Последнее имеет место, в частности, при малой проницаемости перемычки. Если отношение $|h_2 / k_2|$ даже при малой проницаемости перемычки сравнимо с величиной $|h_1 / 3k_1 + h_3 / 3k_3|$ (что может быть при очень тонких перемычках), то необходим учет характеристик основных пластов.

Пример 2. Фильтрация в трехслойном пласте с двумя перемычками.

Рассмотрим пятислойный пласт со скоростями на границах между слоями 0, v_1, v_2, v_3, v_4, 0. Полагая, как и в примере 1б, $v_1 = v_2 = v_{13}$ и $v_3 = v_4 = v_{35}$, получим систему уравнений для определения скоростей перетоков v_{13} и v_{35}

$$\begin{aligned} &\left(\frac{h_1}{3k_1} + \frac{h_2}{k_2} + \frac{h_3}{3k_3}\right) v_{13} + \frac{h_3}{6k_3} v_{35} = p_3 - p_1 \\ &\frac{h_3}{6k_3} v_{13} + \left(\frac{h_3}{3k_3} + \frac{h_4}{k_4} + \frac{h_5}{3k_5}\right) v_{35} = p_5 - p_3 \end{aligned} \tag{15}$$

Система (15) показывает, что и при наличии перемычек скорости перетоков связаны, вообще говоря, с разностями давлений во всех основных слоях пласта. Выражение для v_{13}, полученное из уравнений (15), будет совпадать с обычно используемым соотношением для скорости перетока при условии, что

$$\left|\frac{p_5 - p_3}{p_3 - p_1}\right| \ll 2 + 6\frac{k_3 h_4}{k_4 h_3} + 2\frac{k_3 h_5}{k_5 h_3}$$

Аналогичная оценка имеет место и для v_{35}. Эти соотношения будут удовлетворены при достаточно больших величинах $|h_2 / k_2|$ и $|h_4 / k_4|$.

Поступило 27 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К гидравлической теории колодцев в многослойной среде. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
2. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.

К ВОПРОСУ О ПОЛУЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА (*Новосибирск*)

Даны простейшие примеры применения интегральных преобразований (2) и (5), переводящих аналитические функции в r-аналитические и обратно. Дается новый вывод решения задачи Ламба Форхгеймера о притоке жидкости к круглому отверстию (дну скважины).

Среди различных способов получения осесимметричных установившихся безвихревых движений идеальной несжимаемой жидкости из плоских движений такой же жидкости имеется особенно простой на вид. А именно, пусть $\varphi(r, z)$, $\psi(r, z)$ будут сопряженные гармонические функции, т. е. удовлетворяющие условиям Коши — Римана (вместо обычных x, y декартовы координаты здесь обозначаются через r, z)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{1}$$

Тогда преобразования (см. [1])

$$\Phi(r, z) = \int_0^r \varphi(\xi, z)\frac{d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \qquad \Psi(r, z) = \int_0^r \psi(\xi, z)\frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^3 - \xi^2}} \tag{2}$$

дают r — аналитические функции $\Phi(r, z)$ $\Psi(r, z)$, т. е. функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{3}$$

Иначе говоря, $\Phi(r, z)$ и $\Psi(r, z)$ можно рассматривать как потенциал скорости и функцию тока некоторого осесимметричного движения, причем здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Автор книги [2] В. С. Усенко задался целью найти с помощью формул (2) решение задачи о скважине, плоским дном вскрывающей водоносный пласт неограниченных размеров (фиг. 1), исходя из известного решения задачи о притоке в пористой среде воды к отрезку в плоском течении. При этом он полагает, что граничные условия для Φ, Ψ остаются теми же, что и для φ и ψ соответственно. Однако это совсем не так, что можно пояснить простейшим примером.

Возьмем

$$\Phi(r, z) = \ln\sqrt{r^2+z^2}, \qquad \Psi(r, z) = \operatorname{arc\,tg} z / r - {}^1\!/_2\pi$$

(функция $\Psi(r, z)$ выбирается равной нулю при $r=0$). Это источник на плоскости (фиг. 2), т. е. предельный случай к изображенному на фиг. 1. При этом OA, OZ, OC — линии тока в плоско-параллельном течении.

Этому движению соответствует пространственный точечный источник, для которого потенциал скорости (записываем его с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого)

$$\Phi(r, z) = 1 / \sqrt{r^2+z^2} \tag{4}$$

не получается из (2). В самом деле, из (2) нетрудно найти Ψ

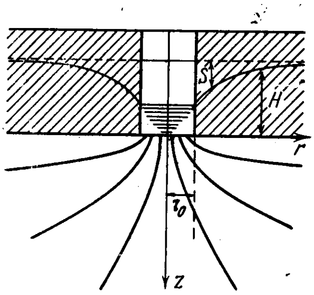
$$\Psi(r, z) = \int\limits_0^r \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\xi} - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}} = \frac{\pi}{2}\left(z - \sqrt{r^2+z^2}\right)$$

При этом удовлетворяется условие $\Psi=0$ при $r=0$, $z>0$. Однако плоскость $z=0$ не является твердой стенкой полученного течения, вдоль $z=0$ имеем $\Psi(r, 0) = {}^1\!/_2\pi r$.

