УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

А. Б. КАЗАНСКИЙ (*Москва*)

В данной работе при статистическом описании фильтрационного потока развивается не только статистика радиусов поперечного сечения поровых каналов, как это делалось до сих пор, но и статистика описывающих ориентацию каналов в пространстве углов. Развиваемый в работе аппарат осреднения позволяет вычислять характеристики среднего потока, средние скорости и отклонения от них как в направлении оси потока, так и в направлении, поперечном к средней скорости. Предлагаемая теория позволяет оценить растекание в пористом материале струи фильтрующейся жидкости. Получены выражения для скорости распространения границ такой струи и для угла расхождения струи. Развитая в работе теория применена для анализа общих фундаментальных уравнений теории фильтрации, обобщенного закона сопротивления и его частного случая формулы Дарси, которые до сих пор рассматривались в теории фильтрации как некоторые эмпирические соотношения. Для этой цели рассматривается усложненная модель, состоящая из искривленных поровых каналов. При этом вводится в рассмотрение статистика радиусов кривизны поровых каналов. Пишется уравнение Навье — Стокса для течения жидкости в искривленном поровом канале, после чего это уравнение осредняется по площади поперечного сечения порового канала. Полученное таким образом для каждого порового канала уравнение движения включается в статистику по радиусам каналов, по углам, характеризующим ориентацию каналов в пространстве и по радиусам кривизны каналов. В результате получается осредненное уравнение, по своему виду совпадающее с так называемой трехчленной формулой нелинейного закона сопротивления, и тем самым для этой формулы получено теоретическое обоснование.

В заключение статьи на основе изложенной теории выводится уравнение свободной термической конвекции в фильтрационной среде, которое может найти приложение, в частности, в гидрогеологии и вулканологии.

Для расчета величины средней фильтрационной скорости потока с учетом статистических фильтрационных характеристик пористого материала необходимо определить некоторый средний поток фильтрующейся жидкости. В определение этого потока войдет вероятностная функция распределения величин радиусов r_i элементарных отверстий (пор) пористого материала $f(r)$. Согласно [1] фильтрационный поток жидкости в пористом материале состоит из случайно ориентированных в пространстве элементарных струек, которые определяются самой структурой пористого материала и, следовательно, ориентацией в пространстве индивидуальных каналов — пор, внутри которых и образуются струйки при движении жидкости через толщу пористого тела [1]. В этом случае для описания фильтрационного движения приходится ввести углы наклона индивидуальных струек (полярный φ и азимутальный ψ) к некоторому выделенному направлению; примем для определенности это направление совпадающим с направлением среднего переноса жидкости в пористом материале. Тогда в число статистических характеристик, описывающих фильтрационные свойства пористого тела, надо кроме функции $f(r)$ ввести вероятностные функции распределения углов φ и ψ, $f_1(\varphi)$ и $f_2(\psi)$.

Согласно принятому в [1] условию направление движения жидкости в струйках, определяемое углами φ и ψ, может осуществляться только в полупространство $-{}^1/_2\pi < \varphi < {}^1/_2\pi$, $-{}^1/_2\pi < \psi < {}^1/_2\pi$, где значение углов $\varphi = \psi = 0$ соответствует направлению среднего переноса. Это значит, что фильтрационная скорость жидкости в струйках не может иметь составляющей навстречу направлению среднего переноса (такие случаи могут иметь место только в извилистых зигзагообразных струйках, которые заранее исключим из рассмотрения). Это соображение и определяет пределы вариации углов φ и ψ. По определению вероятностных функций распределения f, f_1, f_2 удовлетворяют условию нормировки

$$\int_0^\infty f(r)\,dr = \int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} f_1(\varphi)\,d\varphi = \int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} f_2(\psi)\,d\psi = 1$$

[1] Можно отметить, что произвольная ориентация перемещений частиц жидкости в фильтрационном потоке учитывается также при расчетах концентрации примеси, проводимых по схеме диффузии с конечной скоростью, например, [2, 3]. В данной работе предлагается другой подход, а именно пишутся уравнения движения жидкости внутри каждого элементарного порового канала, после чего для любой фиксированной точки фильтрационной среды проводится осреднение этих уравнений по радиусам кривизны поровых каналов и по радиусам их поперечных сечений, а также по углам, описывающим ориентацию поровых каналов в пространстве. В результате для каждой фиксированной точки фильтрационной среды получаются некоторые осредненные уравнения.

