rho_d (u y_d' - v) \rho_d, \quad M = u / a$$

$$w^2 = u^2 + v^2, \quad \alpha = h_T / \rho_T, \quad \beta = (\rho_T h_p - \rho_p h_T) / \rho_T$$

$$a^{-2} = \rho_p + \rho_T (1 / \rho - h_p) / h_T, \quad m = [y_d^{1+v} (\rho u - \rho^{\circ} u^{\circ}) + y_w^{1+v} \rho^{\circ} u^{\circ}]_0$$

Здесь a — скорость звука в газе; M — число Маха; h_p , h_T , ρ_p и ρ_T — частные производные по p и T , определенные в соответствии с формулами (1.1). Величины с индексом градус определены аналогичным образом.

Вместо одного из дифференциальных уравнений (3.1) можно использовать интеграл энергии

$$y_d^{1+\nu} [\rho u (2h + w^2) + \rho_s u_s (2e_s + w_s^2)] + (y_w^{1+\nu} - y_d^{1+\nu}) \rho^\circ u^\circ (2h^\circ + w^{\circ 2}) = \text{const}$$

Система (3.1) отличается от уравнений обычного одномерного приближения не только порядком (количество дифференциальных уравнений возросло с четырех до семи), что вызвано разбиением потока на два слоя, и присутствием в правых частях параметров на границе слоев (их появление связано с перетеканием газа через границу), но и наличием величин v , v° и разностей $p - p_d$, $p^\circ - p_w$ и $p_d - p^\circ$, которые в соответствии с обычной одномерной теорией следовало бы опустить.

В рассматриваемом случае пренебрежение этими членами не ведет к существенным упрощениям. Поэтому для выяснения их влияния на конечные результаты проводились специальные расчеты и сравнение с результатами, полученными методом характеристик. Заметим, что такое сравнение и соображения относительной простоты служили критерием при выборе всех дополнительных предположений, необходимых для замыкания системы. В итоге было установлено, что учет указанных членов ведет к заметному повышению точности одномерного приближения.

Для замыкания системы, состоящей из уравнений (2.3) и (3.1), наряду с равенствами (1.1), которые считаются справедливыми как для локальных (на стенке и на линии раздела), так и для осредненных параметров, и связями (2.4) и (2.5) для параметров на стенке, использовались следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} u_d &= u, \quad T_d = T, \quad u_w = 2u^\circ - u, \quad v = v_d / 2, \quad v_d = y_d y_w' u^* / y_w \\ v_s &= v_{sd} / 2, \quad v^\circ = (v_d + u_w y_w') / 2, \quad p_d = p_w + k(y_d^2 - y_w^2) \quad (3.2) \\ u^* &= u^\circ + (u - u^\circ) \left(\frac{y_d}{y_w} \right)^{1+\nu}, \quad k = \frac{3 + \nu}{2y_w^2} \left[p_w - p^\circ + (p^\circ - p) \left(\frac{y_d}{y_w} \right)^{1+\nu} \right] \end{aligned}$$

Здесь все величины определяются последовательно одна за другой, а p_w находится по u_w при помощи (2.4) и (2.5). Значения ρ_d и h_d определяются по T_d и p_d из (1.1).

Смысл формул для u_d , T_d , v , v_s и v° из (3.2), как и предположений, положенных в их основу, очевиден: температура и горизонтальная составляющая скорости газа на линии раздела равны средним по ядру потока, а средние вертикальные компоненты в каждой области равны полусумме значений на границах. Оба эти предположения весьма просты, причем первое неплохо подтверждается результатами точных расчетов [6]. Прочие формулы из (3.2) требуют некоторых пояснений.

Выражение для u_w получается, если предположить, что в пристеночном слое горизонтальная составляющая скорости — линейная функция $y^{1+\nu}$.

Формула для v_d есть следствие предположения о линейном распределении по y вертикальной компоненты скорости с заменой во втором условии (2.1) величины u_w на u^* — горизонтальную составляющую скорости, осредненную по всему сечению.

