

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

М. Г. АЛИШАЕВ, В. М. ЕНТОВ, А. Е. СЕГАЛОВ

(Махачкала, Москва)

При решении плоских задач теории фильтрации важное значение имеет исследование поведения решения вблизи особых точек границы области движения (угловые точки; точки смены граничных условий и т. д.) и на бесконечности (см., например [1]). В предлагаемой работе такое исследование проводится для задач нелинейной фильтрации.

Так же, как и в аналогичных задачах газовой динамики [2, 3] и нелинейной теории упругости [4] для отыскания особых решений используется переход на плоскость годографа скорости фильтрации. Приводятся примеры, относящиеся в основном к фильтрации с предельным градиентом.

1. Общие соотношения. Рассмотрим плоскую задачу фильтрации при нелинейном законе вида

$$\text{grad } H = -\Phi(w)w/w \quad (1.1)$$

Здесь H — приведенный напор, w — скорость фильтрации. Принимая за независимые переменные w и угол θ , образуемый скоростью фильтрации с осью x , получим для функции тока ψ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) + \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим элементарное решение уравнения (1.2) вида

$$\psi(w, \theta) = P(w) \sin r\theta \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.2), получим для $P(w)$ уравнение

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{dP}{dw} \right) - \frac{r^2\Phi(w)}{w^2} P = 0 \quad (1.4)$$

Пусть $\Phi'(w) \sim w^{c-1}$ ($c > 0$) при $w \rightarrow \infty$.

Тогда при $w \rightarrow \infty$ можно выбрать линейно независимые решения уравнения (1.4), которые ведут себя как w^{s_1} и w^{s_2} , где $s_{1,2}$ — корни уравнения

$$s^2 - (1-c)s - cr^2 = 0, \quad s_{1,2} = 1/2(1-c) \mp \sqrt{1/4(1-c)^2 + cr^2} \quad (1.5)$$

Одно из этих решений при $w \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а другое неограниченно возрастает.

Будем обозначать убывающее на бесконечности решение через

$$P_1(w) \sim w^{s_1} \quad (s_1 < 0)$$

Нетрудно видеть, что при любом виде закона фильтрации, удовлетворяющем естественным условиям

$$\Phi(0) \geq 0, \quad \Phi'(w) \geq 0$$

решение $P_1(w)$ не меняет знака и монотонно (очевидно, его можно считать положительным и монотонно убывающим). Сказанное следует из того, что решение уравнения (1.4) не может иметь положительный максимум и от-

рицательный минимум. В результате существует (конечный или бесконечный) предел

$$0 < \lim_{w \rightarrow 0} P_1(w) = A_1 \leq \infty \quad (1.6)$$

Второе линейно-независимое решение уравнения (1.4)

$$P_2(w) = -P_1(w) \int_0^1 \frac{w\Phi'(w)dw}{\Phi^2(w)P_1^2(w)} + CP_1(w) \quad (1.7)$$

Пусть функция $w\Phi'(w)\Phi^{-2}(w)P_1^{-1}$ интегрируема в нуле. (В силу (1.6) для этого достаточно, например, интегрируемости $w\Phi'(w)\Phi^{-2}(w)$). Тогда, полагая

$$C = \int_0^1 \frac{w\Phi'(w)dw}{\Phi^2(w)P_1^2(w)}$$

получим в силу монотонности P_1 решение, обращающееся в нуль при $w = 0$

$$P_2(w) = P_1(w) \int_0^w \frac{w\Phi'(w)dw}{\Phi^2(w)P_1^2(w)} \leq \int_0^w \frac{w\Phi'(w)dw}{\Phi^2(w)P_1(w)} \quad (1.8)$$