Равенство $f_1(\varphi) = f_2(\psi) = 1/\pi$ означает условие изотропности фильтрационных свойств пористого материала. Это условие, однако, не означает, что поле скорости фильтрационного движения также изотропно, поскольку «пульсации» скорости, осуществляемые в отдельных струйках, должны быть максимальными в струйках, направленных вдоль среднего переноса, и должны уменьшаться по мере увеличения углов $|\varphi|$ и $|\psi|$. В порах, направление которых перпендикулярно среднему переносу, т. е. когда $|\varphi| = |\psi| = {}^1/_2\pi$, движение жидкости может вообще отсутствовать. Отсюда в то же время не следует, что в фильтрационном потоке отсутствуют «пульсационные» составляющие скорости в направлении, перпендикулярном среднему переносу.

Такая составляющая скорости существует в каждой струйке, для которой $0 < |\varphi| < {}^1/_2\pi$ или $0 < |\psi| < {}^1/_2\pi$.

Введем прямоугольную систему координат xzy, где направление $x > 0$ соответствует направлению среднего переноса жидкости. Угол φ будем отсчитывать от направления $x > 0$ в плоскости xz и угол ψ от направления $x > 0$ в плоскости xy. Составляющие скоростей вдоль x, z, y обозначим через u, w, v. Согласно сказанному выше, $\langle w \rangle = \langle v \rangle = 0$, однако при этом $\langle w^2 \rangle \neq 0$, $\langle v^2 \rangle \neq 0$.

Математическое ожидание потока жидкости, переносимого струйками всех возможных радиусов и направлений через фиксированную точку пористого материала в направлении $x > 0$, и средняя фильтрационная скорость в этом направлении равны [1]

$$\langle \pi\rho r^2 u \rangle = \pi\rho m \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2 V \cos\varphi \cos\psi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \tag{1}$$

$$\langle u \rangle = \langle \pi\rho r^2 u \rangle / \rho F, \qquad F = \pi \int\limits_0^\infty r^2 f(r)\, dr$$

где ρ — плотность жидкости; m — пористость фильтрующего материала, равная в каждой фиксированной точке вероятности того что эта точка находится внутри какой-либо струйки, и определяемая как отношение объема проточных пор к общему объему пористой среды, включая твердый скелет; V — абсолютное значение вектора скорости жидкости в струйке, осредненной по ее поперечному сечению, проходящему через фиксированную точку. Математическое ожидание потока жидкости через эту точку в направлениях $z > 0 (\varphi > 0)$, $z < 0 (\varphi < 0)$ и средняя фильтрационная скорость в этих направлениях выражаются формулами

$$\langle \pi\rho r^2 w \rangle^{\pm} = \pi\rho m \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{1/2\pi} \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2 V \sin\varphi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr d\varphi d\psi \tag{2}$$

$$\langle w \rangle^{\pm} = \langle \pi\rho r^2 w \rangle^{\pm} / \rho F$$

Здесь и в дальнейшем индексом плюс будем обозначать величины, относящиеся к направлению $z > 0$, $y > 0$, и индексом минус величины, относящиеся к направлению $z < 0$, $y < 0$. Формулы, аналогичные (2), могут быть написаны и для направлений

$$y > 0 (\psi > 0) \text{ и } y < 0 (\psi < 0)$$

$$\langle \pi\rho r^2 v \rangle^{\pm} = \pi\rho m \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \int\limits_0^{1/2\pi} r^2 V \cos\varphi \sin\psi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \tag{3}$$

$$\langle v \rangle^{\pm} = \langle \pi\rho r^2 v \rangle^{\pm} / \rho F$$

Формулы для средних скоростей могут быть использованы при определении скорости распространения в пористом материале некоторой средней границы заполняющей этот материал жидкости, продвигающейся как в направлении $x > 0$, так и в направлениях $z > 0$, $z < 0$ и $y > 0$, $y < 0$, т. е. входящей в пористый материал как бы в виде «языка» или струи, при этом

$$\langle w \rangle^+ = |\langle w \rangle^-|, \qquad \langle v \rangle = |\langle v \rangle^-|$$

Задача о заполнении пористого материала языком втекающей жидкости находит частое применение в геологии. Эта задача имеет определенную аналогию в теории турбулентности, в которой рассматривается расползание облака примеси, например дыма, в турбулентном потоке жидкости [4].