Как показали расчеты, использование в этом случае u^* , а не u_w приводит к лучшим результатам, что, по-видимому, связано с большой неравномерностью параметров (в том числе компонент скорости) по пристеночному слою.

Наконец, формула для p_d получается, если распределение давления в каждом сечении аппроксимировать квадратным многочленом, линейный член которого в соответствии с (2.2) равен нулю. Два оставшихся коэффициента многочлена выбраны из условия совпадения с p_w при $y = y_w$ и из требования равенств средних по полному сечению, одно из которых вычислено по принятому закону, а другое найдено по формуле, аналогичной формуле для u^* .

Приведенные уравнения при заданной форме сопла $y_w = y_w(x)$ и при реализации двуслойной схемы течения, т. е. если частицы не попадают на стенку, образуют замкнутую систему. Заметим, что в согласии с этой

системой, как и в обычной одномерной теории, интеграл сил давления χ , действующий на стенку сопла между сечениями 1 и 2 и с точностью до постоянного множителя равный

$$\chi = \int_{x_1}^{x_2} y_w^v y_w' p_w dx$$

можно выразить через разность значений полного импульса I в этих сечениях

$$\chi = I_2 - I_1$$

$$((1 + \nu)I = y_d^{1+\nu}(p + \rho u^2 + \rho_s u_s^2) + (y_w^{1+\nu} - y_d^{1+\nu})(p^\circ + \rho^\circ u^{\circ 2}))$$

Здесь индексы 1 и 2 приписаны параметрам в соответствующих сечениях.

4. Для оценки эффективности описанной модели были выполнены расчеты течения смеси совершенного газа с газовой постоянной R и частиц в сверхзвуковой части осесимметричных сопел и проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными методом характеристик и по обычной одномерной теории.

Внутренняя энергия частиц e_s считалась пропорциональной их температуре, а законы сопротивления и теплообмена — соответствующими стоксовскому режиму обтекания изолированной частицы. Предполагалось, что в начальном сечении (при $x = 0$) поток параллелен оси x , однороден, его скорость превосходит скорость звука, а отставание по скорости и температуре отсутствует. Если положить $l = y_{w0}$, $\rho^* = \rho_0$ и $w_* = (RT_0)^{1/2}$, где под y_{w0} , ρ_0 и T_0 понимаются размерные величины, то сделанные предположения о свойствах среды и начальных условиях запишутся в виде

$$\rho = \frac{p}{T}, \quad h = \frac{\kappa T}{\kappa - 1}, \quad e_s = c_s T_s, \quad \gamma = \omega = 0$$

$$\varphi^f = \text{const}, \quad \varphi^a = \text{const}, \quad \rho_{s0} = \text{const}, \quad c_s = \text{const}$$

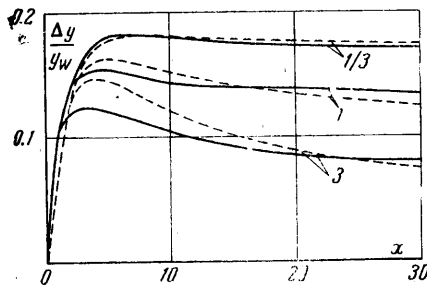
$$y_{w0} = y_{d0} = \rho_0 = T_0 = p_0 = T_{s0} = \rho_0^\circ = T_0^\circ = p_0^\circ = 1, \quad v_{sd0} = 0 \quad (4.1)$$

$$u_0 = u_0^\circ = u_{s0} = u_{sd0} = M_0 \sqrt{\kappa}, \quad M_0 = \text{const} > 1$$

Уравнение расширяющейся части сопла, как и в [6], было взято в виде

$$y_w = \sqrt{1 + (x/2)^2}$$

Это дает сопло, контур которого имеет нулевой наклон в начальном сечении и асимптотически (при $x \rightarrow \infty$) приближается к прямолинейной образующей конического сопла с углом полураствора $\theta = \arctg 0.5 \approx 26.5^\circ$.