Потенциал скорости $\Phi(r, z)$ найдем из (3)

$$\Phi(r, z) = {}^1\!/_2\pi \ln\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)$$

Поверхности тока $z-\sqrt{r^2+z^2} = -C = \mathrm{const}$ или $r^2 = Cz + C^2$ софокусные параболоиды вращения, поверхности равного потенциала $z+\sqrt{r^2+z^2} = C_1$ ортогональные им параболоиды вращения (фиг. 3). Получается (с точностью до постоянных множителей) полубесконечный источник, из которого зонтиками вытекает вода [1].



Фиг. 1

Нетрудно найти то плоско-параллельное течение, которое соответствует осесимметричному, выражаемому уравнением (4). По формулам, приведенным в книгах [1] и [2], получим

$$\begin{aligned}\psi(r, z) &= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \frac{\partial\Phi(\xi, z)}{\partial z}\frac{\xi\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}} = \frac{r}{r^2+z^2}\\ \varphi(r, z) &= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^r \Phi(\xi, z)\frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}} = \frac{z}{r^2+z^2}\end{aligned} \tag{5}$$

Линии тока $r / (r^2+z^2) = \mathrm{const}$ представляют семейство окружностей, касающихся оси z, а эквипотенциали и $z / (r^2+z^2) = \mathrm{const}$ являются ортогональными им окружностями (фиг. 4).

Видим, какие неожиданные соотношения получаются при использовании формул (2) и (5) перехода от φ, ψ к Φ, Ψ и обратно.

Далее, отметим следующее. При решении задачи о движении в бесконечной области необходимо поставить условия на бесконечности. В задаче о скважине с плоским дном нетрудно выяснить эти условия. Ведь любой колодец или скважина, помещенные вблизи начала координат, создадут возмущение потока, которое будет сглаживаться по мере удаления от начала, и поток на больших расстояниях будет приближаться к такому, который создается точечным источником. Поэтому функция $\Phi(r, z)$ для больших $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$ должна приближаться к выражению, определяемому равенством (4), т. е. $\Phi(r, z)$ должна иметь порядок $1/\rho$.

Это условие в решении, приводимом В. С. Усенко, не выполнено. На плоскости $z=0$ (для нее только он и строит решение) оно имеет порядок $\ln r$, что, очевидно, не годится.

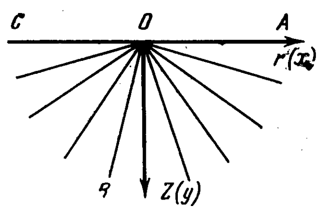
[1] Если взять $\psi = \operatorname{arc\,tg} z / r$, то поверхности вращения $\Psi(r, z) = {}^1\!/_2\pi(z + r - \sqrt{r^2+z^2}) = \mathrm{const}$ будут образованы семейством пересекающихся гипербол, что не дает реального течения.

Между тем В. С. Усенко приводит со ссылкой на Форхгеймера [3] правильную формулу для распределения понижения (понижение есть линейная функция потенциала Ф) по крове пласта

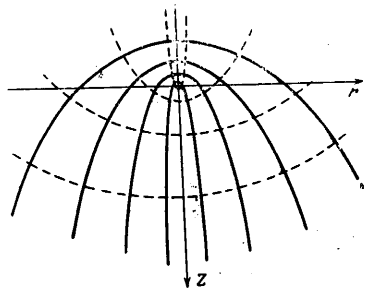
$$S = \frac{Q}{2\pi k r_0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) \qquad (r \geqslant r_0) \tag{6}$$

где r_0 — радиус кругового отверстия, куда притекает вода.

Полное решение задачи о притоке к плоскому дну скважины (фиг. 1) получается из задачи, приведенной Ламбом ([4]), § 108), об истечении из круглого отверстия.



Фиг. 2



Фиг. 3

Л. С. Лейбензон [5] воспроизвел вывод применительно к фильтрационной задаче. Можно дать простой вывод, исходя из задачи о ньютоновском потенциале однородной эллипсоидальной оболочки, образованной поверхностью эллипсоида

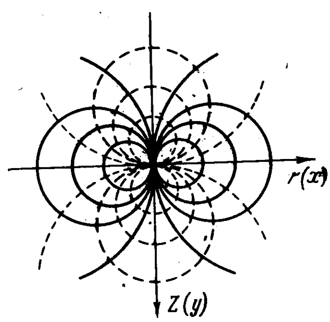
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Этот потенциал выражается так [6]:

$$V(x, y, z) = \frac{M}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

Здесь M — масса оболочки, λ — корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{7}$$



