№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1969

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Т. Д. ВАРМА, А. К. ТАЛВАР

(*Дели*)

Исследуется движение газа за фронтом цилиндрической ударной волны, создаваемой движением поршня в гравитирующей среде. Задача является автомодельной, но решение не удается получить в конечном виде. Произведен численный расчет для различных чисел Маха. Расчет показывает, что центральная часть конфигурации вытесняется на определенное расстояние от оси симметрии.

Цилиндрические ударные волны в сжимаемой однородной среде в поле тяжести были рассмотрены Седовым [1] и Лином [2]. Эти работы, однако, содержат существенное допущение, что полная энергия (т. е. сумма кинетической и тепловой энергий) внутри области, ограниченной расширяющейся ударной волной, не зависит от времени.

Ниже развиваем предыдущую работу для случая ударных волн в неоднородных средах, которые распространяются во флуктуирующем гравитационном поле, создаваемом самой возмущенной массой. Ударная волна создается движением поршня, скорость которого изменяется как некоторая степень времени, т. е. $v\alpha t^{\beta}$. Полная энергия конфигурации также зависит от времени.

1. Уравнения задачи. Рассматривается цилиндрически-симметрическая задача. Движение происходит только в радиальном направлении, все параметры движения зависят только от радиуса r и времени t. Движение описывается обычными уравнениями гидродинамики с учетом гравитации. Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=0 \tag{1.1}$$

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{mf}{r}=0 \tag{1.2}$$

Здесь f — гравитационная постоянная, а p, ρ, u, m обозначают соответственно давление, плотность, скорость частиц и массу на единицу длины цилиндра радиуса r в момент времени t.

Функция $m(r, t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial m}{\partial r}=2\pi\rho r \tag{1.3}$$

Уравнение энергии для политропного газа имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0 \tag{1.4}$$

2. Условия разновесия. Система уравнений, определяющая физические величины в положении равновесия, имеет вид

$$\frac{\partial p_0}{\partial r}+\frac{m_0 f\rho_0}{r}=0, \qquad \frac{\partial m_0}{\partial r}=2\pi\rho_0 r \tag{2.1}$$

Примем, что зависимость начальной плотности среды ρ_0 от радиуса r имеет вид $\rho_0 = Ar^{-\omega}$. После подстановки этого выражения для ρ_0 в (2.1) получаем следующие выражения для m_0 и p_0 (формулы справедливы для $\omega \neq 2$):

$$m_0 = \frac{2\pi A}{2-\omega} r^{2-\omega}, \qquad p_0 = \frac{\pi A^2 f}{(\omega-1)(2-\omega)} r^{2-2\omega} \tag{2.2}$$

Из условия конечности массы вблизи оси симметрии следует, что $\omega < 2$; чтобы давление газа было положительным, необходимо $\omega < 1$. Очевидно, что ось симметрии ($r = 0$) будет сингулярной точкой, где давление и плотность становятся бесконечными. Это является выражением того обстоятельства, что в реальных условиях значения давления и плотности имеют максимум при $r = 0$ и могут быть очень большими. Из физических соображений следует, однако, что значения физических величин существенно конечны в точках на оси симметрии. Эта сингулярность имеет, однако, больше математический, чем физический характер. Можно представить, что упомянутый закон изменения плотности реализуется только для расстояний r, бо́льших некоторого очень малого расстояния r_0 от центра, тогда как при $r < r_0$ плотность остается конечной. Таким способом можно обойти трудность с физической интерпретацией, не изменяя при этом ни массы внутри любого существенного значения радиуса, ни значений силы тяжести и давления.

Для $\omega = 2$ имеем

$$m_0 = 2\pi A \ln\frac{r}{r_0}, \qquad p_0 = \pi A^2 f \left[\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{r_0}\right] r^{-2} \tag{2.3}$$

Семейство решений (2.2) зависит, кроме гравитационной постоянной f, от размерной постоянной A и характеристического параметра ω. Значение ω определяется рассмотрением энергии.

