

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Т. С. ВАРЖАНСКАЯ

(Москва)

При решении разностными методами уравнений Навье — Стокса в неограниченных областях возникает вопрос о приближенных граничных условиях на тех частях границы расчетной области, где эти условия не определяются непосредственно постановкой исходной задачи. В некоторых практически важных случаях такие граничные условия можно получить с помощью сопряжения уравнений Навье — Стокса с уравнениями, близкими к уравнениям пограничного слоя.

В данной работе предлагаются граничные условия в случае течения вязкой несжимаемой жидкости. Применение их иллюстрируется на задаче обтекания передней кромки полубесконечной пластины.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности передней кромки пластины. Это течение было ранее изучено в работах [1, 2]. В области Q_1 (фиг. 1) около передней кромки пластины ($x \geq 0$) решается уравнение Навье — Стокса

$$\nu \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Пользуясь симметрией потока, можно ограничиться рассмотрением полуплоскости $y > 0$, полагая $\psi(x, y) = -\psi(x, y)$.

Область Q_2 расположена вблизи стенки вниз по потоку на достаточно далеком расстоянии от передней кромки, так что отношения продольных градиентов параметров потока к поперечным являются величинами порядка $N_{Re}^{-1/2}$.

Тогда в Q_2 течение может быть описано уравнениями типа уравнений пограничного слоя.

Γ — граница области Q_2 , которую для простоты можно считать координатной линией $x = \text{const}$. Согласно методу, предложенному в работе [3], на границе Γ областей Q_1 и Q_2 следует задать условия гладкого сопряжения решений уравнений Навье — Стокса и уравнений пограничного слоя.

Число условий гладкого сопряжения равно сумме числа граничных условий, которые требуется задать на Γ для решения соответствующих уравнений в Q_1 и Q_2 . Для решения уравнения Навье — Стокса в Q_1 на Γ требуется задать два граничных условия. Для решения уравнения пограничного слоя в Q_2 на Γ необходимо задать одно граничное условие. Таким образом, чтобы получить решение $Q_1 + Q_2$ нужно знать на границе Γ три неизвестные функции. Для их определения необходимо задать три условия гладкого сопряжения. Первое — это непрерывность функции тока ψ на Γ . В качестве двух других можно взять непрерывность первой ψ_x и второй ψ_{xx} производных функции тока по нормали к границе Γ . Следствием непрерывности функций ψ , ψ_x , ψ_{xx} является непрерывность на Γ левых частей уравнений (1.2) и (1.3)

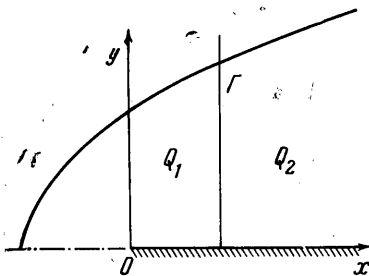
$$\nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nu \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} = 0 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) есть уравнение пограничного слоя, продифференцированное по y . Аналогичное уравнение рассматривается при расчете начального участка в трубе на достаточно больших расстояниях от входного сечения вдоль оси трубы [4].

Уравнение (1.2) отличается от уравнения (1.1) членами порядка $O(\varepsilon)$. Уравнение (1.3) получено из (1.2) дифференцированием по x . Согласно выбору граничных условий, уравнения (1.2) и (1.3) удовлетворяются справа от Γ . Вследствие непрерывности уравнения (1.2) и (1.3) удовлетворяются в точках границы Γ и могут служить граничными условиями для уравнения (1.1).

В качестве примеров, в которых могут быть использованы полученные граничные условия, можно привести задачи течения в полубесконечном канале, обтекания тела (конечного или бесконечного). Отметим еще работу [5], в которой для замыкания уравнений Навье — Стокса на бесконечности вниз по потоку используются асимптотические уравнения, полученные методом линеаризации уравнений Навье — Стокса относительно равномерного потока.



Фиг. 1

2. В работах [1, 2] задача обтекания плоской полубесконечной пластины в безразмерных параболических координатах ξ, η (см. [1]) сводилась к решению уравнения

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t_i} = \Delta' \left(\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Delta \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Delta \psi \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Delta \psi \right) \quad (2.1)$$

методом установления. Расчетная область $K(a, b) \{0 \leq \xi \leq a; 0 \leq \eta \leq b\}$ имела вид квадрата ($b = a$). Сторона $\eta = 0$ соответствует пластине; условия прилипания приводят к граничным условиям $\psi = 0, \partial \psi / \partial \eta = 0$ при $\eta = 0$. На стороне квадрата $\xi = 0$ используется условие симметрии. На стороне $\eta = a$ задавались значения функции тока: $\psi = 2\xi\eta$, что соответствует невозмущенному набегающему потоку. Граничные условия на стороне $\xi = a$ при $a = 20$ в работах [1, 2] определялись приближенно; погрешность, связанная с приближенным заданием граничных условий, затухает при приближении к передней кромке, и в квадрате $K(a, a), a = 10$, как показано в [1, 2] не превышает по-видимому 1%.

В качестве граничных условий при $\xi = a$ были использованы соотношения

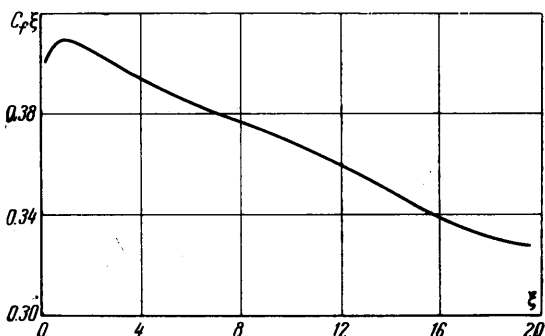
$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial t} &= \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \\ -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi / \partial \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Они получаются из уравнения (2.1) при помощи рассуждений, аналогичных выводу уравнений (1.2) и (1.3) из уравнения (1.1).