Распространение «примеси», т. е. фильтрующейся жидкости в направлениях, перпендикулярных среднему переносу, определяется средними скоростями $\langle w\rangle^+$, $\langle w\rangle^-$, $\langle v\rangle^+$, $\langle v\rangle^-$, вычисленными по приведенным выше формулам. Средние квадраты пульсационных скоростей в фильтрации могут служить для характеристики «размыва» средней границы распространяющегося в пористом материале языка жидкости. Для вычисления $\sqrt{\langle u'^2\rangle}$, $\sqrt{\langle w'^2\rangle}$, $\sqrt{\langle v'^2\rangle}$ удобно воспользоваться приемом, который применен в [5] при вычислении $\langle u^2\rangle$ для фильтрационной модели, состоящей из параллельных струек. Будем представлять эти величины в виде разностей

$$\langle u'^2\rangle = \langle u^2\rangle - \langle u\rangle^2, \quad \langle w'^2\rangle = \langle w^2\rangle^\pm - (\langle w\rangle^\pm)^2, \quad \langle v'^2\rangle^\pm = \langle v^2\rangle^\pm - (\langle v\rangle^\pm)^2$$

Здесь величины $\langle u\rangle$, $\langle w\rangle^\pm$, $\langle v\rangle^\pm$ вычисляются по приведенным выше формулам, а величины $\langle u^2\rangle$, $\langle w^2\rangle^\pm$, $\langle v^2\rangle^\pm$ — по аналогичным формулам, где вместо величин u, w и v взяты квадраты (заметим при этом, что $\langle w^2\rangle$ и $\langle v^2\rangle$ могут вычисляться как средние значения $\langle w^2\rangle \approx {}^1/_2[\langle w^2\rangle^+ + \langle w^2\rangle^-]$)

$$\langle u^2\rangle = \langle \pi\rho r^2 u^2\rangle / \rho F, \quad \langle w^2\rangle^\pm = \langle \pi\rho r^2 w^2\rangle^\pm / \rho F, \quad \langle v^2\rangle^\pm = \langle \pi\rho r^2 v^2\rangle / \rho F$$

$$\langle \pi\rho r^2 u^2\rangle = \pi\rho m \int_0^\infty \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2 V^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \tag{4}$$

$$\langle \pi\rho r^2 w^2\rangle^\pm = \pi\rho m \int_0^\infty \int_0^{1/2\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2 V^2 \sin\varphi \sin|\varphi| f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \tag{5}$$

$$\langle \pi\rho r^2 v^2\rangle^\pm = \pi\rho m \int_0^\infty \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} r^2 V^2 \cos^2\varphi \sin\psi \sin|\psi| f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \tag{6}$$

Если использовать высказанное в [5] предложение вычислять абсолютное значение скорости в индивидуальных струйках по формуле Пуазейля, то, вводя обозначения: α — коэффициент, определяемый формой поперечного сечения струйки, μ — вязкость жидкости, p — математическое ожидание величины давления жидкости в фиксированной точке, в подынтегральных выражениях вместо V надо писать

$$V = -\frac{r^2}{\alpha\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi \tag{7}$$

