растворов связано с наличием частиц-ассоциатов. Обращает на себя внимание аналогия с воздействием взвешенных частиц на инерционные турбулентные вихри ядра потока в трубе. Бобковичем и Говеном, исследовавшими снижение сопротивления трения при движении в трубах суспензий частиц, было показано [4], что при движении в трубах неконцентрированных суспензий найлоновых нитей в ядре потока имеется заметное увеличение турбулентного перемешивания.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта за внимание к работе, В. В. Тихомирова за помощь при изготовлении установки.

Поступило 9 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. White D. A. Velocity measurements in axisymmetric jets of dilute polymer solutions, J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt. 1.
2. Gadd G. E. Reduction of turbulent friction in liquids by dissolved additives. Nature, 1966, vol. 212, No. 5065.
3. Баренблатт Г. И., Калашников В. Н. О влиянии надмолекулярных образований в разбавленных растворах полимеров на турбулентность. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
4. Bobkowicz A. J., Gauvin W. H. The effects of turbulence on the flow characteristics of model fibre suspensions. Chem. Engng. Sci., 1967, vol. 22, No. 2.

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ КОМПОНЕНТ В ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

Ю. Т. БОРЩЕВСКИЙ, А. М. КОЛОДИН

(*Винница*)

Пусть в равномерном турбулентном потоке имеется источник твердых частиц шарообразной формы, которые поступают в поток со скоростью, меньшей продольной скорости течения. Очевидно, что из-за торможения частицами потока ниже источника образуется своеобразный турбулентный двухфазный след. Поставим задачу оценить корреляционные моменты $\langle v_{lk}'s_l'\rangle$ (где s_l' — пульсация объемной концентрации, а v_{lk}' — пульсационная скорость вдоль оси x_k), символизирующие диффузию частиц l-й компоненты (при $l=1$ — жидкой, при $l=2$ — твердой), основываясь на теории движения двухфазных потоков [1]. При этом за исходные примем уравнения энергии турбулентных пульсаций компонент двухфазного потока, приведенные в работе [2].

Пусть двухфазный турбулентный след имеет ось симметрии x_1; жидкость несжимаема; массовые силы, действующие на жидкость, малы; турбулентность однородна.

Если пренебречь членами, включающими поперечные скорости, и производными $\partial(\ldots)/\partial x_1$ от осредненных величин, то баланс энергии, например, турбулентных пульсаций жидкой компоненты такого потока v_3', направленных вдоль поперечной оси x_3 (индекс 1 опускаем), опишется уравнением

$$s\left\langle p'\frac{\partial v_3'}{\partial x_3}\right\rangle-\mu s\left[\left\langle\left(\frac{\partial v_3'}{\partial x_1}\right)^2\right\rangle+\left\langle\left(\frac{\partial v_3'}{\partial x_1}\right)\right\rangle^2\right]+p\left\langle s'\frac{\partial v_3'}{\partial x_3}\right\rangle-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_3}\left[s\langle v_3'p'\rangle-\mu s\frac{\partial e_3}{\partial x_3}+\rho s\langle e'v_3'\rangle\right]+\rho\langle s'v_3'\rangle\frac{\partial e_3}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_3}\langle s'v_3'\rangle p=\Phi_3$$
$$\left(e_3=\left\langle\frac{v_3'^2}{2}\right\rangle\right) \tag{1}$$

Здесь s — объемная концентрация жидкости, ρ — массовая плотность, p — статическое давление, μ — вязкость жидкости, Φ_3 — работа сил взаимодействия, возникающих из-за отставания тяжелых частиц от жидких при перемешивании компонент. Штрихами в (1) отмечены пульсации соответствующих величин, а скоба является знаком осреднения.

В соответствии с работами [3, 4] в (1) можно сделать замену, позволяющую ввести величины, которые могут быть получены непосредственными измерениями

$$\left\langle p'\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}\right\rangle=-\operatorname{const}(4e_i-2q) \tag{2}$$

$$\left\langle\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle=\operatorname{const}\left[\frac{e_i}{L^2}+\frac{\operatorname{const}}{3\mu L}q^{3/2}\right]=c_i^*\varepsilon_i \tag{3}$$
$$(q=e_1+e_2+e_3,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

Здесь L — масштаб турбулентности, ε_i — вязкая диссипация энергии турбулентных пульсаций, направленных вдоль x_i.