Функция $P_2(w)$ монотонно возрастает при $w \rightarrow \infty$ и $P_2(w) \sim w^{s_2} \rightarrow \infty$. Делая более детальные предположения относительно поведения функции $\Phi(w)$ при $w \rightarrow 0$, можно уточнить поведение основных решений P_1 и P_2 в нуле. Рассмотрим теперь физическую интерпретацию решений вида (1.3). Решение

$$\psi = P_2(w) \sin r\theta \quad (1.9)$$

обращается в нуль при значениях $\theta = 0, \theta = \theta_0 = \pi/r$ и положительно при $0 < \theta < \theta_0$. Рассмотрим отвечающую этому решению картину на физической плоскости xy . Имеем [1]

$$dx = -\frac{\cos \theta}{\Phi(w)} dH - \frac{\sin \theta}{w} d\psi = -\frac{\cos \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dw - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\cos \theta \Phi(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} d\theta - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} dw \quad (1.10)$$

$$dy = -\frac{\sin \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dw + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\sin \theta \Phi(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} d\theta + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} dw$$

Входящие сюда производные $\partial H / \partial \theta, \partial H / \partial w$ определяются через $\partial \psi / \partial \theta$ и $\partial \psi / \partial w$ из канонической системы уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w}, \quad \frac{\partial H}{\partial w} = \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

На линии $\theta = 0$ имеем

$$dx = -\frac{r}{w^2} P_2(w) dw, \quad dy = 0 \quad (1.12)$$

Как следует из соотношения (1.12), физическая картина зависит от интегрируемости функции $w^{-2}P_2(w)$ при $w \rightarrow 0$ и при $w \rightarrow \infty$. Согласно сказанному

$$P_2(w) \sim w^{s_2} \quad (w \rightarrow \infty)$$

где s_2 дается выражением (1.5). Очевидно, $s_2 > 1$ при $r > 1$ и $s_2 < 1$ при $r < 1$. Таким образом, интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{P_2(w)}{w^2} dw \quad (1.13)$$

сходится на верхнем пределе при $r < 1$ и расходится при $r > 1$.

Если $\Phi(0) = 0$ (предельный градиент отсутствует) и $\Phi'(w) \sim w^{b-1}$ ($b > 0$) при $w \rightarrow 0$, то определенные выше решения P_1 и P_2 соответственно возрастают и убывают как степени w , причем имеют место соотношения, аналогичные (1.5). Таким образом

$$P_2(w) \sim w^{q_2}, \quad q_2 = \frac{1-b}{2} + \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + br^2}$$

При $r > 1$ имеем $q_2 > 1$ и интеграл (1.13) сходится на нижнем пределе; при $r < 1$ имеем $q_2 < 1$ и интеграл на нижнем пределе расходится.

Пусть теперь

$$\Phi(0) = \lambda > 0, \quad \Phi'(w) \sim w^{b-1} \quad (b > 0)$$

Тогда в силу (1.8)

$$P_2(w) \leq \text{const} \frac{w^{b+1}}{P_1(w)\lambda^2}$$

и интеграл (1.13) сходится на нижнем пределе при любых значениях r .

Таким образом, интеграл (1.13) сходится по крайней мере на одном пределе.

Пусть $r < 1$. Примем тогда за начало координат в физической плоскости точку, отвечающую $w = \infty$, $\theta = 0$. Для точек линии $\theta = 0$ имеем

$$x = r \int_w^{\infty} \frac{P_2(w)}{w^2} dw, \quad y = 0 \quad (1.14)$$

При изменении w от ∞ до нуля $x(w)$ описывает отрезок прямой

$$0 < x \leq r \int_0^{\infty} \frac{P_2(w)}{w^2} dw \quad (1.15)$$

При отличном от нуля предельном градиенте ($\Phi(0) = \lambda$) этот отрезок конечен; при $\Phi(0) = 0$ он превращается в полупрямую $0 < x < \infty$. Рассмотрим теперь образ линии $w = \text{const}$, $0 < \theta < \theta_0$. Имеем вдоль нее

