

## ОБ ОТРАЖЕНИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СФЕРЫ И ЦИЛИНДРА

В. Т. КИРЕЕВ

(Москва)

Рассматривается течение на оси в окрестности критической точки при отражении сильной плоской ударной волны (с равномерными параметрами за ней) от сферы и круглого цилиндра, образующие которого параллельны фронту падающей волны.

Методом малого параметра [1, 2] получены в конечном виде соотношения, определяющие изменение во времени профиля скоростей, давления энтальпии и отхода отраженной ударной волны.

Указанные соотношения при времени  $t \rightarrow \infty$  переходят в известные формулы [3, 4], определяющие стационарное течение на оси при обтекании потоком за падающей ударной волной, если учитывать главные члены, содержащие малый параметр.

Решение распространяется на случай, когда необходим учет равновесной диссоциации и ионизации.

Сравнение полученных результатов с измерением [5] во времени отхода от сферы отраженной ударной волны показывает их удовлетворительное соответствие.

1. Течение газа за отраженной ударной волной (фиг. 1) описывается уравнениями неразрывности количества движения и энергии [6].

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^i \rho}{\partial t} + \frac{\partial r^i \rho V_r}{\partial r} + \frac{r^{i-1}}{\sin^{i-1} \theta} \frac{\partial \rho V_\theta \sin^{i-1} \theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \rho \left[ r \frac{\partial V_r}{\partial t} + r V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta^2 \right] &= -r \frac{\partial P}{\partial r} \\ \rho \left[ r \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + r V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r V_\theta \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \rho \left[ r \frac{\partial H}{\partial t} + r V_r \frac{\partial H}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] &= r \frac{\partial P}{\partial t} + r V_r \frac{\partial P}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $r$  — расстояние от начала координат;  $\theta$  — текущий угол;  $V_r, V_\theta$  — составляющие скорости по ортогональным направлениям  $r, \theta$  соответственно;  $\rho$  — плотность;  $P$  — давление;  $H$  — энтальпия;  $i = 1$  для цилиндра;  $i = 2$  для сферы.

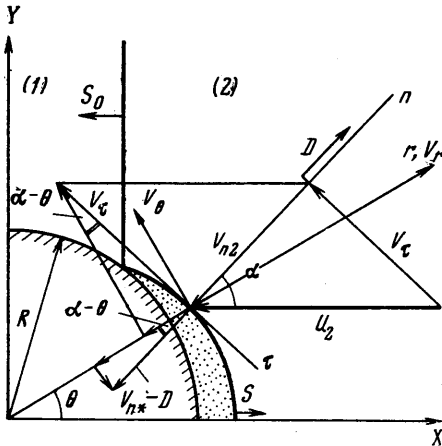
Связь между термодинамическими функциями определяется уравнением состояния. На отраженной ударной волне  $S$  выполняются условия [6]

$$\begin{aligned} \rho_* V_{n*} &= \rho_2 V_{n2}, & P_* + \rho_* V_{n*}^2 &= P_2 + \rho_2 V_{n2}^2, \\ H_* + 1/2 V_{n*}^2 &= H_2 + 1/2 V_{n2}^2, & V_{\tau*} &= V_{\tau 2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При этом из геометрических соотношений (фиг. 1) имеем

$$\begin{aligned} V_{r*} &= -(V_{n*} - D) \cos(\theta - \alpha) + V_{\tau*} \sin(\theta - \alpha) \\ V_{\theta*} &= (V_{n*} - D) \sin(\theta - \alpha) + V_{\tau*} \cos(\theta - \alpha) \\ V_{\tau*} &= u_2 \sin \alpha, & V_{n2} &= u_2 \cos \alpha + D \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.2), (1.3) индексом 2 помечены параметры за падающей (перед отраженной), а индексом \* — за отраженной ударной волной,  $u_2$  — скорость за падающей ударной волной  $S_0$ , направленной параллельно оси  $X$ ,  $V_{n2}$ ,  $V_{n*}$  — нормальные составляющие скорости относительно фронта отраженной ударной волны  $S$  соответственно перед и за ним,  $V_\tau$  — тангенциальная составляющая,  $D$  — скорость движения фронта  $S$  вдоль нормали к нему,  $R$  — радиус сферы или цилиндра,  $\alpha$  — угол между нормалью ( $n$ ) к фронту отраженной волны и осью  $X$ .



