

## ТЕЧЕНИЕ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБМЕНА ЭНЕРГИЕЙ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ И ИОНАМИ

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

С учетом конечного времени обмена энергией между электронами и ионами рассмотрено течение струи полностью ионизованного газа, имеющего скорость  $\sim 5 \cdot 10^8$  см/сек.

Полученное решение хорошо согласуется с данными экспериментов о поведении электронной и ионной температуры в зоне за ударной волной, образующейся в вытекающей из канала струе ионизованного газа.

1. Рассмотрим течение полностью однократно ионизованного газа. Предположим, что двукратной ионизацией для данного газа при рассматриваемых параметрах течения можно пренебречь. Течение газа можно считать равновесным, если длина, на которой устанавливается равновесие, много меньше характерного размера задачи. Длина, на которой устанавливается равновесие, по порядку величины равна произведению характерной скорости движения газа на время релаксации, которое, как известно, различно для разных процессов, связанных с взаимодействием электронов и ионов.

Если обозначить время релаксации процесса обмена импульсом между электронами и ионами через  $\tau_e$ , время установления равновесной температуры электронов —  $\tau_{ee}$  и ионов —  $\tau_{ii}$ , наконец, время выравнивания температуры ионов и электронов —  $\tau_{ei}^e$ , то можно записать [1] (в дальнейшем предполагается, что внешние магнитные и электрические поля отсутствуют)

$$\tau_e : \tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^e = 1 : 1 : (m_i / m_e)^{1/2} : (m_i : m_e) \quad (1.1)$$

где  $m_i$  — масса иона рассматриваемого газа, а  $m_e$  — электрона.

Для однократно ионизованного газа  $\tau_e$  равно [1]

$$\tau_e = 3.5 \cdot 10^5 T_e^{3/2} / \lambda n, \quad \lambda = 23.4 - 1.15 \lg n + 3.45 \lg T_e \quad (1.2)$$

Здесь  $T_e$  выражено в электронвольтах, а  $\tau$  в секундах.

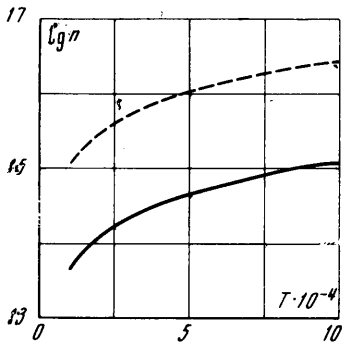
Так как величина отношения  $m_i / m_e$  порядка нескольких тысяч или десятков тысяч, то из (1.1) следует, что возможно течение, когда в газе будут равновесными электронная и ионная температуры, скорости электронов и ионов будут равны, а температуры, вообще говоря, могут отличаться. То, что такой случай вполне реален показывает фиг. 1. При ее построении принято, что характерная скорость в газе равна  $v = 5 \cdot 10^8$  см/сек,  $m_i / m_e = 40\,000$  (это характерные параметры для струи, вытекающей из ускорителя). По оси абсцисс на фиг. 1 отложено значение абсолютной температуры, по оси ординат — логарифм числа частиц в единице объема  $n$ .

Сплошной кривой на фиг. 1 нанесены значения  $n(T)$ , при которых длина установления равновесной ионной температуры  $v\tau_{ii} \sim 2$  мм. Ниже этой кривой  $v\tau_{ii} > 2$  мм, выше  $v\tau_{ii} < 2$  мм. Пунктирная кривая дает значения  $n(T)$ , для которых длина выравнивания электронной и ионной

температур (длина установления единой температуры в газе)  $\nu\tau_{ei}^e \sim \sim 5$  см. Над пунктирной кривой  $\nu\tau_{ei}^e < 5$  см, под ней  $\nu\tau_{ei}^e > 5$  см. Так как в рассматриваемом случае струи, вытекающей из ускорителя, характерный размер задачи  $L$  составляет величину порядка 5–10 см, то из фиг. 1 следует, что в области между сплошной и пунктирной кривыми  $\nu\tau_{ii}/L \leq 0.02 \div 0.04$ , а  $\nu\tau_{ei}^e/L \geq 1 \div 2$ , т. е. в этой области температур и плотностей будут равновесными  $T_e, T_i$  и равными скорости электронов и ионов, но при этом может быть  $T_e \neq T_i$ .