Выражение, входящее во вторые квадратные скобки (1), характеризует интенсивность диффузионного переноса энергии пульсаций v_3' в поперечном направлении за счет вязкости, пульсаций давления и турбулентности, т. е.

$$D_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\left[s\langle v_3' p'\rangle - \mu s \frac{\partial l_3}{\partial x_3} + \rho s\langle e_3' v_3'\rangle\right] \tag{4}$$

Что касается величин $\langle s'\partial v_3' / \partial x_3\rangle$ и Φ_3, входящих в (1), то их оценка затруднительна. Поэтому представим (1) в следующем виде:

$$c_3(2q - 4e_3) - c_3^*\varepsilon_3 + D_3 - p\left\langle s'\frac{\partial v_3'}{\partial x_3}\right\rangle - \rho\langle s'v_3'\rangle\frac{\partial e_3}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\langle s'v_3'\rangle p - \Phi_3 = 0 \tag{5}$$

Аналогично нетрудно преобразовать уравнение баланса энергии продольных пульсаций v_1'. Запишем это уравнение сразу в окончательном виде

$$-\rho s\langle v_1' v_3'\rangle\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + c_1(2q - 4e_1) - c_1^*\varepsilon_1 + D_1 -$$
$$- p\left\langle s'\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\right\rangle - \rho\langle s'v_3'\rangle\frac{\partial e_1}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\langle s'v_1'\rangle p - \Phi_1 = 0 \tag{6}$$

Здесь Φ_1 — работа сил взаимодействия компонент вдоль x, v_1 — продольная осредненная скорость жидкости.

При выводе (6) предполагалось, что диффузия D_1 энергии пульсаций v_1' в поперечном направлении определяется соотношением

$$D_1 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\left(s\langle v_1' p'\rangle - \mu s\frac{\partial e_1}{\partial x_3} + \rho s\langle e_1' v_3'\rangle\right) \tag{7}$$

а диссипация энергии — выражением (3).

Известно [3], что при турбулентном перемешивании тяжелые частицы примесей отстают от жидких, причем относительное отставание увеличивается с повышением частоты турбулентных пульсаций жидкости. В силу этого большая часть турбулентной энергии, переходящей в тепло за счет работы сил взаимодействия компонент, будет приходиться на долю высокочастотных пульсаций.

Предположим, что микротурбулентность рассматриваемого потока обладает свойствами изотропности. Тогда с достаточной точностью можно считать, что работа сил давления и сил взаимодействия на микроперемешивание вдоль осей x_3 и x_1 одинакова, т. е.

$$p\left\langle s'\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\right\rangle \approx p\left\langle s'\frac{\partial v_3'}{\partial x_3}\right\rangle, \qquad \Phi_1 \approx \Phi_3 \tag{8}$$

Определяя эти величины из выражений (5) и (6), получим

$$-\rho s\langle v_1' v_3'\rangle\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + c_1(2q - 4e_1) - c_1^*\varepsilon_1 + c_3^*\varepsilon_3 + D_3 + D_1 - c_3(2q - 4e_3) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_3}\langle s'v_3'\rangle p + \frac{\partial}{\partial x_1}\langle s'v_1'\rangle p \tag{9}$$

Если использовать уравнение движения двухфазного потока вдоль поперечной оси x_3, то, следуя работе [1], придем к заключению, что движение жидкости в рассматриваемом турбулентном следе обусловливается давлениями, имеющими порядок $p \sim \rho s\langle v_3'^2\rangle$, поэтому правая часть (9) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\langle s'v_3'\rangle p - \frac{\partial}{\partial x_1}\langle s'v_1'\rangle p \approx \langle s'v_3'\rangle\frac{\partial p}{\partial x_3} \tag{10}$$

В результате для момента корреляции $\langle s'v_3'\rangle$ находим следующее выражение:

$$\overline{s'v_3'} = \frac{-\rho s\langle v_1' v_3'\rangle \partial v_1 / \partial x_3 + f}{-\partial p / \partial x_3} \tag{11}$$