В качестве примера использования формулы (7) вычислим величины $\langle u\rangle$, $\langle w\rangle$, $\langle v\rangle$ и $\langle u'^2\rangle$, $\langle w'^2\rangle$, $\langle v'^2\rangle$ для случая фильтрации через изотропный пористый материал, т. е. когда $f_1 = f_2 = 1/\pi$. Из (1)—(7) получим

$$\langle u\rangle = \frac{m}{4\alpha\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{B_1}{B}; \quad \langle u'^2\rangle = \frac{1}{16}\frac{m}{\alpha^2\mu^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \frac{B_2}{B}\left[\frac{9}{4} - m\frac{B_1^2}{BB_2}\right] \approx \frac{9}{64}\frac{m}{\alpha^2\mu^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\frac{B_2}{B}$$

$$\langle w\rangle^\pm = \langle v\rangle^\pm = \frac{m}{\pi^2\alpha\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{B_1}{B}$$

$$\langle w'^2\rangle = \langle v'^2\rangle = \frac{1}{32}\frac{m}{\alpha^2\mu^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\frac{B_2}{B}\left[1 - \frac{32}{\pi^4} m \frac{B_1^2}{BB_2}\right] \approx \frac{1}{32}\frac{m}{\alpha^2\mu^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\frac{B_2}{B}$$

$$B = \int_0^\infty r^2 f(r)\, dr, \quad B_1 = \int_0^\infty r^4 f(r)\, dr, \quad B_2 = \int_0^\infty r^6 f(r)\, dr$$

откуда получается результат относительно формы входящего в пористый материал языка жидкости. Действительно, отношение $\langle w\rangle / \langle u\rangle$ дает угол наклона в плоскости xz средней границы жидкости к направлению среднего переноса x. Отношение $\langle v\rangle / \langle u\rangle$ определяет аналогичный угол в плоскости xy. Примечательным является то, что в рассчитанном выше примере эти отношения являются постоянными величинами и равны $\langle w\rangle / \langle u\rangle = \langle v\rangle / \langle u\rangle = 4/\pi = \mathrm{const}$. Следовательно, в данном случае язык имеет форму конуса, ось симметрии которого совпадает с направлением x и в котором угол наклона образующей к оси x равен $\operatorname{arc\,tg}(4/\pi^2)$. Отмеченное конусообразное вхождение жидкости в пористый материал соответствует, как уже говорилось, картине распространения в турбулентном потоке струи дыма, выпускаемого постоянно действующим точечным источником [4]. В случае однородной турбулентности наклон границы дымовой струи к направлению среднего переноса будет постоянным.

Предположение о цилиндрической форме поровых каналов означает прямолинейность движения частиц жидкости в элементарных струйках и, следовательно, отсутствие каких-либо местных ускорений вдоль оси поровых каналов. Однако, приближая рассматриваемую модель пористого материала к реальности, следует допустить, что поровые каналы, а вместе с ними и струйки, имеют форму изогнутых трубочек. Другими словами, следует представить себе, что жидкость, входя в переднее отверстие рассматривавшегося перед этим порового канала — цилиндра, продолжает свое движение по трубке, ствол которой отклоняется от оси цилиндра, за счет чего жидкость в каждой струйке (если она изогнута) испытывает некоторое сопротивление инерционного происхождения. Проектируя изогнутые элементарные струйки на направление, соответствующее направлению входа жидкости в элементарный канал, можно перейти к фильтрационной модели, состоящей из прямолинейных струек, т. е. к модели, рассматривавшейся ранее, причем в струйках-проекциях скорость жидкости будет убывать вдоль их длины.

Однако при переходе от модели с изогнутыми струйками к модели, состоящей из прямых струек-проекций, следует позаботиться о том, чтобы величина суммарного вязкого сопротивления, обязанная своим происхождением взаимодействию частиц жидкости в каждом поровом канале с его стенками и связанная с профилем продольной скорости в его поперечном сечении, осталась прежней. Этого можно достигнуть подбором такого профиля скорости в поперечном сечении струйки-проекции, чтобы эффект вязкого сопротивления в направлении ее длины был эквивалентен аналогичному сопротивлению в том же направлении, возникающему в изогнутом правом канале. Следовательно, суммарная величина вязкого сопротивления для осредненного режима, связываемая, например, со средней скоростью потока, может быть оценена только с точностью до некоторой произвольной постоянной, которую следует находить эмпирически.