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{r \sin \theta \cos r\theta P_2(w)}{w} d\theta + \frac{\cos \theta \sin r\theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} P_2'(w) d\theta \\ dy &= r \cos \theta \cos r\theta \frac{P_2(w)}{w} d\theta + \frac{\sin \theta \sin r\theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} P_2'(w) d\theta \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из сходимости интеграла (1.14) следует, что при $w \rightarrow 0$ правая часть соотношения (1.16) стремится к нулю. Таким образом, «отрезок» $0 < \theta < \theta_0$, $w = \infty$ на плоскости годографа отображается в точку $x = y = 0$; соответственно, линия $\theta = \theta_0$ отображается в отрезок (или полупрямую)

$$x = -t \cos \theta_0, \quad y = t \sin \theta_0, \quad 0 \leq t \leq r \int_0^{\infty} \frac{P_2(w) dw}{w^2} \quad (1.17)$$

Чтобы рассмотреть поведение линий $w = \text{const}$ при $w \rightarrow 0$, заметим, что из (1.4) следует:

$$\frac{\Phi(w)}{w\Phi'(w)} \frac{dP}{dw} = \frac{1}{\Phi(w)} \left[r^2 \int \frac{\Phi(u)}{u^2} P(u) du + \text{const} \right] \quad (1.18)$$

В результате если $\Phi(0) = \lambda > 0$ и интеграл (1.13) сходится на нижнем пределе, то существует конечный предел

$$\chi = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Phi(w)}{w\Phi'(w)} \frac{dP_2}{dw} \quad (1.19)$$

Поскольку при этом также $P_2(w) / w \rightarrow 0$, существует предельная линия $w = 0$, определяемая уравнениями

$$dx = \chi \cos \theta \sin r\theta d\theta, \quad dy = \chi \sin \theta \sin r\theta d\theta \quad (1.20)$$

На предельной линии $\psi = 0$, так как $P_2(0) = 0$.

Если же $\Phi(0) = 0$, то при $w \rightarrow 0$ величины $P_2(w) / w$ и $\Phi(w)P_2'(w) / (w\Phi'(w))$ неограниченно возрастают, и предельной линии нет. Таким образом, рассмотренный случай отвечает течению в «петле», образованной линией тока $\psi = 0$. В двойной точке этой линии (начале координат) функция тока имеет особенность. Описанная картина отвечает течению, создаваемому обобщенным диполем, заключенным внутри угла раствором $\theta_0 - \pi$.

Если $r > 1 (\theta_0 < \pi)$, то интеграл (1.13) расходится на верхнем пределе, но заведомо сходится на нижнем. Принимая за начало координат точку, в которой $\theta = 0, w = 0$ и повторяя проведенные выше рассуждения, убедимся, что решение (1.9) при $r > 1$ отвечает течению между двумя полупрямыми, расположенными под углом $\pi - \theta_0$

(«внутреннее обтекание угла»), причем при $\Phi(0) = 0$ течение существует вплоть до вершины угла, а при $\Phi(0) = \lambda > 0$ вблизи вершины образуется застойная зона, а течение ограничено предельной линией $w = 0$, сопрягающей стороны угла как в примере фиг. 1.

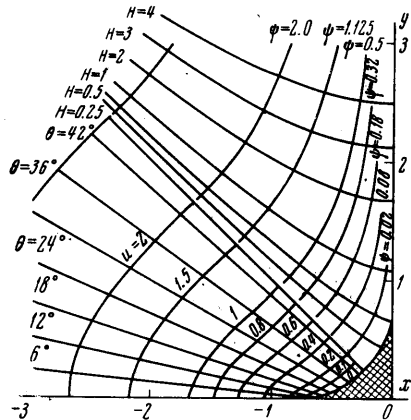
Если за основное решение взято убывающее при $w \rightarrow \infty$ решение $P_1(w)$, то интеграл (1.13) при всех r сходится на верхнем пределе и расходится на нижнем. Если $r > 1 (\theta_0 < \pi)$ то, как нетрудно убедиться, функция

$$\psi = P_1(w) \sin r\theta \quad (1.21)$$

определяет внешнее обтекание угла раствором $\pi - \theta_0$. При этом застойная зона не образуется вне зависимости от значения $\Phi(0)$.

Если $P_1(w) \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow 0$, то суммарный расход потока бесконечен; если же $P_1(0) < \infty$, то суммарный расход конечен, что является специфической особенностью задач внешнего обтекания с предельным градиентом.

