

ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

Г. А. ДАНИЛИН

(Москва)

Рассматривается равновесное течение многокомпонентного ионизованного газа между двумя каталитическими пластинами бесконечной длины, из которых одна перемещается параллельно другой с постоянной скоростью. Результаты работы [1] обобщаются для ионизованных газовых смесей, находящихся в локальном термодинамическом равновесии. Приводятся формулы для вычисления теплового потока и коэффициента эффективной теплопроводности для амбиполярной диффузии.

Далее приводится специальный случай ионизации.

Обозначения

A_i — химический символ i -го компонента,	E — напряженность электрического поля,
W_i — проекция вектора молярного потока диффузии i -го компонента на ось y ,	δ — расстояние между пластинами,
x_i — молярная концентрация,	N — число компонент,
H_i — энтальпия,	ρ — плотность,
m_i — молекулярный вес,	T — температура,
Q_s — теплота s -й реакции,	p — давление,
ν_{si} — стехиометрические коэффициенты,	u — проекция средней скорости на ось y ,
$K_{ps}(T)$ — константа равновесия s -й реакции,	μ — коэффициент вязкости,
w_i — скорость образования массы i -го компонента в единичном объеме,	λ — коэффициент теплопроводности,
Z_i — зарядовое число,	D_{ij} — коэффициент бинарной диффузии,
e — единица заряда (заряд электрона),	R — универсальная газовая постоянная,
	k — постоянная Больцмана.

1. Рассмотрим стационарное течение реагирующего многокомпонентного ионизованного газа между двумя идеально каталитическими пластинами бесконечной длины, из которых одна перемещается параллельно другой с постоянной скоростью U . Предполагается, что расстояние между пластинами много больше дебаевской длины, внешние электрическое и магнитное поля отсутствуют. Термодиффузию и приток тепла за счет излучения не учитываем. Смесь считаем совершенным газом.

Как известно из теории плазмы, важным фактором, влияющим на процессы переноса в ионизованном газе, является действие электрического поля, возникновение которого связано с разделением зарядов вследствие разной подвижности ионов и электронов. Предполагается, что разделение зарядов не снимается с пластин внешними проводниками. Тогда ионы и электроны не могут диффундировать независимо друг от друга. Возникающее электрическое поле вынуждает их к совместной амбиполярной диффузии. При этом электрический ток поперек пограничного слоя отсутствует.

Уравнениями движения формулируемой задачи будут обычные уравнения течения Куэтта реагирующего многокомпонентного ионизованного газа, на которые дополнительно налагаются условия электрической нейтральности и отсутствия тока

$$m_i \frac{dW_i}{dy} = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \sum_{k=1}^N w_k = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0, \quad p = \frac{\rho}{m} RT \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT}{dy} - \sum_{k=1}^N H_k W_k \right) + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k}, \quad c_i = \frac{m_i x_i}{m}, \quad \sum_{k=1}^N x_k = 1 \quad (1.4)$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие электрической нейтральности

$$\sum_{k=1}^N x_k Z_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N \frac{c_k Z_k}{m_k} = 0 \quad (1.5)$$

Связь молярных потоков диффузии с термодинамическими параметрами смеси при сделанных выше предположениях дается соотношениями Стефана — Максвелла [2], условием отсутствия тока и известным тождеством

$$\frac{dx_i}{dy} = \sum_{k=1}^N \Delta_{ik} (x_i W_k - x_k W_i) + \frac{x_i Z_i}{kT} eE \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^N Z_k W_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N m_k W_k = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\Delta_{ik} = RT / p D_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.8)$$

Пусть в смеси газов одновременно протекают N_r независимых химических реакций. Реакцию будем записывать так, что независимые компоненты будут располагаться на левой стороне, а все другие — на правой

$$A_s = \sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} A_l - Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, N_r)$$

Будем считать, что состояние плазмы у верхней пластины характеризует состояние ионизованного газа у верхней границы пограничного слоя, тогда граничные условиями системы (1.1) — (1.8) будут при $y = 0$

$$u = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{1}{x_s} \prod_{l=N_r+1}^N x_l^{\nu_{sl}} = \frac{K_{ps}(T_w)}{p_w^{\nu_s}} \quad (s = 1, 2, \dots, N_r) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{v}_s = \sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} - 1 \quad (s = 1, 2, \dots, N_r), \quad W_l + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{sl} W_s = 0 \quad (l = N_r + 1, \dots, N)$$