Приняв во внимание эти замечания, перейдем к модели, состоящей из прямолинейных поровых трубок. Напишем в цилиндрической системе координат уравнения Навье — Стокса для жидкости, протекающей внутри цилиндрического порового канала. При совмещении оси цилиндрической системы координат с осью рассматриваемого цилиндра n, систему уравнений можно заменить одним уравнением, приняв во внимание предположение о прямолинейности внутри цилиндра линий тока жидкости

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial n} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial n^2} - \mu \frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V_i}{\partial r}\right)$$

где V_i — скорость жидкости на расстоянии r от оси цилиндра, t — время.

Проинтегрируем это уравнение по площади поперечного сечения струйки, вводя определение средней в поперечном сечении струйки скорости и квадрата скорости соотношениями (при условии $r = 0$, $\partial V_i / \partial r = 0$)

$$\pi r_i^2 V = \int_\sigma V_i \, d\sigma, \qquad \pi r_i^2 V^2 = \int_\sigma V_i^2 \, d\sigma$$

В результате получим уравнение для потока жидкости, переносимой в индивидуальном поровом канале

$$\pi r_i^2 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\pi r_i^2 \frac{\partial V^2}{\partial n} = -\pi r_i^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + \pi r_i^2 \mu \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \pi \mu r_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_w \tag{8}$$

где индекс w означает, что величина $\partial V_i / \partial r$ берется на стенке порового канала.

В уравнении (8) слагаемое, содержащее производную по n, выражает, как было сказано выше, некоторое фиктивное изменение скорости, обязанное своим происхождением кривизне индивидуальных поровых каналов. В струйках-проекциях изменение скорости жидкости вдоль их длины естественно учесть формулой, которая может быть обоснована соображениями размерностей: $V = V_n \Phi(n / R)$, где V_n — среднее в поперечном сечении индивидуальной струйки значение скорости жидкости в месте входа в индивидуальный поровой канал (и, следовательно, в начале струйки-проекции); индекс n в дальнейшем будем опускать; n — расстояние вдоль струйки-проекции, отсчитываемое от места входа жидкости в поровой канал; R — радиус кривизны индивидуального порового канала; $\Phi(\zeta)$ — некоторая универсальная безразмерная функция, убывающая с ростом $\zeta = n / R$ (при $\zeta = 0$, $\Phi = 1$), причем величину n следует связывать с расстоянием вдоль направления V_n, на котором функции $\Phi(\zeta)$ убывает. Первая и вторая производные по n в (8) выразятся тогда формулами

$$\frac{\partial V^2}{\partial n} = \frac{V^2}{R}\frac{\partial \Phi^2(\zeta)}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = \frac{V}{R^2}\frac{\partial^2 \Phi(\zeta)}{\partial \zeta^2}$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (8) можно выразить через используемое в теории труб соотношение

$$(\partial V_i / \partial r)_w = -cV / r_i$$

где в случае параболического профиля скорости $c = \mathrm{const}$. В общем случае, когда профиль скорости в поперечном сечении канала нельзя считать параболическим, величина c, как было отмечено выше, вообще говоря, является функцией числа Рейнольдса индивидуального порового канала $c = c(N_{Re})$.

Используя эти два замечания и умножая уравнение (8) на $\cos\varphi\cos\psi$, где φ и ψ по-прежнему углы в полярной и азимутальной плоскостях между направлением оси индивидуального цилиндра и направлением среднего переноса жидкости x, получим проекцию уравнения (8) на направление x

$$\cos\varphi\cos\psi\frac{\partial}{\partial t}[\pi r_i^2\rho V\Phi] + \cos\varphi\cos\psi\left[\pi r_i^2\rho V^2 R^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right] =$$
$$= -\cos^2\varphi\cos^2\psi\frac{\partial p}{\partial x}\pi r_i^2 + \mu\cos\varphi\cos\psi\left[\pi r_i^2\rho V R^{-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}\right] - \frac{\mu c}{r_i^2}\cos\varphi\cos\psi[\pi r_i^2\rho V\Phi]$$