Итак, рассмотрим плоское движение однократно ионизованного газа и предположим, что во всей области движения скорости ионов и электронов равны. Отсюда следует, что, если в начальный момент число электронов и ионов в единице объема было равно, то оно останется равным и во все время движения, т. е.  $n_i = n_e = n$ . Предположим также, что имеются равновесные электронная и ионная температуры и что можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью, а также массой электронов по сравнению с массой ионов. При этих предположениях уравнения неразрывности и движения могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{aligned} \rho u / dx + \rho v / dy &= 0, & \rho &= m_i n, \\ p &= p_e + p_i \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь  $p_e$  и  $p_i$  — давление в электронном и ионном газе,  $u$  и  $v$  — проекции скорости на оси координат  $x$  и  $y$ .

Так как температуры электронного и ионного газов могут быть различны, то уравнения энергии и состояния выпишем отдельно для ионного и электронного газов

$$\frac{3}{2} nk \left( u \frac{\partial T_e}{\partial x} + v \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) + p_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{3m_e n k}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \quad (1.4)$$

$$\frac{3}{2} nk \left( u \frac{\partial T_i}{\partial x} + v \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + p_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{3m_e n k}{m_i \tau_e} (T_e - T_i)$$

$$p_e = knT_e, \quad p_i = knT_i \quad (1.5)$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана, а  $\tau_e$  дается формулой (1.2).

Складывая уравнения (1.4) и (1.5) и учитывая выражения для плотности и давления, найдем

$$1.5\rho R (u\partial T / \partial x + v\partial T / \partial y) + p(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) = 0 \quad (1.6)$$

$$p = RT\rho, \quad T = 0.5(T_e + T_i), \quad R = 2k / m_i \quad (1.7)$$

Таким образом, если принять за температуру среднее между ионной и электронной температурой, то уравнения движения примут вид обычных уравнений газовой динамики для одноатомного газа. Поэтому остаются справедливыми решения [2], полученные ранее без учета возможного расхождения ионной и электронной температуры.

После того, как из системы уравнений (1.3), (1.6) будут найдены  $u$ ,  $v$  и  $T$  можно определить  $T_e$  и  $T_i$  по отдельности. Для их определения получим уравнение для разности  $T_e - T_i$ . Вычитая из первого уравнения (1.4) второе и используя (1.5), получим

$$\frac{3}{2} \left[ u \frac{\partial(T_e - T_i)}{\partial x} + v \frac{\partial(T_e - T_i)}{\partial y} \right] + (T_e - T_i) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{6m_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \quad (1.8)$$

Определив отсюда  $T_e - T_i$  и зная  $T$ , вычислим  $T_e$  и  $T_i$ . Так как  $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = -(1/\rho) d\rho / dt$ , то из (1.8) следует, что при течении разрежения, когда  $d\rho / dt < 0$ ,  $|T_e - T_i|$  всегда уменьшается с течением времени. Если же  $d\rho / dt > 0$ , т. е. имеется течение с сжатием, то возможны случаи, когда разность ионной и электронной температуры будет со временем по модулю возрастать. Если в начальный момент  $T_e - T_i = 0$ , то эта разность равна нулю и в процессе движения.

Разность электронной и ионной температур может появиться вследствие тех или иных диссипативных процессов, которые в рассматриваемых уравнениях не учитываются. Однако в идеальной газовой динамике есть случаи, когда диссипативные процессы, не входя явно в уравнения, тем не менее играют существенную роль. Это движение с ударными волнами.

Структура ударной волны для полностью ионизованного газа с одним сортом ионов подробно рассмотрена в [5, 6]. В рамках сделанных в данной работе предположений нет необходимости детально рассматривать структуру ударной волны. Так как длины установления равновесия всех величин (кроме выравнивания  $T_e$  и  $T_i$ ) намного меньше характерного размера задачи, то ударная волна может рассматриваться как тонкая область скачка всех величин. Необходимо только следить за тем, чтобы при переходе через ударную волну параметры газа оставались бы в той области, в которой выполняются исходные предположения. Это требование будет заведомо удовлетворено, если ударная волна не сильная, т. е. если в потоке имеется косой скачок уплотнения, наклоненный под небольшим углом к скорости потока.