Если $r \rightarrow 1$, стороны угла смыкаются, и задача переходит в задачу об обтекании пластины. Наконец, при $r < 1$ стороны угла «меняются местами», и картина течения в физической плоскости становится неоднолист-



Фиг. 1

ной. Тем не менее, ей можно придать определенный физический смысл при $1/2 < r < 1$ ($\pi < \theta_0 < 2\pi$). Заметим для этого, что линия $\theta = 1/2\theta_0$ представляется на физической плоскости прямой, расположенной под углом $1/2(\pi + \theta_0)$ к прямой, отвечающей $\theta = 0$, причем при $\theta = 1/2\theta_0$ напор H сохраняет постоянное значение. Таким образом, внешнее обтекание угла $\pi - \theta_0$ можно рассматривать также, как течение в угле раствором $1/2(\pi + \theta_0)$, если одна из сторон непроницаема, а на другой поддерживается постоянный напор. При такой интерпретации можно рассматривать значение $\theta_0 \leq 2\pi$ (см. фиг. 5).

2. Фильтрация с предельным градиентом. Внутреннее обтекание. Будем рассматривать фильтрацию с предельным градиентом

$$\Phi(w) = w + \lambda \quad (w \geq 0), \quad \Phi'(w) \equiv 1 \quad (2.1)$$

Каноническая система уравнений (1.11) может быть записана в виде

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{u + 1}{u^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{(u + 1)^2}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad u = \frac{w}{\lambda} \quad (2.2)$$

Основные решения $P_1(w)$ и $P_2(w)$ выражаются через гипергеометрические функции в виде

$$P_1(w) = (u + 1)^{-r} F(r - 1, r, 2r + 1, 1 / (u + 1)) \quad (2.3)$$

$$P_2(w) = u^2 F(2 - r, 2 + r, 3, -u)$$

Рассмотрим подробнее решения вида

$$\psi = P_2(u) \sin r\theta = Qu^2 F(2 - r, 2 + r, 3, -u) \sin r\theta \quad (2.4)$$

Как указано выше, это решение при $r > 1$ соответствует внутреннему обтеканию угла, а при $r < 1$ — обобщенному диполю.

Используя каноническую систему (2.2), получим

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Qr(u + 1)F_2 \cos r\theta, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -Q(u + 1)^2(2F_2 + uF_2') \sin r\theta \quad (2.5)$$

причем ради краткости будем обозначать

$$F_k = F(k - r, k + r, k + 1, -u) \quad (2.6)$$

Интегрируя второе из соотношений (2.5) и учитывая, что из соображений симметрии $H = \text{const} = 0$ при $\theta = 1/2\theta_0$, имеем

$$H = r^{-1}Q(u + 1)^2(2F_2 + uF_2') \cos r\theta \quad (2.7)$$

Если воспользоваться тождеством, которое легко проверить непосредственно

$$F(a, b, c, z) = F(a, b, c + 1, z) + c^{-1}zF'(a, b, c + 1, z) \quad (2.8)$$

и одной из формул Куммера [5]

$$F(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z) \quad (2.9)$$

то выражение (2.7) можно представить в виде

$$H = 2Qr^{-1}F(-r, r, 2, -u) \cos r\theta \quad (2.10)$$

Координаты x и y физической плоскости можно найти по формулам (1.10), которые для фильтрации с предельным градиентом примут вид

$$\lambda dx = \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u+1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \frac{u+1}{u} d\theta - \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \frac{du}{u} \quad (2.11)$$

$$\lambda dy = \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u+1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \frac{u+1}{u} d\theta + \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \frac{du}{u}$$

Подставим в эти формулы значение (2.4) и проинтегрируем. При интегрировании воспользуемся формулами (2.8), (2.9) и выберем постоянные интегрирования так, чтобы стороны обтекаемого угла пересекались в начале координат. Имеем (2.12)

$$\frac{2\lambda x}{Q} = \left(\frac{2}{r-1} F_1 + uF_2 \right) \cos(r-1)\theta + \left(\frac{2}{r+1} F_1 - uF_2 \right) \cos(r+1)\theta$$

$$\frac{2\lambda y}{Q} = - \left(\frac{2}{r-1} F_1 + uF_2 \right) \sin(r-1)\theta + \left(\frac{2}{r+1} F_1 - uF_2 \right) \sin(r+1)\theta$$

