Следовательно, решение поставленной выше задачи можно в этом случае искать в виде

$$u = \xi^\lambda \varphi(\tau), \qquad \tau = -\eta / \xi \tag{10}$$

Подстановка в (2) приводит к гипергеометрическому уравнению для функции $\varphi(\tau)$, общее решение которого можно записать в форме

$$u(\xi, \eta) = \xi^\lambda [C_1 F(-m, -\lambda; 1 + m - \lambda; \tau) + \\ + C_2 F(\lambda - 2m, -m; 1 - m + \lambda; x) |\tau|^{\lambda - m}] \tag{11}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные (они определяются из (9)). Используя некоторые свойства гипергеометрических функций, можно получить из (1) и (4) в явном виде нужные параметры p, ρ, t и x. Далее, в рассматриваемом случае параметр ψ_0 не является существенным, и движение определяется двумя постоянными параметрами a и b

$$a = A^{1/2\gamma}, \qquad b = A^{1/2\gamma} B^{-1/(1-\sigma)}$$

$$[a] = ML^{(1-3\gamma)/2\gamma} T^{-1/\gamma}, \ [b] = L^r T^{-1/\gamma}, \ r = \frac{3\gamma + 1 - \sigma(\gamma + 1)}{2\gamma(1 - \sigma)}$$

Таким образом, рассматриваемое движение будет автомодельным, и имеем следующий результат (который формулируем, пользуясь обозначениями, употребляемыми в книге Л. И. Седова [3]): в случае, когда $k = (1 - 3\gamma) / 2\gamma$, $n = s = -1 / \gamma$, $\nu = 1$ и m — произвольно ($m \neq 0$, $m \neq {}^1/_2\gamma$), общее решение основного в теории одномерных автомодельных движений уравнения выражается в параметрическом виде через гипергеометрические функции.

Поступило 26 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. ДАН СССР, 1954, т. 96, № 3.
2. Ludford G. S. S., Martin M. H. One — dimensional anisentropic flows. Cummuns Pure Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 1.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
4. Ludford G. S. S. Two topicsin one — dimensional gas dynamics. Studies in mathematics and mechanies (presented to R. von Mises by friends, Colleagucs and Pupils), N. Y., Acad. Press Inc., 1954.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ПЛОСКИХ ТЕЛ ПО ПОЛУЧЕННОМУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ПОЛЮ ПЛОТНОСТИ

Л. В. КАРЧЕВСКИЙ

(*Москва*)

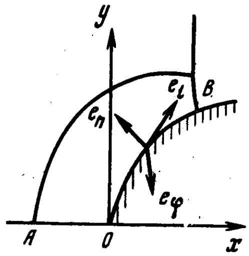
Рассмотрена задача об определении параметров течения на известной поверхности тока в общем случае осесимметричного или плоского нестационарного течения идеального газа, если в малой окрестности этой поверхности задана плотность как функция координат и времени. В общем случае задача сводится к решению системы из двух квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Для стационарных течений решение выписывается в конечных соотношениях, для автомодельных — задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Класс задач, в котором решение может быть найдено, и область в плоскости независимых переменных, где оно может быть получено, определяются из требования задания граничных условий на рассматриваемой линии тока.

Приближенное решение задачи об определении параметров течения по полученному экспериментально полю плотности при сверхзвуковом стационарном обтекании с плоской и осевой симметрией приведено в работе [1]. Применительно к пространственному стационарному обтеканию тел решением этой проблемы занимались С. М. Белоцерковский, В. С. Сухоруких и В. С. Татаренчик. В работе [2] определялось давление на поверхности некоторых плоских тел при дифракции на них ударной волны в предположении об изэнтропичности течения.

В данной работе показано, что поставленная задача в общем случае нестационарного течения идеального газа может быть решена сравнительно просто в точной постановке, если ограничиться определением параметров течения на поверхности обтекаемых тел.

