Следовательно

$$V = \frac{M}{a}\frac{\pi}{2} = \text{const} \qquad \text{при } r < a$$

$$V = \frac{M}{a}\operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{1}{a}(r^2 - a^2)^{1/2}\right] = \frac{M}{a}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right\} \quad \text{при } r > a \tag{10}$$

Полученное выражение (9) для $V(r, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, при $\rho \to \infty$ стремится к нулю как $1/\rho$ и удовлетворяет условиям: $\partial v / \partial z = 0$ при $z = 0$, $r > a$; $V = \text{const}$ на диске, при $r \leqslant a$, $z = 0$. Следовательно, выбрав вместо M/a нужную нам константу и положив $a = r_0$, получим в нижнем полупространстве решение интересующей нас задачи. Эквипотенциальные поверхности — полуэллипсоиды вращения (8) при различных значениях $\lambda = \text{const}$, $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. При возрастании λ эти поверхности стремятся к полусферам. Распределение потенциала (10) на плоскости $z = 0$ получилось (с точностью до постоянного слагаемого), в соответствии с формулой (6) Форхгеймера.

Поверхности тока — однополостные гиперболоиды вращения

$$\frac{r^2}{a^2 - \mu} - \frac{z^2}{\mu} = 1, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant a^2$$

Функция тока Ψ имеет вид

$$\Psi = Ma^{-1}\sqrt{\mu} = Ma^{-1}\{{}^1/_2(a^2 - \rho^2) + \sqrt{{}^1/_4(a^2 - \rho^2)^2 + a^2z^2}\}^{1/2}$$

Другая задача — о притоке воды к круглому дну скважины в пласте конечной глубины, в книге [2] также не получила верного решения.

Поступило 30 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1965.
2. Усенко В. С. Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М., «Колос», 1968.
3. Forchheimer Ph. Ueber den Wasserzudrang in Brunnen und Baugruben. Zeitschrift des Östferreichischen Ingenieur und Architekten Vereins. Wien, 1905.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
5. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика, ч. II. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. М., Гостехиздат, 1934.
6. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge, 1932.

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ (*Калинин*)

В работе К. П. Станюковича [1] покаазно, что, когда

$$p = A\rho^\gamma(\psi + \psi_0)^{1-3\gamma}, \qquad A = (\gamma k^2)^\gamma = \text{const} \tag{1}$$

(где p и ρ — давление и плотность газа соответственно, зависящие от одной пространственной координаты x и времени t; ψ — функция тока; ψ_0, k — произвольные положительные постоянные и γ — отношение удельных теплоемкостей) уравнения одномерного движения идеального газа можно свести к одному линейному уравнению типа Дарбу. Если в качестве независимых переменных взять характеристические переменные ξ и η, то нетрудно показать, что скорость газа u вдоль оси x удовлетворяет уравнению того же типа [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{m}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \qquad m = \frac{3\gamma - 1}{2(\gamma - 1)} \tag{2}$$

Здесь ξ и η — характеристические переменные, определяемые из равенств

$$\xi = \frac{2\gamma k}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\psi + \psi_0}\right)^{{}^1/_2(\gamma-1)/\gamma} - \xi_* + u(\psi + \psi_0) + tp$$

$$\eta = \frac{2\gamma k}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\psi + \psi_0}\right)^{{}^1/_2(\gamma-1)/\gamma} + \xi_* - u(\psi + \psi_0) - tp \tag{3}$$

$$d\xi_* = ud\psi + tdp$$

Из определения функции тока и из (3) следует, что

$$dt=\frac{1}{2p}(d\xi-d\eta)-\frac{\psi+\psi_0}{p}\,du,\qquad dx=\frac{1}{\rho}\,d\psi+u\,dt \tag{4}$$

$$p=(\psi+\psi_0)\left[\frac{2\gamma k}{(\gamma-1)(\xi+\eta)}\right]^{-2\gamma/(\gamma-1)},\qquad dp=\sqrt{\gamma p\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\,d\xi-\frac{\partial u}{\partial\eta}\,d\eta\right)$$

Если функция $u=\varphi(\xi,\eta)$ известна, то, используя (1) и (4), найдем путем квадратур p, ρ, t и x.