Осредняя это уравнение по радиусу кривизны поровых каналов и по относительной длине струек-проекций $\zeta = n / R$, получим уравнение для некоторых средних величин V, $\langle\Phi(\zeta)\rangle$

$$\cos\varphi\cos\psi\frac{\partial}{\partial t}[\pi r_i^2\rho V] + \cos\varphi\cos\psi[\pi r_i^2\rho V^2]\frac{c_1}{\langle R\rangle} = -\cos^2\varphi\cos^2\psi\frac{\partial p}{\partial x}\pi r_i^2\Phi^{-1} +$$
$$+ \mu\cos\varphi\cos\psi[\pi r_i^2\rho V]\frac{c_2}{\langle R^2\rangle} + \mu\frac{c}{r_i^2}\cos\varphi\cos\psi[\pi r_i^2\rho V] \qquad (9)$$
$$c_1 = \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right\rangle, \qquad c_2 = \left\langle\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}\right\rangle$$

где $\langle R\rangle$ — средний радиус кривизны индивидуальных поровых каналов; c_1, c_2 — постоянные статистические характеристики структуры данного пористого материала. При выводе уравнения (9) принято, что движение жидкости в пористом материале происходит под действием градиента давления, поэтому направление среднего переноса совпадает с градиентом осредненного давления. Умножая уравнение (9) на произведение $mf(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)$, интегрируя его по r от 0 до ∞, по φ от $-{}^1/_2\pi$ до ${}^1/_2\pi$, по ψ от $-{}^1/_2\pi$ до ${}^1/_2\pi$ и разделив его правую и левую части на F, получим в соответствии с тем как были введены выше выражения для средних скоростей уравнения движения фильтрующейся жидкости для осредненного режима в направлении среднего переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle + c_1\frac{\langle u^2\rangle}{\langle R\rangle} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}F_x + \mu c_2\frac{\langle u\rangle}{\langle R^2\rangle} - \mu c R_x^{-2}\langle u\rangle \qquad (10)$$
$$F_x = \langle\Phi\rangle^{-1}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\cos^2\varphi\cos^2\psi f_1(\varphi)f_2(\psi)\,d\varphi\,d\psi$$
$$R_x^2 = \int_0^\infty\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2V\cos\varphi\cos\psi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\times$$
$$\times\left[\int_0^\infty\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} V\cos\varphi\cos\psi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\right]^{-1}$$

где c — обсуждавшийся выше эмпирический коэффициент, усредненный по всем возможным струйкам, которые могут проходить через фиксированную точку. Следовательно, в данном случае величина c зависит от числа Рейнольдса фильтрационного потока, однако, как следует из измерений [6–9], величину c можно каждый раз считать практически постоянной и связывать с коэффициентом проницаемости пористого материала, т. е. с его структурой.

Умножая уравнение (8) на $\sin\varphi$, получим его проекцию на ось z и аналогичным предыдущему путем получим уравнения для $\langle w\rangle^+$ и $\langle w\rangle^-$ в соответствии с операцией, которой эти величины были введены

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w\rangle^\pm + c_1\frac{\langle w^2\rangle^\pm}{\langle R\rangle} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}F_z + \mu c_2\frac{\langle w\rangle^\pm}{\langle R^2\rangle} - \mu c R_z^{-2}\langle w\rangle^\pm \qquad (11)$$
$$F_z = \langle\Phi\rangle^{-1}\int_0^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi f_1(\varphi)f_2(\psi)\,d\varphi\,d\psi$$
$$R_z^2 = \int_0^\infty\int_0^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^2V\sin\varphi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\times$$
$$\times\left[\int_0^\infty\int_0^{1/2\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} V\sin\varphi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\right]^{-1}$$

Аналогичные уравнения для $\langle v\rangle^+$ и $\langle v\rangle^-$ получаются таким же образом после умножения уравнения (8) на $\cos\varphi\sin\psi$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v\rangle^{\pm}+c_1\frac{\langle v^2\rangle^{\pm}}{\langle R\rangle}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}F_y+\mu c_2\frac{\langle v\rangle^{\pm}}{\langle R^2\rangle}-\mu c R_y^{-2} \tag{12}$$

$$F_y=\langle\Phi\rangle^{-1}\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}\int\limits_{0}^{{}^1/_2\pi}\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi f_1(\varphi)f_2(\psi)\,d\varphi\,d\psi$$

$$R_y^2=\int\limits_0^\infty\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi}r^2V\cos\varphi\sin\psi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^\infty\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi}V\cos\varphi\sin\psi f(r)f_1(\varphi)f_2(\psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi\right]^{-1}$$

