величины $(\partial p / \partial x)$ в уравнении (13), но и с изменением коэффициента $F_{x'}$ и $R_{x}'^{-2}$, являющихся функциями углов φ_0 и ψ_0.

Таким образом, формула нелинейного закона сопротивления, сохраняя свой общий вид, изменяется через входящие в нее коэффициенты в зависимости от выбора направления интересующего нас фильтрационного потока по отношению к направлению среднего переноса.

Наряду с уравнениями движения осредненного режима фильтрации (10)—(14) в некоторых задачах может найти применение уравнения свободной термической конвекции, вывод которого проводится аналогично. В уравнении (8) для этого в соответствии с теорией свободной конвекции [10] следует заменить величину

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{на} \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial n} - \beta g T' \cos\varphi \cos\psi$$

где T' — превышение в фиксированной точке температуры жидкости над некоторой средней температурой, которое и обусловливает возникновение свободной конвекции, p' — отклонение давления от его среднего значения, связанное с конвективным движением жидкости, β — коэффициент теплового расширения жидкости, g — ускорение силы тяжести. Умножая полученное таким образом из (8) уравнение на произведение $m \cos\varphi \cos\psi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)$, интегрируя его по углам φ и ψ так же как и при выводе уравнения (10), и разделив на ρF, получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle + c_1 \frac{\langle u^2\rangle}{\langle R\rangle} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} F_x - \beta g T' F_x + \mu c_2 \frac{\langle u\rangle}{\langle R^2\rangle} - \mu c R_x^{-2}\langle u\rangle$$

где T' имеет смысл математического ожидания превышения температуры в фиксированной точке над некоторой средней температурой, соответствующей термическому равновесию.

Поступило 1 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанский А. Б. Статистическая модель переноса тепла фильтрацией. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Josselinde Jond G. Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits. Frans. Amer. Geophys. Union, 1958, vol. 39.
3. Саффман П. Теория дисперсии в пористой среде. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., М., Изд-во иностр. лит., 1960, № 2.
4. Казанский А. Б., Монин А. С. О форме дымовых струй. Изв. АН СССР, Сер. геофизическая, 1957, № 8.
5. Минский Е. М. Элементы статистического исследования фильтрационных движений. М., Тр. Всес. н.-и. ин-та газов 1957, вып. 2 (10).
6. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М.— Л., Гостоптехиздат, 1949.
7. Шейдегер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
8. Чарный И. А. О притоке к несовершенным скважинам при одновременном существовании различных законов фильтрации в пласте. Изв. АН СССР, ОТН, 1950, № 6.
9. Минский Е. М. О притоке жидкости или газа к несовершенным скважинам при нелинейном законе сопротивления. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 3.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕТОКОВ МЕЖДУ ПЛАСТАМИ

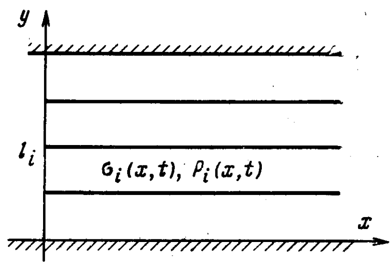
М. В. ЛУРЬЕ, В. М. МАКСИМОВ

(*Москва*)

Большой интерес в теории фильтрации представляет задача движения жидкости в неоднородном по проницаемости пласте. В строгой постановке такая задача требует решения неодномерных уравнений фильтрации, что вызывает большие математические затруднения. Для упрощения исследований обычно применяется осреднение характеристик течения по мощности пластов, которые моделируют рассматриваемый неоднородный пласт. При этом скорости перетоков (вертикальные составляющие скоростей фильтрации на границах раздела пластов) принимаются пропорциональными разности средних давлений в пластах [1, 2]. Коэффициент пропорциональности носит либо эмпирический характер, либо при наличии слабопроницаемой перемычки между основными пластами определяется ее характеристиками (проницаемостью и мощностью).

В предлагаемой работе предложена более детальная схема осреднения уравнений фильтрации жидкости в многослойных пластах при учете перетоков между ними. Рассмотрен вопрос о связи между скоростями перетока и средними давлениями в пластах. Показано, что, вообще говоря, скорость перетока из i-го пласта в $(i+1)$-й определяется разностью средних давлений не только в этих пластах, но и во всех остальных. Затем, как следствие, получены результаты для важного на практике случая, когда пласты разделены слабопроницаемыми перемычками. Анализируя полученные соотношения, нетрудно установить, при каких связях между параметрами пластов можно использовать прежние формулы [1, 2].

Рассмотрим для определенности движение двухфазной среды в неоднородном по проницаемости пласте с непроницаемыми верхней и нижней границей. Неоднородный пласт заменяется системой из n пластов мощностью $h_i = l_i - l_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $h_1 = l_1$, проницаемость каждого из которых есть $k_i(\sigma_i)$, где σ_i — насыщенность одной из фаз в i-м пласте (фигура).