Фиг. 4

Можно непосредственно проверить, что $V(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Для эллипсоида вращения $a = b$ вычисление V упрощается и в случае сжатого эллипсоида, когда $c < a$, имеем

$$V = \frac{M}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{du}{(a^2+u)\sqrt{c^2+u}} = \frac{M}{m}\operatorname{arcctg}\left[\frac{1}{m}(\lambda + c^2)^{1/2}\right] \qquad (m^2 = a^2 - c^2)$$

Если эллипсоид превращается в диск, то $c = 0$, уравнения (7) дают эллипсоиды

$$[r^2 / (a^2 + \lambda)] + (z^2/\lambda) = 1 \tag{8}$$

Отсюда

$$\lambda = {}^1/_2(\rho^2 - a^2) + \sqrt{{}^1/_4(\rho^2 - a^2)^2 + a^2 z^2}$$

и тогда

$$V = \frac{M}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a} = \frac{M}{a}\operatorname{arcctg}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}(\rho^2 - a^2) + \sqrt{{}^1/_4(\rho^2 - a^2)^2 + a^2z^2}\right]^{1/2}\right\} \tag{9}$$

На плоскости $z = 0$ имеем $\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = r$

$$V = \frac{M}{a}\operatorname{arcctg}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}(r^2 - a^2) + \frac{1}{2}\,|r^2 - a^2|\right]^{1/2}\right\}$$

Следовательно

$$V = \frac{M}{a}\frac{\pi}{2} = \text{const} \qquad \text{при } r < a$$

$$V = \frac{M}{a} \operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{1}{a}(r^2 - a^2)^{1/2}\right] = \frac{M}{a}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right\} \quad \text{при } r > a \qquad (10)$$

Полученное выражение (9) для $V(r, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, при $\rho \to \infty$ стремится к нулю как $1/\rho$ и удовлетворяет условиям: $\partial v / \partial z = 0$ при $z = 0$, $r > a$; $V = \text{const}$ на диске, при $r \leqslant a$, $z = 0$. Следовательно, выбрав вместо M / a нужную нам константу и положив $a = r_0$, получим в нижнем полупространстве решение интересующей нас задачи. Эквипотенциальные поверхности — полуэллипсоиды вращения (8) при различных значениях $\lambda = \text{const}$, $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. При возрастании λ эти поверхности стремятся к полусферам. Распределение потенциала (10) на плоскости $z = 0$ получилось (с точностью до постоянного слагаемого), в соответствии с формулой (6) Форхгеймера.

Поверхности тока — однополостные гиперболоиды вращения

$$\frac{r^2}{a^2 - \mu} - \frac{z^2}{\mu} = 1, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant a^2$$

Функция тока Ψ имеет вид

$$\Psi = Ma^{-1}\sqrt{\mu} = Ma^{-1}\{{}^1/_2(a^2 - \rho^2) + \sqrt{{}^1/_4(a^2 - \rho^2)^2 + a^2z^2}\}^{1/2}$$

Другая задача — о притоке воды к круглому дну скважины в пласте конечной глубины, в книге [2] также не получила верного решения.

Поступило 30 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1965.
2. Усенко В. С. Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М., «Колос», 1968.
3. Forchheimer Ph. Ueber den Wasserzudrang in Brunnen und Baugruben. Zeitschrift des Östferreichischen Ingenieur und Architekten Vereins. Wien, 1905.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
5. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика, ч. II. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. М., Гостехиздат, 1934.
6. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge, 1932.

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ (*Калинин*)

В работе К. П. Станюковича [1] покаазно, что, когда

$$p = A\rho^{\nu}(\psi + \psi_0)^{1-3\nu}, \qquad A = (\gamma k^2)^{\nu} = \text{const} \qquad (1)$$

(где p и ρ — давление и плотность газа соответственно, зависящие от одной пространственной координаты x и времени t; ψ — функция тока; ψ_0, k — произвольные положительные постоянные и γ — отношение удельных теплоемкостей) уравнения одномерного движения идеального газа можно свести к одному линейному уравнению типа Дарбу. Если в качестве независимых переменных взять характеристические переменные ξ и η, то нетрудно показать, что скорость газа u вдоль оси x удовлетворяет уравнению того же типа [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{m}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \qquad m = \frac{3\gamma - 1}{2(\gamma - 1)} \qquad (2)$$

Здесь ξ и η — характеристические переменные, определяемые из равенств

$$\xi = \frac{2\gamma k}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\psi + \psi_0}\right)^{1/2(\gamma-1)/\gamma} - \xi_* + u(\psi + \psi_0) + tp$$

$$\eta = \frac{2\gamma k}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\psi + \psi_0}\right)^{1/2(\gamma-1)/\gamma} + \xi_* - u(\psi + \psi_0) - tp \qquad (3)$$

$$d\xi_* = u\,d\psi + t\,dp$$