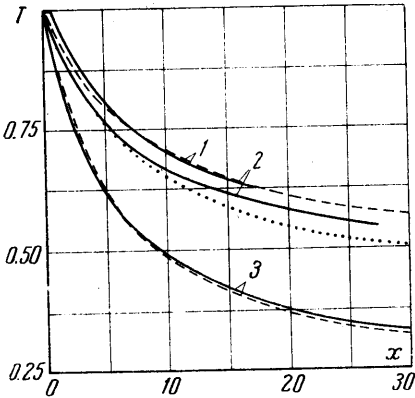
Фиг. 2

При $x = 0$ числители и знаменатели правых частей уравнений для $u^{\circ'}$ и $p^{\circ'}$ из (3.1) при условиях (4.1) обращаются в нуль. В то же время, если заменить равенство $y_{d0} = 1$ на $y_{d0} = 1 - \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$, то при численном интегрировании можно избежать громоздкой процедуры раскрытия неопределенностей. Для целей данного исследования оказалось приемлемым использование этого приема с $\epsilon = 0.001$.

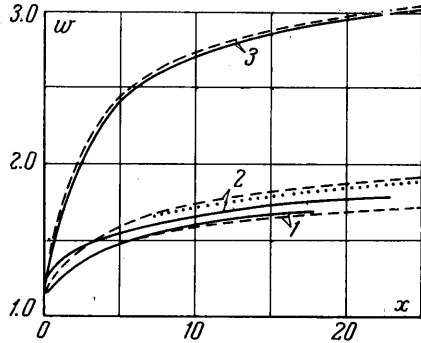
Вычисления проводились для трех значений $\rho_{s0} = 1/3, 1$ и 3 , а остальные константы $\kappa = c_s = 1.2$, $\varphi^f = 2$, $\varphi^a = 8$ и $M_0 = 1.05$. Численное интегрирование осуществлялось на ЭЦВМ «М-20» с использованием стандартной программы Рунге — Кутты. Типичные результаты показаны на фиг. 2—6, на которых сплошными и пунктирными линиями даны результаты, полученные ранее [6] методом характеристик и по обычной одномерной теории. Штриховые — результаты, полученные на основе двухслойной модели.

На фиг. 2 для всех рассмотренных ρ_{s0} , которые обозначены цифрами над кривыми, показано изменение по x относительной толщины пристеночного слоя: $\Delta y / y_w$, где $\Delta y = y_w - y_d$. Заметим, что те же кривые (соответствующие фиксированному

ρ_{s0}), будучи перестроенными в плоскость xy , при приемлемых размерах графика практически не различаются. Распределения температуры и скорости газа, а также температурное запаздывание частиц для $\rho_{s0} = 3$ даны на фиг. 3–5, где цифры 1, 2 и 3 приписаны кривым, соответствующим оси симметрии, линии раздела и стенке. Точные результаты (сплошные линии) и результаты двуслойной теории (штриховые кривые) на фиг. 3 и 4 весьма близки, особенно для оси и стенки сопла. На линии раздела различие несколько больше, причем для всех рассмотренных случаев кривые $w_d(x)$, полученные по развитой теории, почти не отличаются от результата обычной одномерной теории (пунктир). Хотя для отношения температур частиц и газа пунктирные и сплошные кривые (фиг. 5) различаются не очень сильно, однако и здесь проведенная модификация уменьшает различие точных и приближенных результатов (следует учесть, что штриховая линия