Граничные условия (2.2) и (2.3) аппроксимировались в разностях следующим образом. На линии $\xi = a - h$, где h — шаг сетки, уравнение (2.2) аппроксимировалось по явной разностной схеме

(производные по ξ с погрешностью первого порядка точности относительно h — односторонним образом; производные по η с погрешностью второго порядка точности относительно h — по симметричной разностной схеме). На линии $\xi = a$ уравнение (2.2) аппроксимировалось точно так же, что соответствует аппроксимации уравнения (2.3) с погрешностью первого порядка точности относительно h по ξ . При счете был получен сходящийся итерационный процесс. Использование граничных условий (2.2) и (2.3) обеспечивает непрерывное смыкание граничных значений на стыке верхней и правой границ. В данной работе расчеты проводились для областей $K(20, 20), K(20, 5), K(10, 10)$. Основной расчетной областью являлась область $K(20, 5), h = 0,25$. Граничные значения при $\eta = 5$ были взяты из расчетов в области $K(20, 20), h = 0,5$. По полученным результатам вычислялась величина



Фиг. 2

характеризующая напряжение трения на пластине. На фиг. 2 приведены графики величины $c_f \xi$ на пластине в области изменения ξ от 0 до 19,5 ($Re = 380,25$). Вблизи правой границы кривая постепенно выходит на постоянное значение, равное 0,329. Отметим, что предельное значение, вычисленное по решению Блазлуса, равно 0,332. При сравнении продольной составляющей скорости u с решением Блазлуса максимальное относительное расхождение на отрезке $17,5 \leq \xi \leq 19,5$ не превышало 2,2%. Расчет, $K(10, 10)$, был проведен с целью выяснить, возможно ли перенести граничные условия (2.2), (2.3) вверх по потоку. Оказалось, что полученные значения приведенного коэффициента трения в трех знаках совпадают со значениями, полученными в работе [2] при $0 \leq \xi \leq 8,5$. По значениям функции тока совпадение еще лучше.

Автор приносит благодарность И. Ю. Браиловской и Л. А. Чудову за полезные указания в ходе выполнения данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варжанская Т. С., Чудов Л. А. Плоское течение вязкой несжимаемой жидкости вблизи острой передней кромки пластины при нулевом угле атаки, I. Вычислительные методы и программирование. Сб. работ ВЦ МГУ, 1967, вып. 7.
2. Варжанская Т. С., Чудов Л. А. Плоское течение вязкой несжимаемой жидкости вблизи острой передней кромки пластины при нулевом угле атаки, II. Вычислительные методы и программирование. Сб. работ ВЦ МГУ, 1968, вып. 11.
3. Браиловская И. Ю. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 8.
4. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
5. Варапаев В. В. Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.

НЕРАВНОВЕСНЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ВОЗДУХА НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛАХ

В. Г. ВОРОНКИН, Л. К. ГЕРАСКИНА (Москва)

Приводится метод, а также результаты численных расчетов неравновесного ламинарного пограничного слоя на осесимметричных телах, поверхность которых обладает произвольной каталитической активностью. В опубликованных работах, посвященных точным численным методам расчета пограничного слоя с химическими реакциями, предполагается, что либо поверхность тела является некаталитической, либо она обладает бесконечно большой каталитической активностью [1], либо на поверхности имеется термохимическое равновесие [2], либо заданы температура и состав газа на поверхности [3, 4]. В ряде работ, в частности в [5], эта задача рассмотрена в приближенной постановке.

1. Уравнения неравновесного ламинарного пограничного слоя в случае многокомпонентной смеси газов имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial(\rho u r_w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r_w)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} &= -\frac{\partial K_i}{\partial y} + W_i & (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n H_i K_i \right)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{D_{ij}} (V_j - V_i) = \frac{\partial x_i}{\partial y} \quad (i=1, \dots, n-1), \quad \sum_{i=1}^n K_i = 0$$

$$P = \rho \frac{R_a T}{M}, \quad H = \sum_{i=1}^n c_i H_i, \quad K_i = \rho c_i V_i$$

Здесь c_i — массовые концентрации, x_i — молярные концентрации, H_i — энтальпия i -й компоненты с учетом теплоты образования, H — энтальпия смеси, W_i — функция химического источника, K_i — массовый поток i -й компоненты, V_i — соответствующая диффузионная скорость, D_{ij} — коэффициент бинарной диффузии, M — молекулярный вес смеси, R_a — абсолютная газовая постоянная. Остальные обозначения общеприняты.

Предполагается, что диссоциированный воздух состоит из пяти компонентов: O, N, NO, O₂, N₂. Нумерация производится в порядке их перечисления. Одно из пяти уравнений для концентраций c_i системы (1.1) можно заменить тождеством

$$c_1 + \dots + c_n = 1$$

а другое — уравнением сохранения массы кислорода как элемента при химических превращениях

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 + \frac{M_1}{M_3} c_3 + c_4 \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(c_1 + \frac{M_1}{M_3} c_3 + c_4 \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(K_1 + \frac{M_1}{M_3} K_3 + K_4 \right)$$