Нетрудно видеть, что формула (10), написанная для направления среднего переноса, совпадает по своему виду с формулой нелинейного закона сопротивления [5—9]. Действительно, перепишем формулу (10) в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\left[\frac{c}{R_x^2}-\frac{c_2}{\langle R^2\rangle}\right]\frac{\mu\rho}{F_x}\langle u\rangle+\frac{c_1}{F_x}\frac{\rho\langle u^2\rangle}{\langle R\rangle}+\frac{\rho}{F_x}\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle \tag{13}$$

Изображая величину V в предыдущих формулах в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одного аргумента $V=V_0\widetilde{\Phi}(r)\widetilde{\Phi}_1(\varphi)\widetilde{\Phi}_2(\psi)$, где V_0 — величина, зависящая только от вызывающей движение силы, получим в соответствии с операциями, которыми вводятся величины $\langle u\rangle$ и $\langle u^2\rangle$, пропорциональность $\langle u\rangle^2$ и $\langle u^2\rangle$; $\langle u^2\rangle=c_3\langle u\rangle^2$, где c_3 — коэффициент, зависящий только от структуры пористого материала. Переходя к стационарному случаю с учетом последнего замечания, интерпретируем коэффициенты в формуле нелинейного закона сопротивления, сравнивая их с соответствующими коэффициентами в формуле (13) (k — коэффициент проницаемости)

$$k=\frac{F_x}{\rho}\left[\frac{c}{R_x^2}-\frac{c_2}{\langle R^2\rangle}\right]^{-1},\qquad l=(c_1c_3)^{-1}F_x\langle R\rangle$$

Последнее соотношение подтверждает проверявшуюся экспериментально [6—9] гипотезу о независимости параметра l от числа Рейнольдса потока.

От уравнений (10)—(13), написанных для средней скорости потока, совпадающей по направлению с градиентом давления в жидкости, можно перейти к уравнению, написанному для составляющей средней скорости по некоторому произвольному направлению. Для этого, например, уравнение (13) должно быть записано в новой прямоугольной системе координат x', z', y', ось x' которой образует с осью x углы φ_0 и ψ_0, где φ_0 и ψ_0 имеют смысл тех же полярных и азимутальных углов φ и ψ, которые фигурируют в изложенной выше фильтрационной модели при учете направлений индивидуальных струек в пространстве. Примем ось x' новой системы координат, совпадающей с направлением n. Введем в системе x', z', y' полярный и азимутальный углы φ' и ψ' точно так же, как были введены в системе x, z, y углы φ и ψ. Уравнение (13) тогда в новой системе координат сохранит свой вид и в новых обозначениях перепишется как

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_n=\left[\frac{c}{R_{x'}^2}-\frac{c_2}{\langle R^2\rangle}\right]\frac{\mu\rho}{F_{x'}}\langle u\rangle_n+\frac{c_1}{F_{x'}}\frac{\rho\langle u^2\rangle}{\langle R\rangle}+\frac{\rho}{F_{x'}}\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle \tag{14}$$

Однако в коэффициентах $F_{x'}$ и $R_{x'}^2$ должны быть изменены пределы интегрирования по углам φ' и ψ'. Если, например, $\varphi_0>0$, то интегрирование по φ' должно проводиться в пределах $-{}^1/_2\pi-\varphi_0<\varphi'<{}^1/_2\pi-\varphi_0$. При этом интервал $-{}^1/_2\pi-\varphi_0<$ $<\varphi'<-{}^1/_2\pi$ соответствует струйкам, имеющим составляющую скорости в направлении, противоположном n, поэтому учет этих струек в общей оценке потока в направлении n ведет к уменьшению его величины, а в случае изотропного пористого материала действие этих струек компенсируется струйками, имеющими угол φ' в пределах $-{}^1/_2\pi<\varphi'<-{}^1/_2\pi+\varphi_0$.