2. Условия сохранения массы, количества движения и энергии при переходе через косой скачок для электронов и ионов могут быть при сделанных предположениях записаны в виде

$$\begin{aligned} n_1 u_{n1} &= n_2 u_{n2}, & u_{\tau 1} &= u_{\tau 2} \\ m_i n_1 u_{n1}^2 + p_{i1} &= m_i n_2 u_{n2}^2 + p_{i2} + F, \\ m_e n_1 u_{n1}^2 + p_{e1} &= m_e n_2 u_{n2}^2 + p_{e2} - F \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$m_i \frac{u_{n1}^2 + u_{\tau 1}^2}{2} + \frac{\kappa k}{\kappa - 1} T_{i1} = m_i \frac{u_{n2}^2 + u_{\tau 2}^2}{2} + \frac{\kappa k}{\kappa - 1} T_{i2}$$

$$m_e \frac{u_{\tau 1}^2 + u_{n1}^2}{2} + \frac{\kappa k}{\kappa - 1} T_{e1} = m_e \frac{u_{n2}^2 + u_{\tau 2}^2}{2} + \frac{\kappa k}{\kappa - 1} T_{e2}$$

Здесь  $F$  — сила взаимодействия электронов и ионов в зоне скачка, приводящая к выравниванию их скоростей,  $u_{\tau}$  и  $u_n$  — проекции скорости на касательную и нормаль к скачку, индексом 1 обозначены параметры перед скачком, а индексом 2 — за скачком,  $\kappa = 5/3$ .

Суммируя уравнения импульсов и энергии для ионов и электронов, пренебрегая  $m_e$  по сравнению с  $m_i$  и используя формулы (1.3), (1.5) и (1.7), получим

$$\begin{aligned} u_{r1} = u_{r2}, \quad \rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2}, \quad \rho_1 u_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 u_{n2}^2 + p_2 \\ u_{n1}^2/2 + \kappa p_1 / (\kappa - 1) \rho_1 = u_{n2}^2/2 + \kappa p_2 / (\kappa - 1) \rho_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это обычные уравнения на скачке, где  $\kappa = 5/3$  для одноатомного газа. Из них может быть найдено суммарное давление электронов и ионов за скачком, а следовательно, лишь средняя температура электронов и ионов за скачком. Чтобы найти  $T_{i2}$  и  $T_{e2}$ , возьмем разность уравнений энергии (2.1) для электронов и ионов, поделив их предварительно на  $m_e$  и  $m_i$  соответственно

$$\frac{T_{i2} - T_{i1}}{m_i} = \frac{T_{e2} - T_{e1}}{m_e} \quad \text{или} \quad \frac{T_{e2} - T_{e1}}{T_{i2} - T_{i1}} = \frac{m_e}{m_i}$$

Так как  $m_e/m_i \ll 1$ , то с принятой степенью точности можно считать  $T_{e2} = T_{e1}$ .

Кроме того, из уравнений (2.2) и уравнения состояния (1.7) по обычным формулам газовой динамики, находим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[(\kappa - 1)M_{n1}^2 + 2][2\kappa M_{n1}^2 - (\kappa - 1)]}{(\kappa + 1)^2 M_{n1}^2}, \quad M_n^2 = \frac{\rho u_n^2}{\kappa p}$$

Отсюда, учитывая полученное равенство электронной температуры перед скачком и за ним, найдем изменение ионной температуры при переходе через скачок

$$\frac{T_{i2}}{T_{i1}} = \frac{(1 + T_{e1}/T_{i1})[(\kappa - 1)M_{n1}^2 + 2][2\kappa M_{n1}^2 - (\kappa - 1)]}{(\kappa + 1)^2 M_{n1}^2} - \frac{T_{e1}}{T_{i1}} \quad (2.3)$$

3. Изучим подробнее течение в струе, выходящей из канала ускорителя, имеющего три электрода: два наружных, находящихся под одним потенциалом, и внутренний — под другим. Течение в плоской струе, выходящей из такого ускорителя, аналогично течению за срезом коаксиального канала.

В работе [2] было показано, что, вследствие того, что электрический ток течет также за срезом канала, происходит небольшой разворот части струи к внутреннему электроду. Поэтому от конца внутреннего электрода отходит ударная волна. Картина течения схематично дана на фиг. 2. Толстыми короткими линиями показаны концы электродов, пунктиром — ударная волна, сплошными — линии тока перед скачком.