Фиг. 1

Если движение фронта ударной волны  $S$  в некотором меридиональном сечении (фиг. 1) определяется [6] как

$$F(X, Y, t) = 0 \quad (1.4)$$

то

$$D = - \frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial Y}$$

$$|\nabla F| = \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

На теле выполняется условие

$$V_r = 0 \quad \text{при } r = R \quad (1.6)$$

Представляя в окрестности критической точки ( $i = 2$ ) линии ( $i = 1$ ) движение фронта отраженной волны  $S$  в виде

$$r = R + \delta_*(t) + \theta^2 \delta^\circ(t) + \dots$$

$$F(r, \theta, t) = r - R - \delta_*(t) - \delta^\circ(t) \theta^2 - \dots \quad (1.7)$$

Имеем, переходя в (1.4), (1.5) к независимым переменным  $r, \theta$

$$\sin \alpha = \theta \left( 1 - \frac{2\delta^\circ}{r} \right), \quad \sin(\theta - \alpha) = \theta \frac{2\delta^\circ}{r}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\theta^2}{2} \left( 1 - \frac{2\delta^\circ}{r} \right)^2, \quad \cos(\theta - \alpha) = 1 - \frac{\theta^2}{2} \left( \frac{2\delta^\circ}{r} \right)^2 \quad (1.8)$$

$$D = \frac{d\delta_*}{dt} + \theta^2 \left\{ \frac{d\delta^\circ}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\delta_*}{dt} \left[ 1 + \frac{4}{r^2} \left( \frac{d\delta^\circ}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

Вводя безразмерные параметры, будем искать решение уравнений (1.1) с условиями (1.2) — (1.6) в окрестности критической точки аналогично стационарным задачам [3, 4] в виде рядов по степеням  $\theta$

$$\begin{aligned} r &= R(1 + x), & t &= (R/a_3)t_1 \\ P/P_3 &= p_0(x, t_1) + \theta^2 p^\circ(x, t_1) + \dots \\ \rho/\rho_3 &= \rho_0(x, t_1) + \theta^2 \rho^\circ(x, t_1) + \dots \\ H/H_3 &= h_0(x, t_1) + \theta^2 h^\circ(x, t_1) + \dots \\ V_r/a_3 &= u_0(x, t_1) + \theta^2 u^\circ(x, t_1) + \dots \\ V_\theta/a_3 &= \theta v_0(x, t_1) + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $a$  — скорость звука, индексом 3 помечены постоянные параметры за отраженной ударной волной, реализующиеся при отражении ударной волны от плоскости, параллельной ее фронту.

Подставляя (1.9) в (1.1), (1.2), (1.6) с учетом (1.3), (1.8), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1+x)\rho_0}{\partial t_1} + \frac{\partial(1+x)\rho_0 u_0}{\partial x} + i\rho_0 v_0 &= 0 \\ \rho_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad \left( \gamma_3 = \frac{\rho_3 a_3^2}{P_3} \right) \\ \rho_0 \left[ (1+x) \frac{\partial v_0}{\partial t_1} + (1+x) u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0^2 + v_0 u_0 \right] &= -\frac{2}{\gamma_3} p_0 \\ \rho_0 \left( \frac{\partial h_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) &= \frac{P_3}{H_{3\rho_3}} \left( \frac{\partial p_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) \quad (\theta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

условиям на отраженной ударной волне при

$$x = x_*(t_1) + \theta^2 x^\circ(t_1) + \dots \quad (x_* = \delta_* / R, \quad x^\circ = \delta^\circ / R)$$

$$p_0 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} P_{23} (M_2 + a_{32} x_*')^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} P_{23} \quad (1.11)$$

$$\rho_0 = \rho_{23} (\gamma+1) \left[ \gamma - 1 + \frac{2}{(M_2 + a_{32} x_*')^2} \right]^{-1} \quad (\gamma = \text{const})$$

$$u_0 = x_*' \left( 1 - \frac{\rho_{23}}{\rho_0} \right) - u_{23} \frac{\rho_{23}}{\rho_0}, \quad h_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$$

$$v_0 = u_{23} \left( 1 - \frac{2x^0}{1+x_*} \right) - u_0 \frac{2x^0}{1+x_*}$$

$$\left( P_{23} = \frac{P_2}{P_3}, \quad \rho_{23} = \frac{\rho_2}{\rho_3}, \quad a_{32} = \frac{a_3}{a_2}, \quad M_2 = \frac{u_2}{a_2}, \quad u_{23} = \frac{u_2}{a_3} \right)$$

и условию на теле

$$u_0 = 0, \quad \text{при } x = 0 \quad (1.12)$$

Анализ системы уравнений (1.10) совместно с (1.11) — (1.12) в момент времени  $t = 0$ , определяемый приходом падающей ударной волны в критическую точку, приводит к очевидным начальным условиям

$$\begin{aligned} u_0 = 0, \quad p_0 = 1, \quad \rho_0 = 1, \quad x_*' = \varepsilon \\ x_* = 0, \quad D = W, \quad (\varepsilon = W/a_3) \quad \text{при } t_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь  $W$  — скорость отраженной от плоскости ударной волны.