устанавливающее зависимость $\overline{c'v_3'}$ от турбулентных напряжений и скорости. В (11) введено обозначение

$$f = c_1(2q - 4e_1) - c_1^*\varepsilon_1 + D_1 - c_3(2q - 4e_3) + c_3^*\varepsilon_3 - D_3$$

В случае однородной турбулентности, по-видимому, можно предполагать, что в (2) и (3) постоянные c_1, c_3 и, соответственно, c_1^* и c_3^* близки по значению. По оценке Г. С. Глушко [5], D_3 является малой величиной. Если D_1 и D_3 имеют один порядок, то функция f будет незначительной по сравнению с первым членом числителя правой части (11). В соответствии с физическим смыслом $\langle s_1'v_{1k}'\rangle = -\langle s_2'v_{2k}'\rangle$, поэтому в потоке со сдвигом моменты $\langle s_l'v_{lk}'\rangle$, символизирующие турбулентную диффузию компонент, определяются преимущественно интенсивностью порождения турбулентности, т. е. величиной $-\rho s\langle v_1'v_3'\rangle\partial v_1 / \partial x_3$.

Если же поперечный сдвиг отсутствует и корреляция Рейнольдса равна нулю, то, как и следовало ожидать, распространение частиц примесей в поперечном направлении возможно только за счет диффузионного турбулентного энергообмена.

Воспользуемся формулой из работы [6]

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \alpha v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{12}$$

где α — некоторая функция.

Выражение (11) можно представить в таком приближенном виде

$$\langle s'v_3'\rangle \approx \frac{-\rho s\langle v_1'v_3'\rangle}{\alpha v_1} \tag{13}$$

Оказалось, что формула (13) структурно очень похожа на соответствующую формулу, установленную опытным путем в работе [7] и имеющую вид

$$\langle s'v_k'\rangle = \frac{s_2\langle v_1'v_k'\rangle}{v_0} \tag{14}$$

где v_0 — характерная скорость.

Имея в виду, что $s = 1 - s_2$, в соответствии с диффузионными теориями [3] можем записать

$$-\langle s'v_3'\rangle = \nu_D \frac{\partial s}{\partial x_3} = -\nu_D \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \tag{15}$$

где ν_D — коэффициент (в общем случае это тензор) турбулентной диффузии масс компонент.

Если в (13) по аналогии с (14) знаменатель может изменяться незначительно, то окажется, что закономерности изменения производной $\partial s_2 / \partial x_3$ по сечению потока будут идентичными характеру изменения корреляции Рейнольдса. Это обстоятельство свидетельствует о том, что максимум концентрации примесей может находиться на некотором удалении от дна. Из броуновской модели диффузии песчинок удаление максимума концентрации от дна не вытекает.

При отсутствии фазовых превращений диффузионные потоки масс компонент удовлетворяют следующим уравнениям неразрывности:

$$\frac{\partial\langle s_l'v_{lk}'\rangle}{\partial x_k} = 0 \quad (l = 1, 2) \tag{16}$$

причем для жидкой компоненты плоского течения $s' < 0$ при $v_3' > 0$, в силу чего $\langle s'v_3'\rangle < 0$ и $\langle s'v_1'\rangle > 0$.

Уравнение (16) предполагает существование в области двухфазного течения периодических возрастаний и затуханий интенсивности турбулентности. Предварительные термоанемометрические записи при изучении воздушнопесчаных струй действительно обнаружили появление крупномасштабных возмущений типа биений.

В заключение необходимо отметить, что турбулентная диффузия частиц компонент вблизи твердых границ потока существенно зависит еще от вязкости и возрастающего эффекта присоединений масс, переносимых потоками частиц примесей. Учет этих факторов сопряжен со значительными математическими трудностями.

Поступило 19 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюнин А. К., Борщевский Ю. Т., Яковлев Н. А. Основы механики многокомпонентных потоков, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1965.
2. Борщевский Ю. Т., Лебедев О. Н. Дифференциальные уравнения энергии многокомпонентной смеси. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., 1967, вып. 26.
3. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
4. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
5. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. Механика, 1965, № 4.
6. Дюнин А. К. Механика метелей. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963.
7. Яковлев Н. А., Борщевский Ю. Т. Некоторые задачи движения двухфазных потоков. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., 1965, вып. 20.