

## УДАР ШАРА, ПОГРУЖЕННОГО В ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. С. ВОРОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются задачи о горизонтальном и вертикальном гидродинамическом ударе шара, погруженного в слой жидкости конечной глубины. Для горизонтального удара рассмотрены два предельных случая, соответствующих числам Фруда, равным нулю (задача (1) и бесконечности (задача 2)).

Для задачи 1 на свободной поверхности выполняется условие  $\partial\varphi/\partial z = 0$  (задача гидродинамически эквивалентна задаче о продольном обтекании шара, произвольно расположенного в слое).

Для задачи 2 на свободной поверхности выполняется условие  $\varphi = 0$ . Эта задача при отсутствии дна рассмотрена Э. Л. Блохом [1] и В. С. Сабаневым [2].

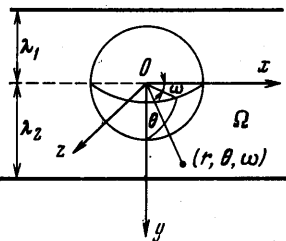
Рассмотрена также задача о вертикальном ударе шара, погруженного в слой жидкости конечной глубины.

Указанные задачи сводятся к решению некоторой бесконечной вполне регулярной системы алгебраических уравнений, причем система допускает разложение решения по степеням некоторого малого параметра; проводится численное исследование задач.

Исучено влияние дна на основные характеристики удара. Найдены коэффициенты присоединенных масс при ударе, распределение давлений по поверхности сферы. Рассмотрены предельные задачи, соответствующие бесконечной глубине жидкости.

1. Задача 1. Рассмотрим горизонтальный удар шара, погруженного в весьма тяжелую жидкость конечной глубины. Эта задача в безразмерных параметрах

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{h}, \quad y = \frac{y_1}{h}, \quad z = \frac{z_1}{h}, \\ \lambda &= \frac{a}{h^2}, \quad \varphi = \frac{\Phi_1}{uh} \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

сводится к отысканию гармонической в области  $\Omega_1$  функции  $\varphi$  по условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = -\lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{h_1}{h} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = \lambda_2, \quad \lambda_2 = \frac{h_2}{h} \\ \varphi &\rightarrow 0 \quad \text{при } \rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \cos\omega \sin\theta \quad \text{при } r = \lambda \end{aligned}$$

Здесь  $h$  — глубина слоя;  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от центра шара до свободной поверхности и дна соответственно;  $r$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  — сферические координаты точки

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

Область  $\Omega_1$  есть слой  $-\lambda_1 \leq y \leq \lambda_2$ , из которого выброшен шар  $r = \lambda$  (фиг. 1).

2. Для построения решения задачи используем метод отражений [3]. При этом приходим к определению гармонической в области  $\Omega_2$  функции

$\varphi$ , удовлетворяющей на каждой сфере граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_n} = \cos \omega \sin \theta_n$$

и исчезающей при  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ . Здесь  $r_n, \theta_n$  — сферические координаты точки относительно системы координат, оси которой параллельны осям основной системы  $Oxyz$ , а начало координат находится в центре  $n$ -й сферы.

Область  $\Omega_2$  — внешность цепочки сфер (фиг. 2). На фиг. 2  $\omega_0^*$  — сфера, являющаяся зеркальным изображением сферы  $\omega_0$  относительно свободной поверхности,  $\omega_{\pm n}, \omega_{\pm n}^*$  — сферы, центры которых расположены по оси  $y$  на расстоянии  $2n$  от центров сфер  $\omega_0$  и  $\omega_0^*$  соответственно.

3. Для отыскания  $\varphi$  введем систему функций  $\varphi_k$  посредством соотношений

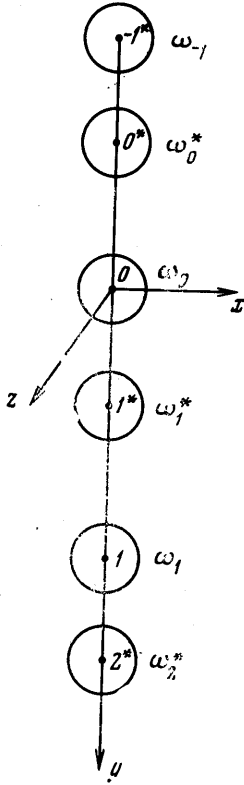
$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_k(x, y - 2n, z) \\ \chi_k(x, y, z) &= \frac{P_k^1(\cos \theta)}{r^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{P_k^1(\cos \theta^*)}{r^{*k+1}} \\ \varphi_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{P_k^1(\cos \theta_n)}{r_n^{k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k+1} \frac{P_k^1(\cos \theta_n^*)}{r_n^{*k+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $P_k^1(x)$  — присоединенная функция Лежандра первого рода, определяемая по формуле

$$P_k^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{1/2m} \frac{d^m P_k}{dx^m} \quad (3.2)$$