Из этих выражений нетрудно получить линии равного модуля скорости $u = \text{const}$ и линии равного наклона вектора скорости $\theta = \text{const}$. В частности, граница застойной зоны получится, если положить $u = 0$

$$\frac{\lambda x}{Q} = \frac{\cos(r-1)\theta}{r-1} + \frac{\cos(r+1)\theta}{r+1} \quad (2.13)$$

$$\frac{\lambda y}{Q} = - \frac{\sin(r-1)\theta}{r-1} + \frac{\sin(r+1)\theta}{r+1}$$

Полученное решение при $u \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\psi \approx \frac{2\Gamma(2r)}{\Gamma(2+r)\Gamma(1+r)} Qu^r \sin r\theta, \quad H \approx \frac{2Q\Gamma(2r)u^r \cos r\theta}{\Gamma(2+r)\Gamma(1+r)}$$

$$\frac{\lambda z}{Q} = \frac{\lambda(x+iy)}{Q} \approx \frac{2r\Gamma(2r)}{(r^2-1)\Gamma^2(1+r)} (ue^{-i\theta})^{r-1} \quad (2.14)$$

Эти соотношения показывают, что, как и следовало ожидать, для больших значений u решение переходит в соответствующее решение для потенциального течения с комплексным потенциалом

$$-H + i\psi = - \frac{2Q\Gamma(2r)}{\Gamma(2+r)\Gamma(1+r)} (ue^{-i\theta})^r = Cz^{\frac{r}{r-1}} \quad (2.15)$$

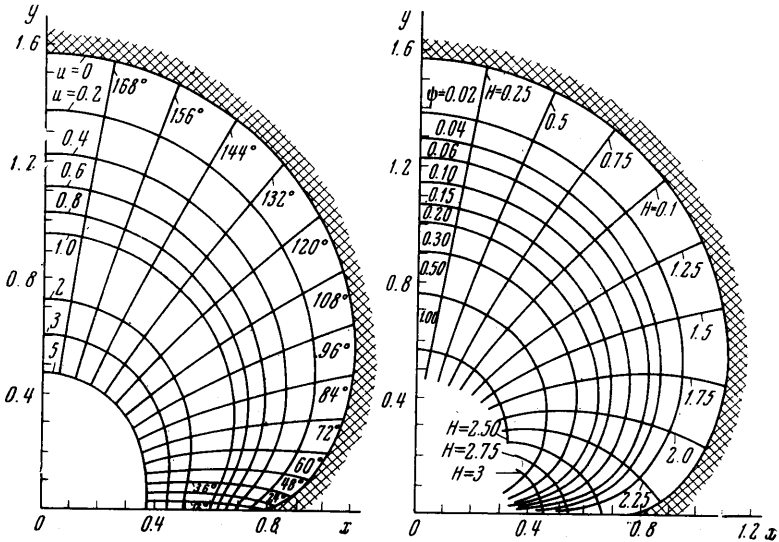
Постоянные Q и C связаны соотношением

$$Q = - \frac{\Gamma(1+r)\Gamma(2+r)C}{2\Gamma(2r)} \left(\frac{r-1}{r} \right)^r \left(-\frac{\lambda}{C} \right)^r \quad (2.16)$$

Рассмотренный случай внутреннего течения в клиновидных областях естественно возникает при изучении течений с более сложной геометрией при малых значениях предельного градиента λ [6]. В этом случае решение вдали от критических точек может быть в первом приближении найдено из уравнения Лапласа; решение вблизи критических точек определяется

приведенными здесь формулами. Соответствующие решения внешней и внутренней задач сопрягаются при помощи соотношения (2.16).