В дальнейшем будем рассматривать отражение сильной ( $P_2/P_1 \gg 1$ ) падающей ударной волны ( $P_1$  — давление перед ней), тогда

$$\begin{aligned} M_2 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{1/2}, \quad \rho_{23} = \frac{1}{\gamma}, \quad P_{23} = \frac{1}{3\gamma-1} \quad (1.14) \\ a_{32} = \left( \frac{3\gamma-1}{\gamma} \right)^{1/2}, \quad u_{23} = \left[ \frac{2}{(\gamma-1)(3\gamma-1)} \right]^{1/2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{2(\gamma-1)}{3\gamma-1} \end{aligned}$$

Подставляя (1.14) в (1.11), запишем значения параметров на отраженной ударной волне при  $t_1 \rightarrow \infty$  ( $x_*' = 0$ )

$$u_0 = - \left[ \frac{2(\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \right]^{1/2}, \quad P_0 = \frac{3 - \gamma}{3\gamma - 1}, \quad \rho_0 = \frac{1}{\gamma} \quad (1.15)$$

Система уравнений (1.10) с условиями (1.11) — (1.13) не может быть решена точно, поскольку (1.10) — (1.13) содержат две «лишние» функции  $p^\circ(x, t_1)$  и  $x^\circ(t_1)$ . Это обстоятельство так же, как и в [4], отражает тот факт, что течение в окрестности критической точки нельзя точно определить из рассмотрения только локальных ( $\theta \rightarrow 0$ ) условий (1.10) — (1.13).

2. Для получения приближенного решения (1.10) — (1.13) введем малый параметр  $\varepsilon$  при  $\gamma \rightarrow 1$  и оценим по (1.13), (1.15) изменение параметров

$$\begin{aligned} p_0(0) - p_0(\infty) &= \frac{4(\gamma - 1)}{3\gamma - 1} = 2\varepsilon^2, & \rho_0(0) - \rho_0(\infty) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \sim \varepsilon \\ h_0(0) - h_0(\infty) &= \frac{\gamma^2 - 1}{3\gamma - 1} \sim \varepsilon^2, & x_*'(0) - x_*'(\infty) &= \varepsilon \\ u_0(0) - u_0(\infty) &= \varepsilon, & \varepsilon^2 &= \left( \frac{W}{a_3} \right)^2 = \frac{2(\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

При  $t_1 \rightarrow \infty$  реализуется стационарное обтекание и отход ударной волны имеет порядок [3, 4] отношения плотностей  $k$  на отраженной (отошедшей) ударной волне (1.14), (1.15)

$$x_*(\infty) \sim k \sim \varepsilon^2, \quad k = \gamma - 1, \quad \lim(\varepsilon^2/k) = 1, \quad (\gamma \rightarrow 1) \quad (2.2)$$

Отметим, что приведенные порядки изменения величин на отраженной ударной волне в диапазоне  $0 \leq t_1 < \infty$  совпадают с порядками изменения тех же величин на оси между отошедшей волной и телом [3, 4] при стационарном обтекании потоком за падающей волной.

Из (1.13) — (1.15) и (2.1), (2.2) следует, что при  $\gamma \rightarrow 1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ ) начальная скорость отраженной ударной волны, изменение параметров на ней и ее максимальный отход стремятся к нулю, а  $P_3/\rho_2 u_2^2$  — к единице, т. е. с точностью до изменений величин, приведенных в (2.1), сразу возникает стационарное обтекание, описываемое теорией Ньютона [3]. Это обстоятельство позволяет оценить порядок двух неизвестных в (1.10) — (1.13) величин  $p^\circ$  и  $x^\circ$ , поскольку в дальнейшем при разложении в ряды по степеням  $\varepsilon$  понадобятся только их нулевые приближения

$$p^0 \approx \text{const} = -b_i \frac{\rho_2 u_2^2}{P_3}, \quad x^0 \approx 0$$

$$b_1 = 3/2 \quad (i = 1), \quad b_2 = 4/3 \quad (i = 2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

В (2.3) приведены предельные значения  $b_i$ , определенные [3] по теории Ньютона с учетом центробежных сил при стационарном обтекании соответственно цилиндра и сферы.