Заметим, что интервал ${}^1/_2\pi-\varphi_0<\varphi<{}^1/_2\pi$ в интегральной оценке потока по направлению n не участвует, поскольку соответствующие ему струйки имеют составляющую скорости в сторону, противоположную градиенту осредненного давления в жидкости. Рассуждая аналогичным образом, получим, что при $\varphi_0<0$ интегрирование по φ' должно проводиться в пределах $-{}^1/_2\pi-\varphi_0<\varphi'<{}^1/_2\pi+\varphi_0$, если $\psi_0>0$, то $-{}^1/_2\pi-\psi_0<\psi'<{}^1/_2\pi-\psi_0$ и если $\psi_0<0$, то $-{}^1/_2\pi-\psi_0<\psi'<{}^1/_2\pi+\psi_0$. Следовательно, отклонение направления n от оси x связано не только с уменьшением величины $(\partial p / \partial x)$ в уравнении (13), но и с изменением коэффициента F_x' и $R_x'^{-2}$, являющихся функциями углов φ_0 и ψ_0.

Таким образом, формула нелинейного закона сопротивления, сохраняя свой общий вид, изменяется через входящие в нее коэффициенты в зависимости от выбора направления интересующего нас фильтрационного потока по отношению к направлению среднего переноса.

Наряду с уравнениями движения осредненного режима фильтрации (10)—(14) в некоторых задачах может найти применение уравнения свободной термической конвекции, вывод которого проводится аналогично. В уравнении (8) для этого в соответствии с теорией свободной конвекции [10] следует заменить величину

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{на} \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial n} - \beta g T' \cos\varphi \cos\psi$$

где T' — превышение в фиксированной точке температуры жидкости над некоторой средней температурой, которое и обусловливает возникновение свободной конвекции, p' — отклонение давления от его среднего значения, связанное с конвективным движением жидкости, β — коэффициент теплового расширения жидкости, g — ускорение силы тяжести. Умножая полученное таким образом из (8) уравнение на произведение $m \cos\varphi \cos\psi f(r) f_1(\varphi) f_2(\psi)$, интегрируя его по углам φ и ψ так же как и при выводе уравнения (10), и разделив на ρF, получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle + c_1\frac{\langle u^2\rangle}{\langle R\rangle} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}F_x - \beta g T' F_x + \mu c_2\frac{\langle u\rangle}{\langle R^2\rangle} - \mu c R_x^{-2}\langle u\rangle$$

где T' имеет смысл математического ожидания превышения температуры в фиксированной точке над некоторой средней температурой, соответствующей термическому равновесию.

Поступило 1 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанский А. Б. Статистическая модель переноса тепла фильтрацией. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Josselinde Jond G. Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits. Frans. Amer. Geophys. Union, 1958, vol. 39.
3. Саффман П. Теория дисперсии в пористой среде. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., М., Изд-во иностр. лит., 1960, № 2.
4. Казанский А. Б., Монин А. С. О форме дымовых струй. Изв. АН СССР, Сер. геофизическая, 1957, № 8.
5. Минский Е. М. Элементы статистического исследования фильтрационных движений. М., Тр. Всес. н.-и. ин-та газов 1957, вып. 2 (10).
6. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М.— Л., Гостоптехиздат, 1949.
7. Шейдегер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
8. Чарный И. А. О притоке к несовершенным скважинам при одновременном существовании различных законов фильтрации в пласте. Изв. АН СССР, ОТН, 1950, № 6.
9. Минский Е. М. О притоке жидкости или газа к несовершенным скважинам при нелинейном законе сопротивления. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 3.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕТОКОВ МЕЖДУ ПЛАСТАМИ

М. В. ЛУРЬЕ, В. М. МАКСИМОВ

(*Москва*)

Большой интерес в теории фильтрации представляет задача движения жидкости в неоднородном по проницаемости пласте. В строгой постановке такая задача требует решения неодномерных уравнений фильтрации, что вызывает большие математические затруднения. Для упрощения исследований обычно применяется осреднение характеристик течения по мощности пластов, которые моделируют рассматриваемый неоднородный пласт. При этом скорости перетоков (вертикальные составляющие скоростей фильтрации на границах раздела пластов) принимаются пропорциональными