При $r > 1$ приведенные формулы дают картину обтекания угла, меньшего λ , как на фиг. 1. Определяемая формулами (2.13) граница застойной



Фиг. 2

зоны представляет собой гипоциклоиду, образуемую внутренним качением окружности радиуса ρ по окружности радиуса R , где

$$\rho = |Q| [\lambda(r+1)]^{-1} \quad R = 2r|Q| (\lambda|r^2 - 1|)^{-1} \quad (2.17)$$

Величины R и $R - 2\rho$ дают экстремальные линейные размеры застойной зоны. Вычисление площади застойной зоны согласно (2.13) приводит к результату

$$S = \frac{Q^2}{(r^2 - 1)\lambda^2} \left(\frac{\pi}{r} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{r} \right) \quad (2.18)$$

Приведем в качестве примера течение внутри прямого угла, когда $r = 2$ (В этом случае, как и для других целых $r \geq 2$, гипергеометрическая функция F_2 представляется многочленом степени $r - 2$). При $r = 2$ приведенные выше формулы приобретают особенно простой вид

$$Q = \frac{1}{4}\lambda^2 / C, \quad \psi = -Qu^2 \sin 2\theta, \quad H = Q(1 + u)^2 \cos 2\theta \quad (2.19)$$

$$\lambda x / Q = (1 + 2u) \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta, \quad \lambda y / Q = -(1 + 2u) \sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta$$

Застойная зона ограничена четвертью астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = (\lambda/3C)^{2/3}$ с площадью $\lambda^2 / 96C^2$.

На фиг. 1 изображены линии равного модуля скорости и линии равного наклона скорости в нижней части, линии тока и изобары — в верхней для течения внутри прямого угла при $Q = -2$, $\lambda = 1$.

При $r < 1$ получаем течение типа обобщенного диполя, как на фиг. 2. Граница застойной зоны теперь представляет собой эпициклоиду, образуемую внешним качением окружности радиуса ρ по окружности радиуса R , где R и ρ определяются теми же формулами (2.17). Зона течения ограничена и экстремальные ее размеры равны $R + 2\rho$ и R . На фиг. 2 изображена картина течения для диполя первого порядка, соответствующего $r = \frac{1}{2}$ ($Q = -0.35$, $\lambda = 1$). Гипергеометрические функции в данном

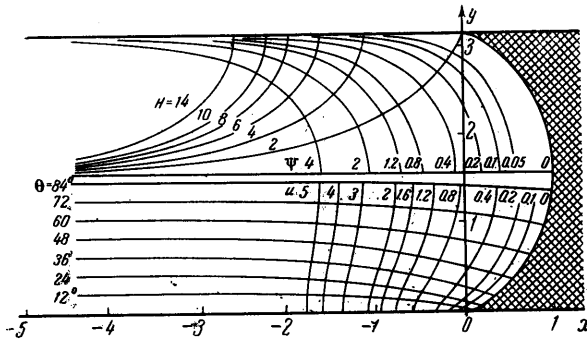
случае могут быть выражены через эллиптические интегралы, что и было использовано при проведении вычислений.

Формулы (2.4) и (2.10) сохраняют смысл и при $r = 1$; этот случай является переходным от течения, создаваемого диполем, к течению в угле, которое можно рассматривать как течение, создаваемое обобщенным диполем на бесконечности. При этом имеем

$$\psi = \frac{Qu^2}{1+u} \sin \theta, \quad H = Q(2+u) \cos \theta \quad (2.20)$$

$$\frac{\lambda x}{Q} = -\ln(1+u) + \frac{\sin^2 \theta}{1+u}, \quad \frac{\lambda y}{Q} = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2(1+u)} \quad (2.21)$$

что отвечает течению между двумя параллельными непроницаемыми границами с образующей застойной зоны и возвратного течения. На фиг. 3 показана картина течения ($Q = 1, \lambda = 1$). Указанную картину можно получить также непосредственным



Фиг. 3

предельным переходом из решения для внутреннего обтекания угла. При этом с уменьшением раствора угла протяженность застойной зоны увеличивается. Поэтому при предельном переходе необходимо фиксировать границы застойной зоны и допустить постепенный уход вершины угла в бесконечность.