1. Ограничимся рассмотрением осесимметричных и плоских течений. Пусть в малой окрестности известной поверхности тока задана плотность как функция координат и времени. Интересным частным случаем такой поверхности является поверхность обтекаемого тела, на которой нет отрыва [1].

Выпишем уравнения, описывающие движение идеального газа на поверхности тока, форма которой задана уравнением $y = f_1(x)$. Предварительно введем криволинейные координаты: длину дуги l сечения поверхности тока плоскостью xoy (фигура), координату по направлению нормали к поверхности n и угол φ; в плоском случае вместо угла φ вводится декартовая координата z. Уравнения сохранения энергии, импульса и массы идеального газа в криволинейной системе координат имеют вид



$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{v_i}{H_i}\frac{\partial s}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{v_i}{H_i}\frac{\partial v_j}{\partial q_i} + \frac{1}{\rho H_j}\frac{\partial p}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_l H_n H_\varphi}\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho v_i H_j H_k) \tag{1.1}$$

к этим уравнениям следует добавить уравнение состояния

$$p = \psi(\rho, s) \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) индексы i, j, k пробегают значения l, n, φ; обобщенная координата q_i принимает также значения l, n, φ соответственно; по повторяющемуся индексу при q и v производится суммирование; в третьем уравнении индексы i, j, k изменяются по правилу циклической перестановки; для плотности, скорости, энтропии и давления использованы общепринятые обозначения ρ, v, s и p.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \frac{Dt}{l'}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l'}, \quad \bar{n} = \frac{n}{l'}, \quad \bar{v} = \frac{v}{D}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p'}, \quad \bar{s} = \frac{s - s'}{c_v}, \quad \bar{f} = \frac{f(l)}{l'}$$

$$\bar{c}^2 = \frac{1}{D^2}\frac{p'}{\rho'}, \quad \bar{\psi}_{\bar{s}} = \frac{c_v}{p'}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \bar{\psi}_{\bar{\rho}} = \frac{\rho'}{p'}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$$

Здесь l', D, ρ', s', p' — характерные параметры с размерностями длины, скорости, плотности, энтропии и давления; c_v — теплоемкость при постоянном объеме. В дальнейшем черта над безразмерными переменными опускается.

При осесимметричном обтекании коэффициенты Лямэ равны $H_l = H_n \equiv 1$, $H_\varphi = f_1(x) = f(l)$; в плоских течениях $H_l = H_n = H_z \equiv 1$.

Для частиц, движущихся по поверхности тока, выполняются условия

$$v_n \equiv 0, \qquad v_\varphi = v_z \equiv 0, \qquad \frac{\partial(\ldots)}{\partial \varphi} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial z} \equiv 0 \tag{1.3}$$

С учетом выражений для коэффициентов Лямэ, уравнения (1.2) и условий (1.3) систему (1.1) в осесимметричном случае после введения безразмерных переменных можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial s}{\partial \tau} + v_l\frac{\partial s}{\partial l} = 0 \\
\frac{\partial v_l}{\partial \tau} + v_l\frac{\partial v_l}{\partial l} + \frac{\psi_s c^2}{\rho}\frac{\partial s}{\partial l} + \frac{\psi_\rho c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial l} = 0 \\
\frac{\partial s}{\partial n} + \frac{\psi_\rho}{\psi_s}\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial n} = 0\right) \\
\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial l}(v_l \rho f) + \rho\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0
\end{gathered} \tag{1.4}$$

[1] Рассматривается течение идеального газа, поэтому плотность в эксперименте следует определять на поверхности пограничного слоя.

Система уравнений (1.4) применима и в плоском случае, если в последнем уравнении положить $f \equiv 1$.