Рассмотрим теперь следующую задачу: пусть в полубесконечной цилиндрической трубе ($x\geqslant 0$), закрытой с одного конца ($x=0$) поршнем, находится газ, имеющий параметры $p_0=0$, $\rho=\rho_0(\psi)$, $\psi\geqslant 0$, где $\rho_0(\psi)$ — произвольная функция ($d\psi=\rho_0 dx$). В момент $t=0$ в положительном направлении оси x начинает двигаться поршень по некоторому закону $x=x(t)$, причем $x'(0)>0$. Движение поршня порождает ударную волну, распространяющуюся по покоящемуся газу. Требуется определить закон движения поршня, скорость ударной волны и движение газа в области между поршнем ($\psi=0$) и ударной волной, если известно, что в этой области имеет место (1).

Напишем условия на сильной ударной волне [3], движущейся со скоростью $U_0(t)$

$$u=\frac{2}{\gamma+1}U_0,\quad U_0=\frac{1}{\rho_0}\frac{d\psi}{dt},\quad p=\frac{2\rho_0U_0^2}{\gamma+1},\quad \rho=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0 \tag{5}$$

Примем, далее, функцию тока ψ за независимую переменную на ударной волне. Тогда, используя (3) и (4), получим выражения для характеристических переменных ξ и η на ударной волне

$$d\xi=(\gamma k^2)^{1/2\gamma}\rho^{1/2(\gamma-1)}(\psi_0+\psi_0)^{1/2(1-3\gamma)}\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\left[(\psi+\psi_0)\frac{d\rho}{\rho d\psi}-3\right]d\psi \tag{6}$$

$$d\eta=(\gamma k^2)^{1/2\gamma}\rho^{1/2(\gamma-1)}(\psi+\psi_0)^{1/2(1-3\gamma)}\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\left[(\psi+\psi_0)\frac{d\rho}{\rho d\psi}-3\right]d\psi$$

Здесь $\rho(\psi)$ — плотность газа непосредственно за ударной волной, связанная с $\rho_0(\psi)$ последним из равенств (5).

Из (6) непосредственно следует, что на ударной волне $\eta=k_0\xi+C$. Постоянную C можно считать равной нулю. Итак, имеем следующий результат: какова бы ни была начальная плотность $\rho_0(\psi)$, образом сильной ударной волны в плоскости характеристических переменных (ξ,η) является прямая линия

$$\eta=k_0\xi,\qquad k_0=\frac{\sqrt{2\gamma}-\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2\gamma}+\sqrt{\gamma-1}} \tag{7}$$

Этот результат значительно упрощает использование функции Римана [4] для уравнения (2) при определении поля течения за сильной ударной волной при любой начальной плотности перед ней.

Для нахождения этого решения необходимо знать u и u_ξ' на линии $\eta=k_0\xi$. Эти значения можно получить из (4) — (6)

$$u\,|_{\eta=k_0\xi}=\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}(\gamma k^2)^{1/2\gamma}\rho^{1/2(\gamma-1)}(\psi+\psi_0)^{1-3\gamma} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\eta=k_0\xi}=\left[2(\psi+\psi_0)\left((\psi+\psi_0)\frac{d\ln\rho}{d\psi}-3\right)\right]^{-1}\left[(\psi+\psi_0)\frac{d\ln\rho}{d\psi}+\right.$$
$$\left.+(1-3\gamma)\frac{1+\sqrt{2/\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}\right]$$

Если задана плотность покоящегося газа $\rho_0(\psi)$, то из (5) и (6) найдем $\psi=\psi(\xi)$ и, используя известный метод Римана, определим $u=u(\xi,\eta)$ за ударной волной с учетом (8). Остальные параметры определяются с помощью квадратур.