3. Энергетическое рассмотрение. Неустановившееся движение газа, которое начинается в момент $t = 0$, создается движением ускоряющего поршня. Энергия, передаваемая газу, определяется тремя размерными величинами t, A и f, т. е.

$$E = \alpha_1 f^{(4/\omega)-1} A^{4/\omega} t^{4(2-\omega)/\omega} \tag{3.1}$$

Здесь

$$[A] = ML^{\omega-3}, \quad [f] = M^{-1}L^3t^{-2}, \quad [E] = MLt^{-2}$$

Здесь E энергия на единицу длины; α_1 — есть произвольная постоянная, не зависящая от времени. Для $\omega = 2$ формула (3.1) дает

$$E = \alpha_1 f A^2 \tag{3.2}$$

что соответствует движению поршня с постоянной скоростью. Был рассмотрен специальный случай, когда скорость поршня изменялась по закону $vat^{2/3}$, В этом случае имеем $\omega = {}^3/_2$ и

$$E = \alpha_1 f^{5/3} A^{8/3} t^{4/3} \tag{3.3}$$

4. Преобразования подобия. После возмущенного движения определяется системой размерных величин A, f, r и t. Движение газа является автомодельным, и параметры движения выражаются в виде

$$u = \frac{r}{t} U, \quad \rho = \frac{R}{ft^2}, \quad p = \frac{r^2}{ft^4} P, \quad m = \frac{r^2}{ft^2} M \tag{4.1}$$

Здесь U, R, P и M — безразмерные величины, которые являются функциями только от η. Величина η выражается в виде

$$\eta=\frac{r}{(\alpha_2 A f)^{1/\omega}t^{2/\omega}} \tag{4.2}$$

При помощи (4.1), (4.2) система (2.1)—(2.4) приводится к виду

$$\eta\left[(U-\delta)\frac{R'}{R}+U'\right]=2(1-U),$$

$$\eta\left[(U-\delta)U'+\frac{p'}{R}\right]=U(1-U)-M-\frac{2P}{R} \tag{4.3}$$

$$\eta M'=2(\pi R-M),\qquad \eta\left[\frac{p'}{p}-\gamma\frac{R'}{R}\right]=4-2U-2\gamma\qquad\left(\delta=\frac{2}{\omega}\right)$$

Уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной η.

5. Граничные условия. Приведенные выше уравнения нужно решать с граничными условиями на фронте ударной волны. На фронте ударной волны, распространяющейся по покоящемуся газу, должны иметь место следующие соотношения для физических величин:

$$u_s=\frac{2}{\gamma+1}c\left(1-\frac{a_0^2}{c^2}\right),\qquad \rho_s=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{a_0^2}{c^2}\right)^{-1}$$

$$p_s=\frac{\rho_0c^2}{\gamma(\gamma+1)}\left[2\gamma-(\gamma-1)\frac{a_0^2}{c^2}\right],\qquad m_s=m_0 \tag{5.1}$$

Здесь индекс s обозначает значения физических величин на фронте ударной волны, c — скорость фронта ударной волны, $a_0=(\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ — скорость звука в невозмущенной среде.

Радиус ударной волны r_1 дается выражением

$$r_1=\eta_1(\alpha_2Af)^{1/\omega}t^{2/\omega},\qquad \eta=\eta_1=\mathrm{const} \tag{5.2}$$