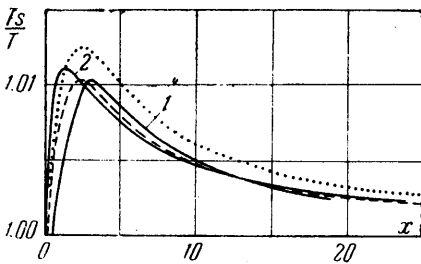
Фиг. 3



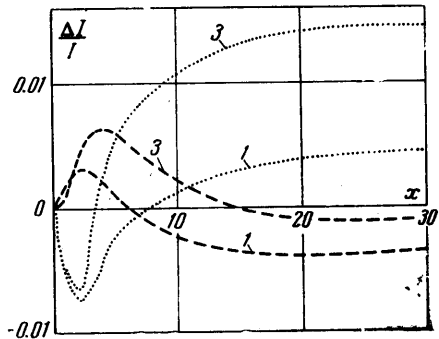
Фиг. 4

дает отношение средних по ядру температур). Результаты для w_s/w , а также при $\rho_{s0} = 1/3$ и 1 аналогичны представленным на фиг. 3–5.

Особенно важной характеристикой является импульс I , через который выражается тяга сопла. Пусть ΔI — разность приближенного и точного значений импульса, а $\Delta I/I$ — относительная ошибка в его определении, т. е. отношение ΔI к величине I , найденной методом характеристик. Для обычной одномерной теории эта ошибка весьма велика. Так для принятых выше условий для $x = 30$ и $\rho_{s0} = 1$ и 3 значения $\Delta I/I$, как показано в [6], равны 0.05 и 0.07 соответственно. Снижение этих ошибок может быть достигнуто умножением импульса, найденного по обычной одномерной теории, на $\cos^2(\theta/2)$, где θ — угол наклона стенки к оси x в данном сечении. Результаты такой корректировки для $\rho_{s0} = 1$ и 3 и $x \leq 30$ видны на фиг. 6, на которой пунктиром даны скорректированные результаты одномерной теории, а штриховыми линиями — результаты двуслойной теории без какой-либо дополнительной корректировки (цифры над кривыми — значения ρ_{s0}).



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотренные примеры подтверждают эффективность построенной расчетной модели. Естественно, что для других условий (для больших относительных расходов частиц и контуров более сложной формы) ошибки двуслойной модели могут возрасти. Как показали дополнительные расчеты, это прежде всего относится к опре-

делению ординаты границы раздела u_a и импульса сопла, который требуется вычислять с меньшей погрешностью, чем другие величины. В частности, оказалось, что для $\rho_{s0} \approx 7$ двухслойная модель занижает значения u_a . Однако даже в тех случаях, когда ошибки в определении импульса по обычной одномерной теории с поправкой на $\cos^2(\theta/2)$ достигают 4–6%, соответствующие погрешности для двухслойной модели были в 2–3 раза меньше.

В заключение авторы благодарят С. Ю. Крашенинникова — инициатора проведения данного исследования, а также Н. С. Галюн, А. М. Конкину и Л. П. Фролову за помощь в работе.

Поступило 13 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas — particle mixtures in axially symmetric nozzles. ARS, Report No. 1713, 1961.
2. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas — particle mixtures in axially symmetric nozzles. In: «Detonation and two — phase flow», edit. by S. S. Penner and F. A. Williams, N. Y., Acad. Press, 1962, pp. 173—194. (Рус. перев.: В сб.: «Детонация и двухфазное течение», М., «Мир», 1966, стр. 183—201.)
3. Kliegel J. R. Gas particle nozzle flow. In: «9-th sympos. (Internat.) Combust.» Ithaca, New York — London, Acad. Press, 1963 (Рус. перев.: В сб.: «Вопросы ракетной техники», М., «Мир», 1965, № 10 (130).)
4. Hoffman J. D., Lorenc S. A. A parametric study of gas — particle flows in conical nozzles. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1.
5. Lorenc S. A., Hoffman J. D. Correlation of performance of conical and contoured nozzles for gas — particle flow. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1.
6. Верещака Л. П., Галюн Н. С., Крайко А. Н., Стернин Л. Е. Результаты расчета методом характеристик течения газа с частицами в осесимметричных соплах и сравнение с результатами одномерного приближения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
7. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПИММ, 1965, т. 29, вып. 3.