Предположим теперь, что плотность $\rho_0(\psi)$ покоящегося газа имеет вид

$$\rho_0(\psi)=B(\psi+\psi_0)^\sigma,\qquad \sigma=\text{const}\neq 3$$

Тогда из (6) и (8) найдем

$$u\,|_{\eta=k_0\xi}=u_0\,\xi^\lambda,\qquad \frac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\eta=k_0\xi}=u_1\,\xi^{\lambda-1},\qquad \lambda=\frac{\sigma(\gamma-1)+1-3\gamma}{(\gamma-1)(\sigma-3)} \tag{9}$$

где u_0 и u_1 — некоторые постоянные.

Следовательно, решение поставленной выше задачи можно в этом случае искать в виде

$$u = \xi^\lambda \varphi(\tau), \qquad \tau = -\eta / \xi \tag{10}$$

Подстановка в (2) приводит к гипергеометрическому уравнению для функции $\varphi(\tau)$, общее решение которого можно записать в форме

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = \xi^\lambda [C_1 F(-m, -\lambda; 1+m-\lambda; \tau) + \\ + C_2 F(\lambda - 2m, -m; 1-m+\lambda; x) |\tau|^{\lambda-m}] \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные (они определяются из (9)). Используя некоторые свойства гипергеометрических функций, можно получить из (1) и (4) в явном виде нужные параметры p, ρ, t и x. Далее, в рассматриваемом случае параметр ψ_0 не является существенным, и движение определяется двумя постоянными параметрами a и b

$$a = A^{1/2\gamma}, \qquad b = A^{1/2\gamma} B^{-1/(1-\sigma)}$$

$$[a] = ML^{(1-3\gamma)/2\gamma} T^{-1/\gamma}, \; [b] = L^r T^{-1/\gamma}, \; r = \frac{3\gamma + 1 - \sigma(\gamma+1)}{2\gamma(1-\sigma)}$$

Таким образом, рассматриваемое движение будет автомодельным, и имеем следующий результат (который формулируем, пользуясь обозначениями, употребляемыми в книге Л. И. Седова [3]): в случае, когда $k = (1-3\gamma)/2\gamma$, $n = s = -1/\gamma$, $\nu = 1$ и m — произвольно ($m \neq 0$, $m \neq {}^1/_2\gamma$), общее решение основного в теории одномерных автомодельных движений уравнения выражается в параметрическом виде через гипергеометрические функции.

Поступило 26 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. ДАН СССР, 1954, т. 96, № 3.
2. Ludford G. S. S., Martin M. H. One — dimensional anisentropic flows. Cummuns Pure Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 1.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
4. Ludford G. S. S. Two topicsin one — dimensional gas dynamics. Studies in mathematics and mechanics (presented to R. von Mises by friends, Colleagucs and Pupils), N. Y., Acad. Press Inc., 1954.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ПЛОСКИХ ТЕЛ ПО ПОЛУЧЕННОМУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ПОЛЮ ПЛОТНОСТИ

Л. В. КАРЧЕВСКИЙ

(*Москва*)

Рассмотрена задача об определении параметров течения на известной поверхности тока в общем случае осесимметричного или плоского нестационарного течения идеального газа, если в малой окрестности этой поверхности задана плотность как функция координат и времени. В общем случае задача сводится к решению системы из двух квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Для стационарных течений решение выписывается в конечных соотношениях, для автомодельных — задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Класс задач, в котором решение может быть найдено, и область в плоскости независимых переменных, где оно может быть получено, определяются из требования задания граничных условий на рассматриваемой линии тока.

Приближенное решение задачи об определении параметров течения по полученному экспериментально полю плотности при сверхзвуковом стационарном обтекании с плоской и осевой симметрией приведено в работе [1]. Применительно к пространственному стационарному обтеканию тел решением этой проблемы занимались С. М. Белоцерковский, В. С. Сухоруких и В. С. Татаренчик. В работе [2] определялось давление на поверхности некоторых плоских тел при дифракции на них ударной волны в предположении об изэнтропичности течения.

В данной работе показано, что поставленная задача в общем случае нестационарного течения идеального газа может быть решена сравнительно просто в точной