Если считать в первом приближении угол разворота потока постоянным, то ударная волна будет прямолинейной, и тогда не трудно, зная угол  $\alpha$  наклона потока к оси, найти угол  $\beta$  между ударной волной и направлением скорости потока при подходе к ударной волне. Течение в этом случае будет такое же, как при обтекании клина с полууглом раствора  $\alpha$ .

Так как число  $M$  потока на выходе из ускорителя обычно очень велико, то для вычисления связи между углами  $\beta$  и  $\alpha$  можно применять формулы, справедливые в гиперзвуковом приближении [3]. В частности,

$$\begin{aligned} M_1 \operatorname{tg} \beta = 0.25(\kappa + 1)K + \sqrt{[0.25(\kappa + 1)K]^2 + 1} \\ K = M_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad M^2 = \rho u^2 / \kappa p \end{aligned} \quad (3.1)$$

Зная число  $M_1$  потока перед скачком и угол  $\alpha$ , находим по этой формуле угол  $\beta$ , а затем и  $M_{n1} = M_1 \sin \beta$ . По известным  $M_{n1}$ ,  $T_{i1}$  и  $T_{e1}$  по формуле (2.3) определяем  $T_{i2}$ .

В качестве примера проведем расчет для струи полностью однократно ионизованного газа, ионы которого имеют атомный вес  $\sim 20$ . Величина  $\kappa$  может быть принята равной  $5/3$ . Скорость на выходе из канала положим равной  $6 \cdot 10^6$  см/сек, температуру ионов и электронов на выходе примем одинаковой и имеющей значение  $4 \cdot 10^4$  °К.

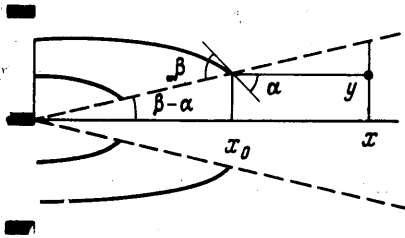
По формулам (3.1), (4.3), (4.5) найдем, что при этом будет  $M_1 = 8.09$ . Предположим еще, что на выходе из канала  $H^2 / \rho u^2 = 2.5$ , где  $H$  — напряженность магнитного поля (в этом случае приращение скорости за срезом ускорителя составляет примерно 10% ее значения на выходе). В работе [2] показано, что угол разворота струи у электрода равен

$$\alpha = \arctg |v/u| = \arctg (0.037H^2 / \rho u^2)$$

и, следовательно, для принятых параметров  $\arctg \alpha \approx 0.0925$ .

С помощью формул (3.1) находим, что  $M_{n1} = 1.62$ , а из (2.3) получаем  $T_{i2} / T_{i1} = 2.24$ , т. е.  $T_{i2} \approx 9 \cdot 10^4$  °К.

Изменение электронной и ионной температуры при переходе через ударную волну экспериментально исследовалось в работе [4], причем параметры потока были близки к тем, которые использованы в приведенном выше примере. Экспериментальные результаты работы [4] хорошо согласуются с данными расчета. Скачок ионной температуры, наблюдавшийся в работе [4], был от  $T_{i1} \approx 4 \cdot 10^4$  до  $T_{i2} \approx 8 \cdot 10^4$  °К, в то время как электронная температура при переходе через ударную волну почти не изменялась. Небольшое увеличение электронной температуры, полученное в работе [4], вполне объяснимо тем, что измерялась температура не непосредственно в точке за ударной волной, а в некоторой области, в которой уже произошло частичное выравнивание электронной и ионной температуры.