при $y = \delta$

$$u = U, \quad T = T_\delta, \quad p = p_\delta, \quad \frac{1}{x_s} \prod_{l=N_r+1}^N x_l^{\nu_{sl}} = \frac{K_{ps}(T_\delta)}{p_\delta^{\nu_s}} \quad (s = 1, 2, \dots, N_r) \quad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^N x_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N x_k Z_k = 0, \quad c_l + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{sl} \frac{m_l}{m_s} c_s = c_l^* \quad (l = N_r + 2, \dots, N - 1)$$

2. Рассмотрим случай равновесного течения. Для каждой реакции должны выполняться уравнения равновесия

$$\frac{1}{x_s} \prod_{l=N_r+1}^N x_l^{\nu_{sl}} = \frac{K_{ps}(T)}{p^{\nu_s}} \quad (s = 1, 2, \dots, N_r) \quad (2.1)$$

(это уравнения Гильдберга — Вааге для реакций диссоциации и Саха — для реакций ионизации) и уравнения сохранения элемента

$$\frac{d}{dy} \left(W_l + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{sl} W_s \right) = 0 \quad (l = N_r + 1, \dots, N)$$

Из последних уравнений и граничных условий следует, что поперек слоя

$$W_l + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{sl} W_s = 0 \quad (l = N_r + 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

Используя эти равенства, уравнение притока тепла можно привести к виду

$$\frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT}{dy} + \sum_{s=1}^{N_r} Q_s W_s \right) + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$Q_s = \sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} H_l - H_s \quad (s=1, 2, \dots, N_r)$$

Следует отметить, что в таком виде уравнение притока тепла применимо для течения Куэтта и при наличии неравновесных химических реакций, так как при граничных условиях (1.9) $N - N_r$ соотношений (2.2) выполняются всегда. Для замороженного слоя

$$\frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right) + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0$$

Далее, всегда выполняются равенства

$$Z_s = \sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} Z_l, \quad m_s = \sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} m_l \quad (s=1, 2, \dots, N_r) \quad (2.4)$$

поэтому условие отсутствия тока и тождество (1.7) являются следствием уравнений (2.2), так что в дальнейшем они не рассматриваются.

Уравнения (1.2), (1.4)–(1.6), (1.8), (2.1)–(2.3) совместно с граничными условиями (1.9) и (1.10) будут исходными для рассматриваемой задачи.

3. Сразу видно, что из уравнений (1.4)–(1.6), (1.8), (2.1), (2.2) можно выразить все dx_i/dy , W_i и E через термодинамические параметры смеси. Подставляя в логарифмические производные от уравнений равновесия (2.1) выражения dx_i/dy из (1.6), а также учитывая, что поперек слоя $dp/dy = 0$, аналогичными [1] преобразованиями с использованием равенств (2.2) получим уравнения для определения первых N_r молярных потоков диффузии

$$\sum_{k=1}^{N_r} A_{ks} W_k = \frac{d \ln K_{ps}(T)}{dy} = \frac{Q_s}{RT^2} \frac{dT}{dy} \quad (s=1, 2, \dots, N_r) \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{d \ln K_{ps}(T)}{dT} = \frac{Q_s}{RT^2} \text{ по изохоре Вант-Гоффа} \right)$$

Здесь коэффициенты $A_{ks} = A_{sk}$ известным образом зависят от состава, температуры, давления, стехиометрических коэффициентов и бинарных коэффициентов диффузии [1]. Напряженность электрического поля в эти уравнения не войдет, так как нетрудно убедиться, что оно будет присутствовать с коэффициентами

$$\frac{e}{kT} \left(\sum_{l=N_r+1}^N \nu_{sl} Z_l - Z_s \right) \equiv 0 \quad (s=1, 2, \dots, N_r)$$