3. Фильтрация с предельным градиентом. Внешнее обтекание. Рассмотрим течение, соответствующее второму основному решению

$$\psi = Q(u+1)^{-r} F(r-1, r, 2r+1, (u+1)^{-1}) \sin r\theta \quad (3.1)$$

Используя канонические уравнения (2.2) и формулы (2.11), получим для приведенного напора и координат

$$H = \frac{Q(u+1)^2}{ru} \left[\frac{F}{(u+1)^r} \right]' \cos r\theta \quad (3.2)$$

$$2\lambda x / Q = [(r+1)B - A] \cos(r-1)\theta + [(r-1)B + A] \cos(r+1)\theta$$

$$2\lambda y / Q = -[(r+1)B - A] \sin(r-1)\theta + [(r-1)B + A] \sin(r+1)\theta$$

$$A = \frac{F}{u(u+1)^r}, \quad B = \int_u^\infty \frac{F du}{u^2(1+u)^r} \quad (3.3)$$

$$F = F(r-1, r, 2r+1, 1/(u+1))$$

Для больших значений u , соответствующих окрестности начала координат на физической плоскости, решение асимптотически переходит в потенциальное течение с комплексным потенциалом $Cz^{r/(r+1)}$, причем

$$Q = C^{r-1} \lambda^{-r} (r/(r+1))^r \quad (3.4)$$

(внешнее обтекание угла $\pi + \theta_0$ потенциальным потоком)

Как следует из формулы (3.1), характерной особенностью течений с предельным градиентом будет конечность расхода при внешнем обтекании $\psi(0, \frac{1}{2}\theta_0) - \psi(\infty, \frac{1}{2}\theta_0) = Q$; величина Q представляет собой суммарный расход потока.

Перейдем к примерам. Для обтекания пластинки $r = 1$;

$$F = 1, \quad \psi = \frac{Q \sin \theta}{1 + u} \tag{3.5}$$

В результате имеем (считая пластинку расположенной вдоль отрицательной полуоси x , фиг. 4)

$$H = -\frac{Q \cos \theta}{u} \tag{3.6}$$

$$\frac{\lambda x}{Q} = \ln \frac{1 + u}{u} - \frac{1}{1 + u} - \frac{\cos^2 \theta}{u(1 + u)} \tag{3.7}$$

$$\frac{\lambda y}{Q} = \frac{\sin \theta}{2u(1 + u)}$$

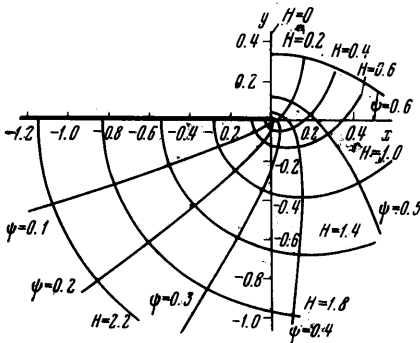
Построенная по формулам (3.5) — (3.7) картина обтекания показана на фиг. 4 ($Q = 1, \lambda = 1$).

Пусть теперь $r = \frac{1}{2}(\theta_0 = 2\pi)$

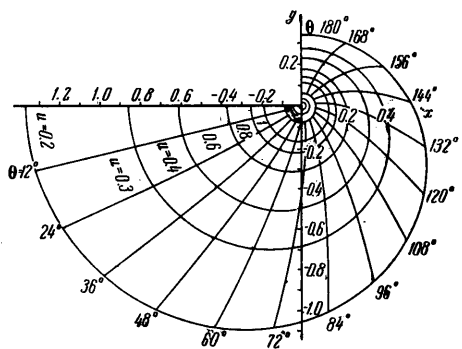
$$\psi = \frac{Q}{\sqrt{u + 1}} \times \tag{3.8}$$

$$\times F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{1 + u}\right) \sin \frac{\theta}{2}$$

Рассматривая лишь половину области течения ($0 < \theta < \pi$), получим картину притока к линии постоянного напора, расположенной под прямым углом к непроницаемой границе (фиг. 5); $Q = 0.75, \lambda = 1$.