Фиг. 2

4. Вычислим профили электронной и ионной температур в зоне за ударной волной, образующейся в струе, вытекающей из канала с тремя электродами (фиг. 2). Так как при сделанном в предыдущем пункте предположении о прямолинейности ударной волны в зоне за скачком  $v = 0$ , а  $u = u_2 = \text{const}$ , то из уравнений (1.6) и (1.8) получаем

$$T_e + T_i = T_{e2} + T_{i2} = \text{const}, \quad u_2 \frac{\partial (T_i - T_e)}{\partial x} = - \frac{4m_e}{m_i \tau_e} (T_i - T_e) \quad (4.1)$$

Как следует из (4.2),  $\tau_e$  зависит только от  $T_e$ . Поэтому, исключая  $T_i$  из второго уравнения (4.1), найдем уравнение для распределения  $T_e$  за ударной волной

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = (T_{i2} + T_{e2} - 2T_e) \frac{2m_e}{m_i \tau_e u_2}$$

Его решение сводится к вычислению квадратуры

$$x - x_0 = \int_{T_{e2}}^{T_e} \frac{m_i \tau_e u_2 dT_e}{2m_e (T_{i2} + T_{e2} - 2T_e)} \quad (4.2)$$

где  $x_0$  — координата скачка уплотнения в той точке, в которой рассматриваемая линия тока пересекла скачок. Вычислив по формуле (4.2)  $T_e$  как функцию  $x - x_0$ , можно найти распределение  $T_e$  поперек зоны за ударной волной при фиксированном  $x$ , т. е.  $T_e(y)$  при  $x = \text{const}$ . Для этого доста-

точно заметить, что  $x_0 = y / \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ , это следует из фиг. 2. Подставляя это значение  $x_0$  в (4.2), найдем  $T_e(y)$ .

Проведем вычисления для конкретного примера, рассмотренного в п. 3. Для упрощения вычислений допустим, что  $\tau_e$  постоянно и равно некоторой средней величине. Непосредственно из (4.1) получаем

$$T_i - T_e = (T_{i2} - T_{e2}) \exp[-4m_e(x - x_0) / m_i \tau_e u_2] \quad (4.3)$$

Полагая среднее значение  $T_e = 5 \cdot 10^4$  °К,  $n = 2.5 \cdot 10^{15}$ , по (1.2) найдем, что  $\tau_e \approx 2 \cdot 10^{-10}$  сек. Таким образом, при принятых ранее значениях  $m_i$  и  $u_2$  и найденном  $\tau_e$  будет

$$4m_e / m_i \tau_e u_2 \approx 0.091 \text{ см}^{-1}$$

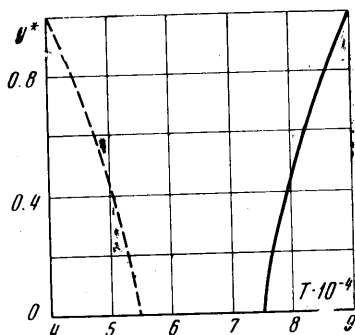
Для использованного в предыдущем пункте значения угла  $\alpha$  имеем

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) \approx 0.11$$

На фиг. 3 для приведенных выше величин параметров построены по формулам (4.3) и первой формуле (4.1) значения ионной и электронной температуры поперек зоны за ударной волной в сечении, отстоящем на 10 см от начала ударной волны.

По оси ординат отложено  $y^* = y / x \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ ; значение  $y = 0$  соответствует оси потока,  $y = 1$  — точке непосредственно за ударной волной. По оси абсцисс нанесены значения абсолютной температуры. Сплошная кривая дает распределение ионной температуры поперек потока, пунктирная кривая — электронной. Фиг. 3 наглядно иллюстрирует сказанное выше о неравномерном распределении электронной и ионной температуры в зоне за ударной волной.

Следует заметить в заключение, что наблюдать в экспериментах в чистом виде полностью кривые распределения температуры не удастся, вследствие того, что при таких высоких температурах из-за излучения происходит быстрое охлаждение всего потока. Но на небольших расстояниях от ударной волны получаемая картина, как уже отмечалось выше, по крайней мере качественно, вполне соответствует результатам расчета.



Фиг. 3

Поступило 14 X 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1963, вып. 1.
2. Бам-Зеликович Г. М. Течение проводящего газа в струе за срезом электромагнитного ускорителя. ПМТФ, 1967, № 1.
3. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
4. Иванова Л. Е. Исследование состава и распределение электронной и ионной температуры по сечению струи плазмы за срезом импульсного электромагнитного ускорителя. Изв. СО АН СССР, 1968, № 3.
5. Шафранов В. Д. Структура ударной волны в плазме. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 6.
6. Жаффен М. И., Пробстейн Р. Ф. Структура ударной волны в плазме. ПМТФ, 1964, № 6.