Согласно (2.1) — (2.3) решение (1.10) — (1.13) для малых  $\varepsilon$  будем искать в виде

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + \varepsilon^2 p + \dots, & \rho_0 &= 1 + \varepsilon^2 \rho + \dots, & h_0 &= 1 + \varepsilon^2 h + \dots \\ u_0 &= \varepsilon u + \dots, & v_0 &= \varepsilon^{-1} v + \dots, & x &= \varepsilon^2 \xi, \quad t_1 = \varepsilon t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (1.10) — (1.13), получим для малых  $\varepsilon$  с учетом (2.3) замкнутую систему уравнений ( $\varepsilon^2 \ll 1, \gamma = \text{const}$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + iv = 0 \quad \left( \beta^2 = 2\varepsilon^2 b_i \frac{\rho_2 u_2^2}{P_3} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v^2 = \beta^2, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} + u \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0$$

С условиями на отраженной ударной волне

$$\begin{aligned} p &= p_*(\xi_*'), & p_* &= 2(\xi_*' - 1) \\ h &= h_*(\xi_*'), & h_* &= (\xi_*' - 1) \quad \text{при } \xi = \xi_*(\tau) \\ u &= u_*(\xi_*'), & u_* &= \xi_*' - 1 \\ v &= E = \text{const}, & v_* &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

начальным условием

$$\xi_* = 0 \quad (\xi_*' = 1, v_* = E) \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.7)$$

и условием на теле

$$u = 0, \quad \text{при } \xi = 0 \quad (2.8)$$

Аналогично работе [4], где рассматривается стационарное обтекание в правой части второго уравнения (2.5) сохранена величина  $\beta^2$ .

3. Перейдем к решению (2.5) — (2.8) в случае сферы (для  $i = 2$ ). Два первых уравнения из (2.5) и два последних условия из (2.6) могут рассматриваться независимо от оставшегося в (2.5) и (2.6). Исключая из них  $v$ , приходим к

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + u \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 = -2\beta^2 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -2E, \quad u = \xi_*' - 1 \quad \text{при } \xi = \xi_*(\tau) \quad (3.2)$$

Решение (3.1), (3.2) будем искать в виде

$$u = -2\Phi(\tau)\xi + \Phi_1(\tau)\xi^2 \quad (3.3)$$

Здесь  $u$  удовлетворяет условию (2.8), а  $\Phi(\tau)$  и  $\Phi_1(\tau)$  — пока неизвестные функции времени.

Подставляя (3.3) в (3.1), получаем, приравнивая коэффициенты при нулевых степенях  $\xi$

$$\Phi' + \Phi^2 = \beta^2 \quad (3.4)$$

и при первых степенях  $\xi$

$$\Phi_1' = 0, \quad \Phi_1 = \text{const} \quad (3.5)$$

При этом члены, содержащие  $\xi^2$ , взаимно уничтожаются, а членов с другими степенями  $\xi$  нет. Подставляя (3.3) в первое условие из (3.2) имеем

$$\xi_* = (\Phi - E)\Phi_1^{-1} \quad (3.6)$$

Значение постоянной  $\Phi_1$  определим из второго условия (3.2), подставив в него (3.3) — (3.6)

$$\Phi_1 = \beta^2 - E^2 \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.4) с учетом начального условия

$$\Phi = E \quad \text{при } \tau = 0 \quad (3.8)$$

вытекающего из (2.7) и (3.6), получим

$$\Phi = \beta(1 + \Phi_2)(1 - \Phi_2)^{-1}, \quad \Phi_2 = (E - \beta)(E + \beta)^{-1} \exp(-2\beta\tau) \\ (\Phi = E(1 + E\tau)^{-1}, \beta = 0) \quad \beta \leq \Phi \leq E \quad (3.9)$$

Заметим, что согласно (2.5) и (3.4)

$$\Phi = v \quad \text{при } \xi = 0 \quad (3.10)$$

причем вид этой функции сохранится (кроме значения  $\beta$ ) и при  $i = 1$ .