в силу равенств (2.4). Уравнения (2.2) и (3.1) образуют систему из N линейных уравнений для N потоков. Легко показать, что решения системы (2.2), (3.1) имеют вид

$$W_i = - \frac{\Delta_i}{RT^2 \Delta} \frac{dT}{dy} = - \frac{1}{RT^2 \Delta} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{1i} & \vartheta_{2i} & \dots & \vartheta_{N_r i} \\ Q_1 & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1 N_r} \\ Q_2 & A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2 N_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N_r} & A_{N_r 1} & A_{N_r 2} & \dots & A_{N_r N_r} \end{vmatrix} \frac{dT}{dy} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.2)$$

$$\Delta = \det \| A_{ij} \|$$

$$\vartheta_{si} = \begin{cases} \delta_{si} & \text{— символы Кронекера для } i=1, 2, \dots, N_r \\ -\nu_{sl} & \text{для } i=l=N_r+1, \dots, N \end{cases} \quad (s=1, 2, \dots, N_r) \quad (3.3)$$

Исключая из (1.6) напряженность электрического поля с помощью одного из этих соотношений, например, для электронов¹, которым припишем индекс $i = N = E$, а затем, используя (3.2), подставим в них выражения для молярных потоков диффу-

¹ Электроны будем относить к зависимым компонентам реакции — элементам.

зпи, получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_l}{dy} + \frac{Z_l x_l}{x_E} \frac{dx_E}{dy} = -\frac{1}{RT^2 \Delta} \left[\sum_{k=1}^N \Delta_{lk} (x_l \Delta_k - x_k \Delta_l) + \right. \\ \left. + \frac{Z_l x_l}{x_E} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_{Ek} (x_E \Delta_k - x_k \Delta_E) \right] \frac{dT}{dy} \quad (l = N_r + 2, \dots, N-1) \quad (3.4)$$

(для электронов $Z_E = -1$) которые совместно с алгебраическими уравнениями (1.4), (1.5), (2.1) и граничными условиями

$$c_i + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{si} \frac{m_l}{m_s} c_s = c_i^* \quad (l = N_r + 2, \dots, N-1) \quad \text{при } y = \delta \quad (3.5)$$

будут исходными для определения концентраций элементов $x_l (l = N_r + 2, \dots, N-1)$, а следовательно, и концентраций всех остальных компонент при заданном профиле температуры. Предполагая монотонное изменение температуры, очевидно, что система (1.4), (1.5), (2.1), (3.4) и (3.5) имеет решение в виде

$$x_i = x_i(p, T) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

Здесь давление играет роль параметра, так как оно не меняется поперек слоя. Сразу видно, что в таком виде состав определится из решения алгебраической системы уравнений (1.4), (1.5), (2.1) и задачи Коши

$$\frac{dx_l}{dT} + \frac{x_l Z_l}{x_E} \frac{dx_E}{dT} = -\frac{1}{RT^2 \Delta} \left[\sum_{k=1}^N \Delta_{lk} (x_l \Delta_k - x_k \Delta_l) + \right. \\ \left. + \frac{x_l Z_l}{x_E} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_{Ek} (x_E \Delta_k - x_k \Delta_E) \right] \quad (l = N_r + 2, \dots, N-1) \\ c_i + \sum_{s=1}^{M_n} \nu_{si} \frac{m_l}{m_s} c_s = c_i^* \quad (l = N_r + 2, \dots, N-1) \quad \text{при } T = T_\delta$$

Таким образом, определение состава в виде (3.6) является самостоятельной задачей, для решения которой необходимо дополнительно знать зависимость теплот реакций и бинарных коэффициентов диффузии от состава, температуры и давления.