Фиг. 4



Фиг. 5

При построении картины течения в физической плоскости удобно преобразовать выражение (3.8), выразив гипергеометрическую функцию через присоединенную функцию Лежандра. Имеем [5]

$$\frac{1}{\sqrt{u + 1}} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{1 + u}\right) \equiv \frac{4}{3} \sqrt{\frac{u}{1 + u}} P_{\frac{1}{2}}^1\left(1 + \frac{2}{u}\right) \tag{3.9}$$

после чего в выражениях (3.3) имеем

$$A = \frac{4}{3} u^{-1/2} (1 + u)^{-1/2} P_{1/2}^1 (1 + 2/u) \tag{3.10}$$

$$B = -\frac{4}{3} \int_u^\infty \frac{P_{1/2}^1 (1 + 2/u) du}{\sqrt{u^3 (1 + u)}}$$

При расчетах по формулам (3.10) были использованы таблицы присоединенных функций Лежандра [7] и асимптотические представления для этих функций.

4. Приток к трещине при двучленном законе фильтрации. В заключение приведем еще один пример, относящийся к нелинейному закону фильтрации вида

$$\Phi(w) = w + \beta w^2, \quad \Phi(u) = u + u^2, \quad u = \beta w \tag{4.1}$$

который отвечает сравнительно большим скоростям и встречается при изучении фильтрации газа (см., например, [8, 9]). Будем рассматривать приток к бесконечно тонкой трещине (линии постоянного напора), занимающей положительную полуось x . Нетрудно видеть, что течение в нижней полуплоскости совпадает с течением, возникающим при обтекании пластинки, занимающей отрицательную полуось x . Такое решение легко написать для произвольного закона фильтрации

$$\psi = Q \sin \theta / \Phi(u) \tag{4.2}$$

что можно проверить прямой подстановкой в уравнение (1.4) при $r = 1$. (Решения вида (4.2) по существу указываются уже в статье Ринглеба [2].)

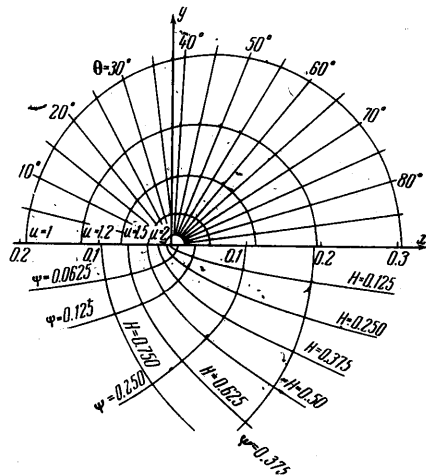
Используя (4.1), получим

$$H = -\frac{Q}{u} \cos \theta$$

$$\frac{x}{\beta Q} = \frac{\sin^2 \theta}{u^2 (u + 1)} - \frac{3}{2} - \ln \frac{1 + u}{u} +$$

$$+ \frac{2(1 + u)}{u} - \frac{1}{2} \frac{(1 + u)^2}{u^2} \tag{4.3}$$

$$\frac{y}{\beta Q} = -\frac{\sin 2\theta}{2u^2 (1 + u)}$$



Фиг. 6

Соответствующая картина течения показана на фиг. 6. ($\beta = 1, Q = 1$).

Авторы признательны И. И. Ереминой, Т. Н. Еричевой и Т. Н. Ивановой за помощь в проведении вычислений.

Поступило 25 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеориздат, 1952.
2. Ringleb F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasstromung. ZAMM, 1940, Bd. 20, H. 4.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехтеориздат, 1950.
4. Neuber H. Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 4.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
6. Ентов В. М., Салганик Р. Л. О методе малого параметра в задачах фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
7. Tables of associated Legendre functions. N. Y., Columbia Univ. Press, 1945.
8. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
9. Минский Е. М. О турбулентной фильтрации газа в пористых средах. В сб.: «Вопросы добычи, транспорта и переработки природных газов», М.—Л., Гостоптехиздат, 1951.