Легко проверить, что  $\varphi_k$  — гармонические вне цепочки сфер функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \partial \varphi_k / \partial y &= 0 \text{ при } y = -\lambda_1, \frac{-\lambda_1 \pm 1}{2}, -\lambda_1 \pm 2, \dots \\ \varphi_k &\rightarrow 0 \text{ при } \rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$



Фиг. 2

Можно показать, что любую периодическую гармоническую в  $\Omega_2$  функцию можно представить в виде

$$\varphi = M_0 \varphi_0 + M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + \dots \quad (3.3)$$

При этом будут удовлетворены все граничные условия (1.2) кроме последнего. Доказательство этого факта рассмотрено в [3].

Значения  $M_k$  надо подобрать так, чтобы удовлетворялось граничное условие на сфере

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos \omega \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = \sqrt{1-x^2} \cos \omega \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) эквивалентно бесконечной системе относительно  $M_k$ , которую можно получить умножением (3.4) на  $P_1^1(x), P_2^1(x), \dots$  и

последующим интегрированием по переменной  $x = \cos \theta$  в пределах от  $-1$  до  $1$ . В результате для  $M_k$  получим систему

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k C_{pk} = b_p \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$$C_{pk} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_{p^1}(x) dx, \quad b_p = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_{p^1}(x) dx \quad (3.6)$$

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$b_p = 0 \quad \text{при } p \neq 1, \quad b_1 = -4/3 \quad (3.7)$$

Исследование бесконечной системы (3.5) можно произвести так же, как это сделано в [3]. При этом устанавливается, что система (3.5) вполне регулярна, если  $\lambda < \lambda^*$ , где  $\lambda^*$  некоторое число, зависящее от  $\lambda_1$ . Для вычисления  $C_{pk}$  разложим  $\varphi_k$  и  $\partial \varphi_k / \partial r$  по присоединенным функциям Лежандра первого рода. С этой целью приведем  $\varphi_k$  в формуле (3.1) к переменным  $r, \theta$ .

Воспользуемся формулами для преобразования шаровых функций при изменении системы координат, годными в окрестности основной сферы  $r < c_n$

$$\frac{P_k^1(x_n)}{r^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} r^s P_s^1(x) \frac{(k+s)!}{(s+1)! c_n^{k+s+1}} \quad (3.8)$$

$$\frac{P_k^1(x_{-n})}{r^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} r^s P_s^1(x) \frac{(k+s)! (-1)^{k+s}}{(s+1)! c_{-n}^{k+s+1}} \quad (3.9)$$

Способ получения этих разложений указан в [4]. В (3.8) и (3.9)  $c_n, c_{-n}$  — расстояния от начала координат до центров  $n$ -х сфер, расположенных соответственно на положительной и отрицательной оси  $y$

$$c_n = c_{-n} = 2n, \quad c_n^* = 2(n - \lambda_1), \quad c_0 = 2\lambda_1, \quad c_{-n}^* = 2(n + \lambda_1) \quad (3.10)$$

После указанных преобразований получаем

$$\varphi_k = \frac{P_k^1(x)}{r^{k+1}} + \sum_{s=1}^{\infty} b_{ks} r^s P_s^1(x) \quad (3.11)$$

где

$$b_{ks} = \frac{(+1)^{k+1} (k+s)!}{(k-1)! (s+1)! 2^{k+s+1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+s+1}} [1 + (-1)^{k+s}] + \right. \\ \left. + (-1)^{k+1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\lambda_1)^{k+s+1}} + (-1)^{k+s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\lambda_1)^{k+s+1}} \right] \right\} \quad (3.12)$$

Используя разложение (3.11) в формуле (3.6) и принимая во внимание ортогональность функций Лежандра в интервале  $-1 \leq x \leq 1$ , получаем

$$C_{pk} = \frac{2(p+1)!}{(2p+1)(p-1)} \left[ -\frac{(p+1)}{\lambda^{p+2}} \delta_{pk} + p\lambda^{p-1} b_{kp} \right] \quad (3.13)$$

$$\delta_{pk} = 0 \quad (p \neq k), \quad \delta_{pp} = 1$$

На основе (3.13) систему (3.5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} [-(p+1)\delta_{pk} + p\lambda^{2p+1}b_{kp}]M_k = -\lambda^3\delta_{p1} \quad (3.14)$$

Бесконечную систему (3.14) можно решать разложением  $M_k$  в ряды по степеням  $\lambda$

$$M_k = \lambda^3(M_{k0} + M_{k1}\lambda + M_{k2}\lambda^2 + \dots) \quad (3.15)$$