Таким образом, получаем из (3.3) — (3.9) изменение во времени профиля скоростей и отхода отраженной от сферы ( $i = 2$ ) ударной волны

$$u = -2\Phi\xi - \xi^2(E^2 - \beta^2), \quad \xi_* = (E - \Phi)(E^2 - \beta^2)^{-1} \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует:

$$u = -2\beta\xi - (1 - 2\beta\xi_*)(\xi/\xi_*)^2, \quad \xi_* = (1 + \beta)^{-1} \\ (\tau \rightarrow \infty, \quad \varepsilon^2 \ll 1) \quad (3.12)$$

Это с учетом (2.4) и (1.14) совпадает при малых  $\varepsilon$  и, следовательно, малых  $k$  с известными соотношениями [3, 4] при стационарном обтекании.

Теперь, имея (3.11), непосредственным интегрированием третьего уравнения в (2.5) получаем

$$p = \gamma_3(\Phi'\xi^2 - 1/2u^2) + \Phi_3(\tau) \quad (3.13)$$

где произвольная функция времени  $\Phi_3$  определяется из первого условия (2.6)

$$\Phi_3(\tau) = p_*(\xi_*') - \gamma_3(\Phi'\xi_*'^2 - 1/2u_*'^2), \quad \xi_*' = (\Phi^2 - \beta^2)(E^2 - \beta^2)^{-1} \\ \Phi_3(\tau) = 2(\xi_*' - 1) + 1/2(\xi_*' - 1)^2 + (\Phi^2 - \beta^2)\xi_*'^2 \quad (\gamma = \text{const}) \quad (3.14)$$

Из четвертого уравнения (2.5) вытекает постоянство  $h$  вдоль траектории отмеченной частицы

$$d\xi/d\tau = u, \quad h = \text{const} = h_*(\tau_*) \quad (3.15)$$

Значение  $h_*$  для каждой частицы, прошедшей отраженную ударную волну в момент времени  $\tau_*$ , определим из второго условия в (2.6)

$$h_* = h_*[\xi_*'(\tau_*)], \quad h_* = [\Phi^2(\tau_*) - \beta^2](1 - \beta^2)^{-1} - 1 \quad (\gamma = \text{const}) \quad (3.16)$$

Подставляя (3.11) в (3.15), имеем

$$d\xi/d\tau = u = -2\Phi\xi - (E^2 - \beta^2)\xi^2 \quad (\xi = \xi_* \text{ при } \tau = \tau_*) \quad (3.17)$$

Интегрируя (3.17), получаем уравнение траектории частицы, прошедшей отраженную ударную волну в момент времени  $\tau_*$

$$\tau = \left[ \frac{2\beta}{E^2 - \beta^2} \frac{\Phi_2(\tau)}{1 - \Phi_2(\tau)} \right] \left\{ \left[ 1 - \frac{E + \beta}{E - \beta} \Phi_2(\tau_*) \right]^{-1} - [1 - \Phi_2(\tau)]^{-1} \right\}^{-1} \\ \tau \geq \tau_* \quad (3.18)$$

Отсюда видно, что частица, для которой  $\tau_* = 0$ , бесконечно долго находится в точке  $\xi = 0$ , а все другие отмеченные частицы как угодно близко подходят к телу, не достигая его. Эта особенность может быть устранена, если прервать (3.18), как в [4], в очень близкой окрестности тела  $\xi \neq 0$ , где уже нельзя пренебрегать, как это делалось выше, влиянием вязкости и теплопроводности.

Интегрирование (2.5) — (2.8) для  $i = 2$  закончено.

4. Рассмотрим решение (2.5) — (2.8) в случае цилиндра (при  $i = 1$ ). «Отгадать» вид решения в этом случае, как это было сделано в (3.3) для  $i = 2$ , затруднительно, поэтому займемся поиском общего решения системы (2.5), предварительно перейдя от независимых переменных  $\tau$  и  $\xi$  к независимым переменным  $\tau$  и  $v$ . Тогда вместо (2.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} + iv \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = 0, \quad - \frac{\partial \xi}{\partial \xi} + u + v^2 \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = \beta^2 \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial v} = - \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial h}{\partial v} + u \frac{\partial h}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исключая из первых двух уравнений (4.1) величину  $u$ , получаем

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + (v^2 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (i - 2)v\varphi, \quad \varphi = \frac{\partial \xi}{\partial v} \quad (4.2)$$

Этому линейному уравнению в частных производных соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\frac{d\tau}{-1} = \frac{dv}{v^2 - \beta^2} = \frac{d\varphi}{(i - 2)v\varphi} \quad (4.3)$$

имеющая два первых интеграла

$$\varphi(v^2 - \beta^2)^{i-1/2} = \text{const}, \quad (v - \beta)(v + \beta)^{-1} \exp 2\beta\tau = \text{const} \quad (4.4)$$