Система уравнений плоской двухфазной фильтрации имеет вид:

$$\begin{gathered} m_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1) \\ -m_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial y} = 0 \end{gathered}$$

Здесь m_i — пористость, $u_i^{(1)}$, $v_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $v_i^{(2)}$ суть компоненты скорости фильтрации для каждой фазы соответственно. Для последних считается справедливым закон Дарси

$$u_i^{(\alpha)} = k_i^{(\alpha)} \frac{\partial p_i^{(\alpha)}}{\partial x}, \qquad v_i^{(\alpha)} = k_i^{(\alpha)} \frac{\partial p_i^{(\alpha)}}{\partial y} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{2}$$

Здесь $k_i^{(\alpha)} = -k_i^{(\alpha)}(\sigma_i) / \mu_\alpha$, где $k_i^{(\alpha)}(\sigma_i)$ — проницаемость, μ_α — вязкость, α — номер фазы. Поскольку все проводимые рассуждения идентичны для каждой фазы, индекс α в дальнейшем будет опускаться [1].

Будем считать далее, что проницаемость i-го пласта мало меняется по вертикали, так что $k_i(\sigma_i) = k_i(x, t)$. Обозначая вертикальную составляющую скорости фильтрации на границе i-го и $(i+1)$-го пласта (скорость перетока) $v_i(x, l_i, t) = v_i(x, t)$ и проводя осреднение уравнений (1) по мощности i-го пласта, получаем

$$m_i \frac{\partial \sigma_i(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} + \frac{v_i(x, t) - v_{i-1}(x, t)}{h_i} = 0 \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Здесь

$$u_i(x, t) = \langle u_i(x, y, t) \rangle = \frac{1}{h_i} \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} u_i(x, y, t)\, dy.$$

$$\sigma_i(x, t) = \langle \sigma_i(x, y, t) \rangle = \frac{1}{h_i} \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} \sigma_i(x, y, t)\, dy$$

В качестве основной гипотезы примем допущение о том, что вертикальная скорость фильтрации в i-м пласте $v_i(x, y, t)$ от координаты y зависит линейно, так что

$$v_i(x, y, t) = v_{i-1}(x, t) + \frac{v_i(x, t) - v_{i-1}(x, t)}{h_i} (y - l_{i-1}) \tag{4}$$

[1] В рамках предлагаемой модели оставлено без внимания явление перетока, связанное с капиллярными эффектами. Этот вопрос представляет большой интерес и будет предметом дальнейшего исследования.

Тогда путем интегрирования по y в законе Дарси (2) найдем выражение для давлений $p_i(x, y, t)$

$$p_i(x, y, t) = \frac{v_{i-1} l_i - v_i l_{i-1}}{k_i h_i} y + \frac{v_i - v_{i-1}}{2k_i h_i} y^2 + f_i(x, t) \tag{5}$$

Здесь $f_i(x, t)$ — произвольная функция своих аргументов. Для ее определения будем считать известным среднее давление $p_i(x, t) = \langle p_i(x, y, t)\rangle$ в i-м пласте

$$p_i(x, t) = \frac{1}{h_i} \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} p_i(x, y, t)\, dy \tag{6}$$

Производя осреднение соотношений (5), находим для $f_i(x, t)$ выражение

$$f_i(x, t) = p_i - \frac{(v_{i-1} l_i - v_i l_{i-1})(l_i + l_{i-1})}{2k_i h_i} - \frac{(v_i - v_{i-1})(l_i^2 + l_i l_{i-1} + l_{i-1}^2)}{6k_i h_i}. \tag{7}$$

Формулы (5) и (7) позволяют найти выражение для давления в i-м пласте через среднее давление в этом пласте и скорости перетоков на его границах. Используя далее условие равенства давлений на границе раздела пластов

$$p_i(x, l_{i-1}, t) = p_{i-1}(x, l_{i-1}, t) \tag{8}$$

можно получить систему $(n-1)$-го уравнения для определения искомой связи между скоростями перетоков и средними давлениями. Учитывая, что

$$p_i(x, l_{i-1}, t) = p_i - \frac{(v_i + 2v_{i-1}) h_i}{6k_i}, \qquad p_i(x, l_i, t) = p_i + \frac{(v_{i-1} + 2v_i) h_i}{6k_i} \tag{9}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{h_i}{6k_i} v_{i-1} + \left(\frac{h_i}{3k_i} + \frac{h_{i+1}}{3k_{i+1}}\right) v_i + \frac{h_{i+1}}{6k_{i+1}} v_{i+1} = p_{i+1} - p_i \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Из этой системы найдем

$$v_i = \sum_{j,\, k=1}^{n} \alpha_{jk}(p_j - p_k), \qquad \alpha_{jk} = \alpha_{kj} \tag{11}$$

где α_{jk} — известные коэффициенты, выражающиеся через все k_i и h_i. Такого типа соотношения используются во многих работах, однако они учитывают зависимость скорости перетока лишь от разности давлений в соседних пластах. Формула (11) показывает, что, вообще говоря, скорость перетока из i-го в $(i+1)$-й пласт линейно зависит от всех разностей давлений $p_j - p_k$. Из этой формулы легко следует также факт ослабления взаимного влияния пластов при увеличении разности их номеров.