Постоянное значение $\eta=\eta_1$ на ударной волне можно принять равным единице; таким образом имеем

$$\eta_1=1,\ \eta=r/r_1 \tag{5.3}$$

Скорость ударной волны c равна

$$c=\frac{dr_1}{dt}=\frac{2}{\omega}\frac{r_1}{t} \tag{5.4}$$

Граничные условия (6.1) после преобразования к безразмерной форме приобретают вид

$$U=\frac{4}{(\gamma+1)\omega}(1-q),\quad R=\frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}\frac{1}{\alpha_2}\quad\left(q=\frac{a_0^2}{c^2}=\frac{\gamma p_0}{\rho_0c^2}\right) \tag{5.5}$$

$$P=\left(\frac{2}{\omega}\right)^2\frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{\gamma(\gamma+1)}\frac{1}{\alpha_2},\qquad M=\frac{2\pi}{2-\omega}\frac{1}{\alpha_2}, \tag{5.6}$$

Из (3.3) и (5.4) следует, что

$$a = \frac{\pi\gamma\omega^2}{4(\omega-1)(2-\omega)}\frac{1}{\alpha_2} \tag{5.7}$$

Значение q при фиксированном ω определяется постоянной α_2 и наоборот. Условия (5.5) для данного q являются данными Коши для системы уравнений (4.3) и , следовательно, полностью определяют движение газа внутри ударной волны. Величина α_2 определяется из (5.7) после того, как зафиксировано выражение для переменной η. Очевидно также, что постоянная α_1 определяется выбором q, и следовательно, закон выделения энергии становится полностью определенным.

Таблица 1

Изменение скорости частиц и плотности в области за ударной волной

η	u/u_s			ρ/ρ_s		
	$q=0.005$	$q=0.01$	$q=0.1$	$q=0.005$	$q=0.01$	$q=0.1$
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.99	1.0038	1.0039	1.0042	1.0720	1.0699	1.0482
0.98	1.0077	1.0078	1.0083	1.1565	1.1515	1.1012
0.97	1.0116	1.0117	1.0124	1.2567	1.2480	1.1601
0.96	1.0153	1.0155	1.0165	1.3792	1.3647	1.2259
0.95	1.0193	1.0197	1.0206	1.5326	1.5094	1.3000
0.94	1.0232	1.0234	1.0246	1.7322	1.6952	1.3842
0.93	1.0270	1.0271	1.0287	2.0059	1.9448	1.4811
0.92	1.0306	1.0308	1.0327	2.4140	2.3040	1.5940
0.91	1.0343	1.0345	1.0368	3.1003	2.8810	1.7290
0.90	1.0380	1.0383	1.0409	4.6436	4.0245	1.8869
0.89	1.0414	1.0416	1.0449	17.8028	8.2334	2.0904
0.88	—	1.0452	1.0489	—	25.2139	2.3481
0.87	—	—	1.0525	—	—	2.6947
0.86	—	—	1.0569	—	—	3.1940
0.85	—	—	1.0608	—	—	3.9982
0.84	—	—	1.0647	—	—	5.6022
0.83	—	—	1.0684	—	—	11.7017
0.825	—	—	1.0698	—	—	44.2198

Решение уравнений. Система уравнений (4.3) состоит из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для P, R, U и M. Существуют два алгебраических интеграла у этой системы, которые имеют вид

$$M = \pi R(4-3U) \quad \text{(интеграл массы)} \tag{5.8}$$

$$p = \alpha_3(4-3U)^{3\gamma-2}R^{4\gamma-2}\eta^{6(\gamma-1)} \quad \text{(интеграл энтропии)} \tag{5.9}$$

При $\gamma = {}^4/_3$ имеем

$$P = \alpha_3(4-3U)^2R^{10/3}\eta^2 \tag{5.10}$$

При помощи этих соотношений можно понизить порядок системы (4.3) до второго порядка. В результате получаем следующие два дифференциальных уравнения для R и U

$$(4-3U)R' - 3RU' = 6(U-1)R/\eta \tag{5.11}$$

$$\eta U'(1+18\alpha_3\eta^2R^{7/3}) - 10\alpha_3\eta^3R^{4/3}(4-3U)R' = $$
$$= 3U(U-1)(4-3U)^{-1} + 3\pi R + 12\alpha_3\eta^2R^{7/3}(4-3U) \tag{5.12}$$