Поэтому общим решением (4.2) будет [7]

$$\varphi = \partial \xi / \partial v = (v^2 - \beta^2)^{i/2-1} \Psi(z), \quad z = (v - \beta)(v + \beta)^{-1} \exp 2\beta\tau \quad (4.5)$$

( $\Psi$  — произвольная функция аргумента  $z$ )

Теперь из (4.5) и первого уравнения из (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \int (v^2 - \beta^2)^{i/2-1} \Psi(z) dv + \Psi_1(\tau) \\ u &= -i \int v(v^2 - \beta^2)^{i/2-1} \Psi(z) dv + \Psi_2(\tau) \end{aligned} \quad (4.6)$$

( $\Psi_1, \Psi_2$  — произвольные функции аргумента  $\tau$ )

Для определения трех произвольных функций  $\Psi, \Psi_1$  и  $\Psi_2$  из (2.6), (2.8) следуют три условия: одно на ударной волне

$$u = u_* = d\xi_*/d\tau - 1, \quad (\xi = \xi_*) \quad \text{при } v = v_* = E \quad (4.7)$$

и два на теле

$$\xi = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } v = \Phi, \quad z = (E - \beta)(E + \beta)^{-1} \quad (4.8)$$

Функция  $\Phi$  была уже найдена в (3.9), (3.10).

Исключая  $v$  из (4.6), легко убедиться в том, что решение (3.3) для  $i = 2$  содержится в общем решении (4.6) и соответствует случаю  $\Psi \equiv \text{const}$ . Это обстоятельство наводит на мысль искать решение (4.2) с граничными условиями (4.7), (4.8) и для  $i = 1$  при  $\Psi \equiv \text{const}$ . Тогда для отражения ударной волны от цилиндра из (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \Psi \ln [v + (v^2 - \beta^2)^{1/2}] + \Psi_1(\tau) \\ u &= -\Psi(v^2 - \beta^2)^{1/2} + \Psi_2(\tau), \quad \Psi = \text{const} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Откуда, используя (4.8), получаем (4.10)

$$\Psi_1(\tau) = -\Psi \ln [\Phi + (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2}], \quad \Psi_2(\tau) = \Psi(\Phi^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \Psi_1' = \Psi_2$$

Подставляя (4.9), (4.10) в (4.7), определяем

$$\Psi = (E^2 - \beta^2)^{-1/2} \quad (4.11)$$

Окончательно из (4.9)–(4.11) приходим к

$$\xi = (E^2 - \beta^2)^{-1/2} \ln [v + (v^2 - \beta^2)^{1/2}] [\Phi + (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2}]^{-1} \quad (4.12)$$

$$u = -(E^2 - \beta^2) [(v^2 - \beta^2)^{1/2} - (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2}] \quad (\Phi \leq v \leq E)$$

Из (4.12), в частности, для отраженной ударной волны при имеем

$$x_* \approx \frac{1}{2} k \ln \frac{4}{3k} \quad (\varepsilon^2 \ll 1, \quad E = 1, \quad \beta = \sqrt{3k})$$

Это совпадает с главным членом в решениях о стационарном обтекании цилиндра [3].

После получения (4.12) третье уравнение из (4.1) интегрируется без труда

$$p = -\gamma_3 (E^2 - \beta^2)^{-1/2} \{1/2 (v^2 + \Phi^2 - 2\beta^2) - \Phi (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2} \ln [v + (v^2 - \beta^2)^{1/2}]\} + \Psi_3(\tau) \quad (4.13)$$

Произвольная функция времени  $\Psi_3$  определяется из условия на ударной волне

$$p = p_*(\xi_*') \quad (p_* = 2(\xi_*' - 1), \quad E = 1, \quad \gamma_3 = 1, \quad \gamma = \text{const}) \quad (4.14)$$

$$\Psi_3(\tau) = p_*(\xi_*') + \gamma_3 (E^2 - \beta^2)^{-1/2} \{1/2 (E^2 + \Phi^2 - 2\beta^2) - \Phi (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2} \ln [(E + (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2})]\}$$

$$\xi_*' = (\Phi^2 - \beta^2)^{1/2} (E^2 - \beta^2)^{-1/2} \quad (4.15)$$

Осталось найти величину  $h$ . Подставляя (4.12) с учетом (3.4) в последнее уравнение (4.1), записываем