Пример 1. а) Фильтрация в двухслойном пласте без перемычки. Формула (11) с учетом принятых обозначений дает выражение для скорости перетока между пластами

$$v(x, t) = \frac{3k_1 k_2}{k_2 h_1 + k_1 h_2}(p_2 - p_1) \tag{12}$$

б) Фильтрация в двухслойном пласте с перемычкой. Рассмотрим трехслойный пласт. Будем считать, что его верхняя и нижняя границы непроницаемы. Система определяющих уравнений (10) в этом случае дает

$$\left(\frac{h_1}{3k_1} + \frac{h_2}{3k_2}\right) v_1 + \frac{h_2}{6k_2} v_2 = p_2 - p_1, \qquad \frac{h_2}{6k_2} v_1 + \left(\frac{h_2}{3k_2} + \frac{h_3}{3k_3}\right) v_2 = p_3 - p_2 \tag{13}$$

Предполагая, как это делается обычно при рассмотрении перемычек, что движение вдоль среднего пласта отсутствует, положим $v_1(x, t) = v_2(x, t) = v_{13}$. Исключая из уравнений (13) p_2, получим

$$\left(\frac{h_1}{3k_1} + \frac{h_2}{k_2} + \frac{h_3}{3k_3}\right) v_{13} = p_3 - p_1 \tag{14}$$

Отсюда видно, что это соотношение для определения скорости перетока совпадает с обычно используемыми [2] $v_{13} = k_2 / h_2 (p_3 - p_1)$ при условии, что

$$\left|\frac{h_2}{k_2}\right| \gg \left|\frac{h_1}{3k_1} + \frac{h_3}{3k_3}\right|$$

Последнее имеет место, в частности, при малой проницаемости перемычки. Если отношение $|h_2 / k_2|$ даже при малой проницаемости перемычки сравнимо с величиной $|h_1 / 3k_1 + h_3 / 3k_3|$ (что может быть при очень тонких перемычках), то необходим учет характеристик основных пластов.

Пример 2. Фильтрация в трехслойном пласте с двумя перемычками.

Рассмотрим пятислойный пласт со скоростями на границах между слоями 0, v_1, v_2, v_3, v_4, 0. Полагая, как и в примере 1б, $v_1 = v_2 = v_{13}$ и $v_3 = v_4 = v_{35}$, получим систему уравнений для определения скоростей перетоков v_{13} и v_{35}

$$\begin{gathered}\left(\frac{h_1}{3k_1} + \frac{h_2}{k_2} + \frac{h_3}{3k_3}\right) v_{13} + \frac{h_3}{6k_3} v_{35} = p_3 - p_1 \\ \frac{h_3}{6k_3} v_{13} + \left(\frac{h_3}{3k_3} + \frac{h_4}{k_4} + \frac{h_5}{3k_5}\right) v_{35} = p_5 - p_3\end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) показывает, что и при наличии перемычек скорости перетоков связаны, вообще говоря, с разностями давлений во всех основных слоях пласта. Выражение для v_{13}, полученное из уравнений (15), будет совпадать с обычно используемым соотношением для скорости перетока при условии, что

$$\left|\frac{p_5 - p_3}{p_3 - p_1}\right| \ll 2 + 6\frac{k_3 h_4}{k_4 h_3} + 2\frac{k_3 h_5}{k_5 h_3}$$

Аналогичная оценка имеет место и для v_{35}. Эти соотношения будут удовлетворены при достаточно больших величинах $|h_2 / k_2|$ и $|h_4 / k_4|$.

Поступило 27 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К гидравлической теории колодцев в многослойной среде. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
2. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.

К ВОПРОСУ О ПОЛУЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА (*Новосибирск*)

Даны простейшие примеры применения интегральных преобразований (2) и (5), переводящих аналитические функции в r-аналитические и обратно. Дается новый вывод решения задачи Ламба Форхгеймера о притоке жидкости к круглому отверстию (дну скважины).

Среди различных способов получения осесимметричных установившихся безвихревых движений идеальной несжимаемой жидкости из плоских движений такой же жидкости имеется особенно простой на вид. А именно, пусть $\varphi(r, z)$, $\psi(r, z)$ будут сопряженные гармонические функции, т. е. удовлетворяющие условиям Коши — Римана (вместо обычных x, y декартовы координаты здесь обозначаются через r, z)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{1}$$

Тогда преобразования (см. [1])

$$\Phi(r, z) = \int_0^r \varphi(\xi, z) \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \qquad \Psi(r, z) = \int_0^r \psi(\xi, z) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^3 - \xi^2}} \tag{2}$$

дают r — аналитические функции $\Phi(r, z)$ $\Psi(r, z)$, т. е. функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{3}$$

Иначе говоря, $\Phi(r, z)$ и $\Psi(r, z)$ можно рассматривать как потенциал скорости и функцию тока некоторого осесимметричного движения, причем здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.