Полученные уравнения описывают движение и состояние газа на известной линии тока. Для определения неизвестных функций s, v_l, $\partial s / \partial n$ и $\partial v_n / \partial n$ имеется четыре уравнения. Искомые функции $\partial s / \partial n$ и $\partial v_n / \partial n$ входят только в третье и четвертое уравнения, поэтому решение системы из первого и второго уравнения можно искать независимо. Задача сводится к решению системы из первого и второго уравнений (1.4) с начальными и граничными условиями для скорости v_l и энтропии s. После определения функций v_l и s величины $\partial s / \partial n$ и $\partial v_n / \partial n$ могут быть получены из третьего и четвертого уравнений (1.4). Термодинамические параметры в пограничном слое могут быть определены из соответствующего состояния, по полученному значению давления на поверхности пограничного слоя и известной плотности.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных видов течений.

2. В стационарном случае система уравнений (1.4) легко интегрируется, решение ее можно записать в виде

$$s = \mathrm{const}, \qquad v_l = \sqrt{2}\, c\,(i^* - i)^{1/2}$$
$$\frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{\psi_\rho}{\psi_s}\frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = v_l\left(\frac{\psi_\rho c^2}{v_l^2 \rho}\frac{\partial \rho}{\partial l} - \frac{\partial \ln \rho f}{\partial l}\right)$$

Здесь i — энтальпия, отнесенная к p' / ρ', i^* — энтальпия торможения в потоке на оси симметрии [1].

Второй интеграл в (2.1) есть уравнение Бернулли. Константа в первом уравнении определяется из краевого условия для энтропии на линии тока. При дозвуковом обтекании она равна энтропии на этой линии тока в невозмущенном потоке на бесконечности, а в сверхзвуковых течениях при наличии скачка уплотнения — энтропии на линии тока за разрывом. Давление и остальные представляющие интерес термодинамические параметры могут быть определены из уравнения состояния (1.2) и из известных термодинамических соотношений.

Используя выражения (2.1), (1.2) и необходимые зависимости из термодинамики, можно определить на поверхности тока все интересующие нас параметры состояния, скорость газа и их производные по l и n [2]. Недостающая производная $\partial v_l / \partial n$ в случае, когда невозмущенный поток однороден ($\partial i^* / \partial n = 0$), может быть определена путем дифференцирования второго уравнения в (2.1) по n

$$\frac{\partial v_l}{\partial n} = -\frac{c}{\sqrt{2}}(i^* - i)^{-1/2}\left(\frac{\partial i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial n} + \frac{\partial i}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n}\right) \tag{2.2}$$

В заключение выпишем решение для совершенного газа. Если в качестве характерных параметров выбрать параметры невозмущенного потока при отсутствии разрыва и параметры за скачком уплотнения при наличии его, то из (2.1), (2.2) и (1.2) следует:

$$s = 0, \qquad p = \rho^\gamma, \qquad v_l = \sqrt{2}\, c\left(i^* - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1}\right)^{1/2}$$
$$\frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = v_l\left(\frac{\gamma c^2 \rho^{\gamma-2}}{v_l^2}\frac{\partial \rho}{\partial l} - \frac{\partial \ln \rho f}{\partial l}\right)$$
$$\frac{\partial v_l}{\partial n} = \frac{\gamma c}{\sqrt{2}(\gamma - 1)}\rho^{\gamma-2}\left(i^* - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1}\right)^{-1/2}\frac{\partial \rho}{\partial n}$$

---

[1] Невозмущенный поток может быть и неоднородным, но должен обладать осевой симметрией, в плоском случае — плоской симметрией.

[2] После определения формы струйки тока с заданной толщиной в некотором сечении, процесс определения параметров может быть последовательно распространен на все поле течения.