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} - (v^2 - \beta^2) \frac{\partial h}{\partial v} = 0 \quad (4.16)$$

Аналогично (4.5) общим решением (4.16) будет

$$h = \Psi_4(z), \quad z = (v - \beta)(v + \beta)^{-1} \exp 2\beta\tau \quad (4.17)$$

Здесь произвольная функция  $\Psi_4(z)$  определяется из граничного условия на ударной волне

$$h = h_*(\xi_*') = \Psi_4(z_*) \quad \text{при } v = v_* = E$$

$$h = \xi_*' - 1 \quad (\gamma = \text{const}) \quad (4.18)$$

$$h = \left\{ \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \left[ z + \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \right]^2 \left[ z - \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \right]^2 - 1 \right.$$

Постоянство  $h$  при  $\xi = 0$  отражает уже отмеченную в п. 3 для  $i = 2$  особенность, заключающуюся в бесконечном времени пребывания на теле частицы, которая первой прошла через отраженную ударную волну ( $\tau_* = 0$ ).



Интегрирование (2.5) — (2.8) при  $i = 1$  закончено. Заметим, что решение (2.5) — (2.8) при  $i = 0$  описывает отражение ударной волны от плоской стенки.

5. Проведенный анализ легко может быть распространен на случай течения, когда необходим учет равновесной диссоциации и ионизации газа.

Действительно, оценки порядков изменения величин (2.1) очевидно справедливы и в этом случае, поэтому система (2.5) не изменится.

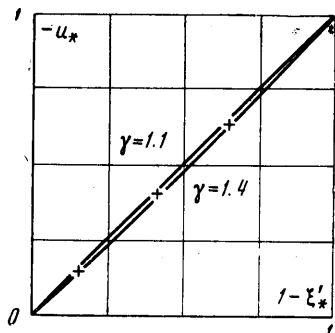
Использованная существенным образом при интегрировании (2.5) линейная зависимость  $u_*$  от  $\xi_*$  на отраженной ударной волне, третье условие (2.6), с большой точностью, следует непосредственно из первоначальных соотношений (1.11) без отбрасывания членов порядка  $\varepsilon^2$ . Это видно из фиг. 2, где по (1.11) с учетом (1.14) построена зависимость  $u_*$  от  $1 - \xi_*$  для значений  $\gamma = 1.4$  и  $\gamma_0 = 1.1$ .

Кроме того, эта же зависимость хорошо выполняется и при учете диссоциации и ионизации для достаточно сильных ударных волн. На фиг. 2 в качестве иллюстрации этого обстоятельства крестиками нанесены результаты соответствующих расчетов по (1.2) с использованием таблиц термодинамических функций воздуха [8] для ударной волны, падающей со скоростью 8000 м/сек при давлении перед ней 1 мм рт. ст.

Относительно других граничных условий (2.6) на отраженной ударной волне и постоянных величин  $\beta$ ,  $E$ ,  $\gamma_3$  напомним, что анализ в п.3 и п.4 проведен, как для произвольного вида функций  $p_*(\xi_*)$ ,  $h_*(\xi_*)$  и постоянных

$$\beta^2 = 2\varepsilon^2 b_i \frac{\rho_2 u_2^2}{\gamma_3 P_3}, \quad E = \frac{u_2 W}{a_3^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\rho_3 a_3^2}{P_3}, \quad \varepsilon = \frac{W}{a_3}$$

$$(\beta_1^2 = 3\varepsilon^2, \beta_2^2 = 8/3\varepsilon^2, E = 1, \gamma_3 = 1, \gamma \rightarrow 1)$$



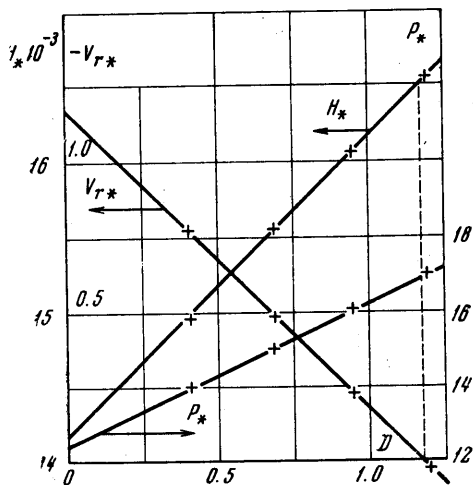
Фиг. 2

так и для их значений при  $\gamma = \text{const} \rightarrow 1$ .