Аналитического решения уравнений (5.11), (5.12) получить невозможно. Для исследования движения необходимо численное интегрирование. Значения U, R, P, M на границе (т. е. при $\eta = 1$) были взяты из (5.5) для трех различных значений q, т. е. $q = 0.005$, 0.01 и 0.1. Значение α_3 было определено из (5.10). Расчеты были произведены на вычислительной машине IBM, и результаты приведены в табл. 1 и 2. При этом в табл. 2 расчет нужно было остановить при вышеприведенном значении η, когда нельзя было достигнуть сходимости итераций даже при шаге $\Delta\eta = 10^{-5}$.

Решение для $\gamma = {}^4/_3$ и $\omega = {}^3/_2$ дает картину возмущенного движения газа, создаваемого ускоряющимся поршнем. Видно, что значения u / u_s, p / p_s и ρ / ρ_s возрастают по мере приближения к оси симметрии. На фиксированном расстоянии η значения u / u_s больше, а ρ / ρ_s меньше для бо́льших значений q.

Таблица 2

Изменение давления и массы в области за ударной волной

η	p/p_s			m/m_s		
	$q = 0.005$	$q = 0.01$	$q = 0.1$	$q = 0.005$	$q = 0.01$	$q = 0.1$
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.99	1.0226	1.0337	1.0299	0.9647	0.9659	0.9772
0.98	1.0456	1.0565	1.0486	0.9274	0.9298	0.9541
0.97	1.0702	1.0807	1.0678	0.8875	0.8912	0.9300
0.96	1.0965	1.1107	1.0881	0.8444	0.8497	0.9048
0.95	1.1252	1.1348	1.1091	0.7973	0.8045	0.8785
0.94	1.1569	1.1656	1.1310	0.7451	0.7547	0.8508
0.93	1.1926	1.2001	1.1541	0.6860	0.6987	0.8215
0.92	1.2341	1.2396	1.1785	0.6170	0.6342	0.7905
0.91	1.2851	1.2871	1.2044	0.5327	0.5568	0.7573
0.90	1.3559	1.3493	1.2320	0.4180	0.4562	0.7215
0.89	1.7718	1.4670	1.2618	0.1950	0.2952	0.6827
0.88	—	1.7260	1.2943	—	0.0186	0.6399
0.87	—	—	1.3303	—	—	0.5918
0.86	—	—	1.3713	—	—	0.5365
0.85	—	—	1.4199	—	—	0.4700
0.84	—	—	1.4826	—	—	0.3835
0.83	—	—	1.6029	—	—	0.2441
0.825	—	—	1.7168	—	—	0.1041

Отношение масс m / m_s по мере приближения к оси симметрии уменьшается, причем тем быстрее, чем меньше q, т. е. чем больше числа Маха. Возмущенное движение газа не продолжается до оси симметрии. Отношение масс стремится к нулю при некотором конечном значении $\eta = \eta^*$, соответствующем $r^* = \eta^* r_1$, где r^* — радиус цилиндрической полости, формирующейся около оси симметрии. Точки, где $m / m_s = 0$, можно рассматривать как внутренние границы, возникающие на оси симметрии в начальный момент.

Из результатов также видно, что значение η^* больше для меньших значений q, т. е. радиус цилиндрической полости формирующейся около оси симметрии увеличивается с увеличением числа Маха. Это является вполне естественным, поскольку для интенсивных ударных волн скорость, с которой вытесняется масса, должна быть большой, так что степень вытеснения также будет большой.

Авторы благодарят M. P. Murgai за содействие и помощь и C. D. Ghildyal за ценные советы, Л. И. Седова, Г. И. Петрова за существенные замечания.

Поступило 1 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Sedov L. I. Similarity and dimensional methods in mechanics. N. Y., Acad. Press, 1959.
2. Lin S. C. Cylindrical shock waves produced by instantaneous energy release. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 1, pp. 54—57.