Напряженность электрического поля определится формулой

$$E = -\frac{kT}{e} \left[\frac{1}{x_E} \frac{dx_E}{dT} + \frac{1}{x_E RT^2 \Delta} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_{Ek} (x_E \Delta_k - x_k \Delta_E) \right] \frac{dT}{dy}$$

4. Рассмотрим способ определения теплового потока. Используя (3.2), легко показать [1], что тепловой поток в направлении, перпендикулярном пластине

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} - \sum_{s=1}^{N_r} Q_s W_s = -\Lambda \frac{dT}{dy} = -(\lambda + \lambda_R) \frac{dT}{dy} \quad (4.1)$$

где Λ — коэффициент эффективной теплопроводности состоит из двух частей: λ — коэффициент теплопроводности за счет молекулярных соударений [2] и λ_R — коэффициент теплопроводности за счет химических реакций [1] (ионизация не вносит изменения в вид формулы); поэтому тепловой поток к нижней стенке

$$q_w = -\Lambda_w \frac{dT(0)}{dy}$$

Для его определения, как видно, необходимо дополнительно знать состав и значение производной от температуры на нижней пластине.

Предположим, что задача об определении состава в виде (3.6) уже решена. Тогда Λ в (4.1) будет известной функцией температуры и давления. Коэффициент вязкости при этом также будет известной функцией температуры и давления [2]. В уравнениях (1.2), (2.3) и (4.1) введем новую переменную ζ формулой

$$\zeta = \frac{1}{\xi(\delta)} \int_0^y \frac{dy'}{\mu}, \quad \xi(\delta) = \int_0^\delta \frac{dy}{\mu}$$

Тогда уравнения притока тепла и количества движения принимают вид

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} = 0, \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \frac{dT}{d\zeta} \right) + \left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 = 0$$

(уравнение (2.3) записано с учетом (4.1)). Интегрируя эту систему с условиями

$$u = 0, \quad T = T_w \quad \text{при } \zeta = 0; \quad u = U, \quad T = T_\delta \quad \text{при } \zeta = 1$$

находим

$$u = U\zeta, \quad \int_{T_w}^T \frac{\Lambda}{\mu} dT' + \frac{U^2}{2} \zeta^2 = -\frac{q_w U}{\tau_w} \zeta \quad (4.2)$$

где напряжение сдвига на нижней пластине

$$\tau_w = \mu_w \frac{du(0)}{dy} = \frac{U}{\xi(\delta)}, \quad -\frac{q_w U}{\tau_w} = \int_{T_w}^{T_\delta} \frac{\Lambda}{\mu} dT + \frac{U^2}{2} \quad (4.3)$$

Из последнего следует, что тепловой поток к нижней пластине зависит от возможного значения напряжения сдвига. Переход от переменной ζ к физической переменной y осуществляется с помощью преобразования

$$y = \xi(\delta) \int_0^\zeta \mu d\zeta' \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (4.4)$$

причем, полагая $\zeta = 1$, получим формулу для определения величины $\xi(\delta)$

$$\frac{1}{\xi(\delta)} = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \mu d\zeta$$

В этом интеграле удобно перейти к интегрированию по температуре с помощью (4.2) и (4.3). Однако при этом необходимо учитывать возможность существования в потоке значения температуры, превосходящие значения температуры стенок, т. е. возможность существования внутри пограничного слоя $\max T$. Критерий существования $\max T$ очевиден

$$\int_{T_w}^{T_\delta} \frac{\Lambda}{\mu} dT \leq \frac{U^2}{2}$$

С помощью аналогичных соображений может быть произведен пересчет от переменной ζ к переменной y по формуле (4.4). Задача доводится до конца.

5. В качестве примера рассмотрим равновесное течение Куэтта плазмы, состоящей из трех компонент: n -кратно ионизованных атомов (I_n), $n+1$ -кратно ионизованных атомов (I_{n+1}) и электронов (e). Пусть в потоке протекает реакция:

$$I_n = I_{n+1} + e - Q_n$$

Задача определения состава в виде (3.6) сводится к решению системы алгебраических уравнений:

1) равновесия (формула Саха)

$$\frac{x_{n+1} x_E}{x_n} = \frac{K_{pn}(T)}{p} \quad (5.1)$$

2) условия электрической нейтральности

$$n x_n + (n+1) x_{n+1} - x_E = 0 \quad (Z_n = n, Z_{n+1} = n+1) \quad (5.2)$$

3) тождества

$$x_n + x_{n+1} + x_E = 1 \quad (5.3)$$

В соответствии с (3.2), (3.3) и (4.1) для рассматриваемой смеси молярные потоки диффузии

$$W_n = -W_{n+1} = -W_E = \frac{1}{RT^2} \frac{Q_n}{A_{nn}} \frac{dT}{dy}$$

а коэффициент эффективной теплопроводности

$$\Lambda = \lambda + \frac{1}{RT^2} \frac{Q_n^2}{A_{nn}}$$

Далее, если ввести массовые концентрации, то, используя формулы работы [1] для вычисления коэффициента $A_{n,n}$ совместно с уравнениями (5.2), (5.3) и логарифмической производной от уравнения равновесия (5.1), нетрудно показать, что

$$W_n = -\frac{\rho D_a}{m_n} \frac{dc_n}{dy}, \quad W_{n+1} = -\frac{\rho D_a}{m_{n+1}} \frac{dc_{n+1}}{dy}, \quad W_E = -\frac{\rho D_a}{m_E} \frac{dc_E}{dy}$$

$$\Lambda = \lambda - \rho D_a \frac{Q_n}{m_n} \frac{dc_n}{dT} \quad \text{или} \quad \Lambda = \lambda \left(1 - \frac{L_a}{c_p} \frac{Q_n}{m_n} \frac{dc_n}{dT} \right) \quad (5.4)$$

где обобщенные амбиполярный коэффициент диффузии и число Льюиса

$$\frac{1}{D_a} = \frac{\gamma_n}{\gamma D_{n+1 E}} + \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma D_{n E}} + \frac{\gamma_E}{\gamma D_{n n+1}}, \quad L_a = \frac{\rho D_a c_p}{\lambda}$$

$$\gamma_n = x_n n^2, \quad \gamma_{n+1} = x_{n+1} (n+1)^2, \quad \gamma_F = x_E, \quad \gamma = \gamma_n + \gamma_{n+1} + \gamma_E$$

$$c_p = c_n c_{p n+1} + c_{n+1} c_{p n+1} + c_E c_{p E}$$

удельная теплоемкость при постоянном давлении «замороженной» смеси.
Если ввести удельную энтальпию смеси

$$h = c_n h_n + c_{n+1} h_{n+1} + c_E h_E$$

то нетрудно показать, что

$$dh = (c_p + c_{pR}) dt = C_p dT \quad (5.5)$$

где эффективная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = c_p + c_{pR} = c_p - \frac{Q_n}{m_n} \frac{dc_n}{dT} \quad (5.6)$$

так же как и эффективная теплопроводность, может быть значительно большей, чем в замороженных смесях рассматриваемого типа.

Используя (5.6), из (5.4) получим простое выражение для эффективного коэффициента теплопроводности

$$\Lambda = \lambda [1 + L_a (C_p / c_p - 1)]$$

Отношение потока тепла к напряжению сдвига на нижней стенке с учетом (5.4) — (5.6) определяется из (4.3)

$$\int_{h_w}^{h_8} \frac{1}{\sigma} \left[1 - (L_a - 1) \frac{Q_n}{m_n} \frac{dc_n}{dh} \right] dh + \frac{U^2}{2} = -\frac{q_w U}{\tau_w}$$

Полагая в этом выражении постоянными числа Прандтля и Льюиса, получим приближенную формулу

$$h_8 - h_w - (L_a - 1) \int_{c_{nw}}^{c_{n8}} \frac{Q_n}{m_n} dc_n + \frac{\sigma U^2}{2} = -\frac{\sigma q_w U}{\tau_w}$$

Для замороженной смеси при тех же предположениях аналогичное соотношение имеет вид

$$h_8 - h_w + (L_a - 1) \frac{Q_{nw}}{m_n} (c_{nw} - c_{n8}) + \frac{\sigma U^2}{2} = -\frac{\sigma q_w U}{\tau_w}$$

Сравнение этих формул показывает, что при химическом равновесии отношение потока тепла к напряжению сдвига на нижней стенке может быть заметно больше, чем в замороженной смеси.

В заключение автор благодарит Г. А. Тирского за предложенную тему и указания, сделанные в процессе работы.

Поступило 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Батлер Н., Брокер Р. Теплопроводность газовых смесей при химическом равновесии. Сб. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. М., Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 378.
2. Гиршфельдер Дж., Кергисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойной кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.