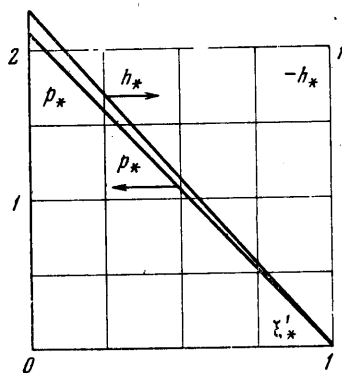
Поэтому, если эти выражения определить по (1.2), (1.9), (2.4) с использованием

виде, например в виде таблиц [8], то результаты п.3 и п.4 непосредственно можно использовать и в этом случае (конечно, если  $\varepsilon$  достаточно мало).

В качестве примера приведем результаты расчетов отражения



Фиг. 3



Фиг. 4

ударной волны, падающей на сферу ( $i = 2$ ) и цилиндр ( $i = 1$ ) со скоростью 8000 м/сек ( $P_1 = 1$  мм рт. ст.).

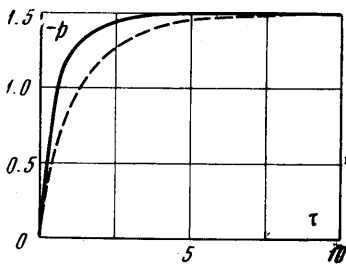
На фиг. 3 для этих исходных данных представлены результаты расчетов по (1.2) и [8] скорости  $V_{r*}$  [км·сек<sup>-1</sup>], давления  $P_*$  [кг·см<sup>-2</sup>] и энтальпии  $H_*$  [м<sup>2</sup>·сек<sup>-2</sup>] за отраженной ударной волной в зависимости от ее скорости  $D$  [км·сек<sup>-1</sup>] для рассматриваемого интервала изменения параметров от  $t = 0$  ( $V_{r*} = 0$ ) до  $t \rightarrow \infty$  ( $D = 0$ ).

Используя фиг. 3 и таблицы [2] с учетом (1.8), (1.9), (2.3), (2.4), легко построить зависимости  $p_*$  и  $h_*$  от  $\xi_*'$ , представленные на фиг. 4, и найти значения постоянных

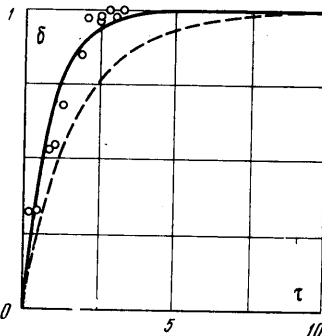
$$E = 0.802, \quad \beta_1^2 = 0.308, \quad \beta_2 = 0.524, \quad \varepsilon^2 = 0.126, \quad \gamma_3 = 1.185$$

После этого непосредственно можно перейти к использованию формул п.3 и п.4. Например, на фиг. 5 представлены графики зависимости  $p$  от  $\tau$  в критической точке ( $\xi = 0$ ) сферы (сплошная линия), построенный по (3.13), (3.14), и цилиндра (пунктирная линия), построенный по (4.14).

На фиг. 6 приведено изменение по времени  $\delta$  отношения текущего значения отхода ударной волны  $\delta_*$  к его максимальному значению, построенное по (3.11), (3.9) для сферы (сплошная линия), и по (4.12), (3.9), для цилиндра (пунктир). Здесь же точками нанесены приведенные в [5] значения  $\delta$ , полученные экспериментальным



Фиг. 5



Фиг. 6

путем при отражении ударной волны от сферы в тех же исходных условиях. Переход от безразмерного времени  $S_w$ , использованного в [5], согласно (3.11), (3.9) произведен по формуле

$$\tau = S_w \varepsilon^{-2} \delta_{* \max} / R \quad (S_w = Wt / \delta_{* \max}, \quad \delta = \delta_* / \delta_{* \max})$$

Как видно из фиг. 6, расчет находится в удовлетворительном соответствии с экспериментом.

Поступило 26 VI 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. New York — London, Acad. Press, 1964. (Рус. перев.: Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.)
3. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. New York — London, Acad. Press, 1959. (Рус. перев.: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.)
4. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела, ПМТФ, 1961, № 2.
5. Богословский К. Е., Киреева Н. И., Макаревич Г. А., Цветаев Ю. А., Шимарев С. К., Тарантов Е. А. Исследование нестационарного обтекания моделей в электромагнитной ударной трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. М., Физматгиз, 1963.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
8. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Стаханов И. И., Плешанов А. С., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха. М., Изд-во АН СССР, 1957, 1959, 1961.