3. В случае автомодельного обтекания решение задачи может быть получено также достаточно просто. Введем независимые автомодельные переменные $\xi = l / \tau$ и $\eta = n / \tau$. Система (1.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial s}{\partial \xi}(v_l - \xi) = 0, \qquad \frac{\partial v_l}{\partial \xi}(v_l - \xi) + \frac{\psi_s c^2}{\rho}\frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\psi_\rho c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial \eta} = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho f}\frac{\partial}{\partial \xi}(v_l \rho f), \qquad \frac{\partial s}{\partial \eta} = -\frac{\psi_\rho}{\psi_s}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}$$

Для решения задачи достаточно, как уже отмечалось ранее в п. 1, найти решение системы из первых двух уравнений (3.1) с соответствующими граничными условиями для неизвестных функций s и v_l.

Из первого уравнения следует, что распределение энтропии на поверхности тока имеет вид зависимости $s = c_i$, где c_i — константа, которая может изменяться на разрывах, распространяющихся со скоростью $v_l = \xi$. Такими разрывами могут быть либо ударные волны, либо контактные поверхности. Движение и состояние газа во всей рассматриваемой области течения, за исключением разрывов, описывается уравнениями

$$s = c_i, \qquad \frac{dv_l}{d\xi} = \frac{\Phi(\xi)}{v_l - \xi} \qquad \left(\Phi(\xi) = -\frac{\psi_\rho c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right) \tag{3.2}$$

Задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с краевым условием на поверхности разрыва. Граничные значения энтропии и скорости за разрывом определяются с помощью известных соотношений (в зависимости от характера разрыва) по заданным величинам энтропии, скорости и плотности до разрыва и значению плотности за разрывом (или иногда более точно экспериментально определяемому значению скорости движения разрыва).

При наличии в рассматриваемой области течения n точек разрыва функция $\Phi(\xi)$ имеет $n - 1$ непрерывных отрезков, и уравнение (3.2) необходимо интегрировать последовательно, начиная с граничного отрезка *1*, краевое условие на котором известно. Определенная в результате интегрирования уравнения (3.2) скорость на другом конце отрезка и известная величина энтропии, позволяют определить краевые условия на следующем разрыве и найти решение на следующем непрерывном отрезке $\Phi(\xi)$ и т. д.; таким образом определяется решение во всем рассматриваемом диапазоне изменения ξ.

После определения скорости и энтропии производные $\partial v_n / \partial \eta$ и $\partial s / \partial \eta$ могут быть найдены из третьего и четвертого уравнения системы (3.1). Давление на поверхности тока определяется из уравнения состояния (1.2), например, для совершенного газа $p = \rho^\gamma e^s$.

В заключение заметим, что уравнение (3.2) для произвольной функции $\Phi(\xi)$ не допускает решения в квадратурах, однако численное интегрирование его может быть выполнено без особых затруднений.

4. В общем случае, как было показано в п. 1, решение задачи об определении параметров течения на известной поверхности тока сводится к решению системы из двух квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Класс задач, в котором решение может быть найдено, и область в плоскости независимых переменных, где оно может быть получено, определяются из требования задания граничных условий на рассматриваемой линии тока. В осесимметричных и плоских течениях с отходящей ударной волной известным отрезком линии тока, прилегающей к поверхности тела, является критическая линия тока, идущая вдоль оси симметрии, поэтому в качестве граничного условия для линии тока, лежащей на поверхности тела, может быть использовано краевое условие на критической линии тока.

В некоторых интересных случаях, например, при дифракции ударной волны на теле, покоящемся или движущемся в газе, задача сводится к задаче Коши. При этом линиями, на которых задаются искомые функции в плоскости независимых переменных l, τ, являются траектории ударных волн и точек их пересечения (регулярное отражение).

Автор выражает благодарность В. А. Белоконю, а также В. Т. Кирееву за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступило 18 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ladenburg R., Winkler J., Van Voorhnis C. C. Interferometric studies of faster then sound phenomena, pt. 1. The gas flow around various objects in a free, homogeneous supersonic air stream. Phys. Rev., 1948, vol. 73, No. 11.
2. Bleakney W., White D. R., Griffith W. C. Measurements of diffraction of shock waves and resulting loading of structures. J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 4.