После обычной процедуры определения  $M_{ks}$  получаем формулу

$$M_k = \frac{k}{k+1} l_k \lambda^{2k+4} + \frac{1}{2} \lambda^3 \delta_{1k} \quad (3.16)$$

где

$$l_k = \frac{1}{2} b_{1k} + \frac{1}{4} b_{11} b_{1k} \lambda^3 + \frac{1}{3} b_{12} b_{2k} \lambda^5 + \frac{3}{8} b_{13} b_{3k} \lambda^7 + \\ + \frac{1}{6} b_{12} \lambda^8 (b_{1k} b_{21} + b_{11} b_{2k}) + \lambda^9 (\frac{1}{16} b_{11}^3 b_{1k} + \frac{2}{5} b_{14} b_{4k}) + \\ + (\frac{3}{16} b_{1k} b_{13} b_{31} + \frac{3}{16} b_{3k} b_{13} b_{11} + \frac{2}{9} b_{2k} b_{12} b_{22}) \lambda^{10} \quad (3.17)$$

Будем решать задачу с точностью до членов порядка  $\lambda^{16}$ . Тогда  $l_1$  обрывается на  $\lambda^{10}$  включительно,  $l_2$  — на  $\lambda^8$  и т. д.

$$M_7 = M_8 = \dots = 0$$

Удержанное количество членов в разложениях (3.17) обеспечивает достаточную точность решения задачи. Эту точность можно охарактеризовать следующим образом. Если подставить (3.17) в формулу (3.3), то получим функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме условия на сфере. Это условие выполнено с максимальной погрешностью 2.8% для весьма неблагоприятного случая  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda = 0.45$ . При удалении шара от стенок или одной из стенок погрешность в удовлетворении последнего условия резко падает.

4. Исследуем распределение давлений при ударе. Как известно, импульсивное давление определяется соотношением

$$P_i = -\rho \varphi_1 = -\rho u h \varphi \quad (\rho - \text{плотность жидкости})$$

Рассмотрим распределение давлений на поверхности сферы. Для этого, используя разложения  $M_k$ , представим функцию  $\varphi$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ , который имеет вид

$$\varphi = \frac{\lambda^3}{2r^2} P_1^4(x) \cos \omega + \lambda^3 \cos \omega \sum_{k=1}^6 \left[ r^k + \frac{k}{k+1} \lambda^{2k+1} r^{-(k+1)} \right] P_k^4(x) l_k + R(r, \lambda, \lambda_1) \cos \omega \quad (4.1)$$

Все члены разложения, входящие в первые два слагаемых, точные

$$R(r, \lambda, \lambda_1) = \sum_{s=1}^{13} r^s \lambda^3 P_s^4(x) \left[ l_s - \frac{b_{1s}}{2} - \sum_{k=1}^6 \frac{k}{k+1} \lambda^{2k+1} l_k b_{ks} \right] \quad (4.2)$$

В  $R(\lambda, \lambda_1)$  нужно удержать члены до  $\lambda^{16}$  включительно.

Формулой (4.1) удобно пользоваться для расчета давлений в области, прилегающей к сфере  $\omega_0$ . На самой сфере получаем

$$P_i = -\rho a u \cos \omega \left[ \frac{1}{2} P_1^4(x) + \sum_{k=1}^6 \frac{2k+1}{k+1} \lambda^{k+2} P_{k1}^4(x) l_k + \frac{R(\lambda, \lambda_1)}{\lambda} \right] \quad (4.3)$$

5. Присоединенную массу при ударе можно найти по формуле

$$m_+ = -\rho u^{-2} \int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_1} dS_1 \quad (5.1)$$

Интеграл (5.1) вычисляется по сфере, погруженной в жидкость. После вычисления интеграла получаем

$$m_+ = \frac{2}{3} \rho a^3 \pi [1 + 3\lambda^3 l_1 + 2\lambda^{14} f(\lambda, \lambda_1)] \quad (5.2)$$

где

$$f(\lambda, \lambda_1) = \frac{1}{4} b_{12} b_{11}^2 b_{21} + \frac{5}{12} b_{15} b_{51} + \frac{1}{32} \lambda b_{11}^5 + \\ + \frac{2}{5} \lambda b_{14} b_{41} b_{11} + \frac{1}{4} \lambda b_{13} b_{32} b_{21} + \frac{1}{4} \lambda b_{12} b_{23} b_{31} \quad (5.3)$$

Расчеты показывают, что последним членом в (5.2) можно пренебречь, причем ошибка не превышает 0.15% в столь неблагоприятном случае, когда  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ .

Коэффициент присоединенной массы, равный отношению присоединенной массы тела к массе жидкости, вытесненной смоченной поверхностью тела, определяется по формуле

$$\mu = 0.5 + 1.5\lambda^3 l_1 + \lambda^{14} f(\lambda, \lambda_1) \quad (5.4)$$

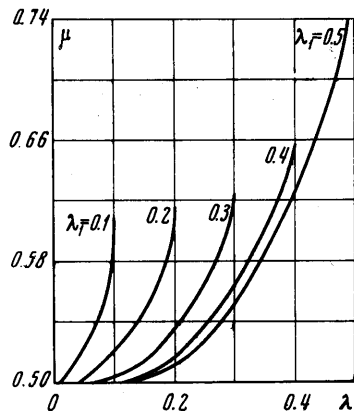
На фиг. 3 показана зависимость коэффициента присоединенной массы шара от  $\lambda_1$  для различных значений  $\mu$ . Максимальное значение  $\mu = 0.76693$  соответствует значениям  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.5$ .

6. Случай бесконечной глубины. В этом случае безразмерные параметры введем соотношениями

$$x = \frac{x_1}{h_1}, \quad y = \frac{y_1}{h_1}, \quad z = \frac{z_1}{h_1}, \\ \lambda = \frac{a}{h_1}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1}{\omega h_1} \quad (6.1)$$

где  $h_1$  — глубина погружения центра шара

$$\varphi_k = \frac{P_k^1(x)}{r^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{P_k^1(x^*)}{r^{*k+1}} \quad (6.2)$$



Фиг. 3

После приведения  $\varphi_k$  к переменным  $r$ ,  $\theta$  получаем

$$\varphi_k = \frac{P_k^1(x)}{r^{k+1}} + \sum_{s=1}^{\infty} r^s P_s^1(x) b_{ks}, \quad b_{ks} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} \frac{(k+s)! (-1)^{s+1}}{(s+1)! 2^{k+s+1}} \quad (6.3)$$

Следовательно, импульсивное давление на сфере и коэффициент присоединенной массы можно вычислить по формулам (4.3) и (5.4), если  $b_{ks}$  взять из (6.3).

7. Задача 2. В безразмерных параметрах (1.1) задача 2 сводится к отысканию гармонической в области  $\Omega_1$  функции  $\varphi$  по условиям (1.2), в которых первое условие заменяется в соответствии с изменением числа Фруда на условие

$$\varphi = 0 \quad \text{при } y = \lambda_1 \quad (7.1)$$

Систему функций  $\varphi_k$  вводим посредством соотношений

$$\varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{P_k^1(\cos \theta_n)}{r^{k+1}} + (-1)^k \frac{P_k^1(\cos \theta_n^*)}{r^{*k+1}} \right] \quad (7.2)$$

Применяя формулы (3.8) и (3.9), получаем для  $\varphi_k$  разложение (3.11)

$$b_{ks} = \frac{(-1)^{k+1}(k+s)!}{(k-1)!(s+1)!2^{k+s+1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{k+s+1}} \times \right. \\ \times [1 + (-1)^{k+s}] + (-1)^k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-\lambda_1)^{k+s+1}} + \right. \\ \left. \left. + (-1)^{k+s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+\lambda_1)^{k+s+1}} \right] \right\} \quad (7.3)$$

Проделав те же выкладки, что и в задаче 1, получим для определения импульсивного давления на сфере и коэффициента присоединенных масс формулы (4.3) и (5.4), причем коэффициенты  $b_{ks}$  находятся из (7.3).

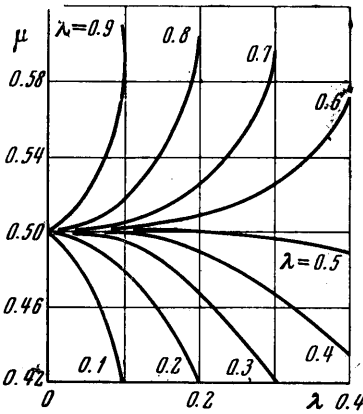
На фиг. 4 показана зависимость коэффициента присоединенной массы от  $\lambda$  для различных значений  $\lambda_1$ .

8. Случай бесконечной глубины. Решая задачу в безразмерных параметрах (6.1), введем  $\varphi_k$  при помощи соотношения (8.1)

$$\varphi_k = \frac{P_k^1(\cos \theta)}{r^{k+1}} + (-1)^k \frac{P_k^1(\cos \theta^*)}{r^{*k+1}} \quad (8.1)$$

После приведения к переменным  $r, \theta$  получаем разложение (3.11), в котором  $b_{ks}$  находятся по формуле

$$b_{ks} = \frac{(-1)^{k+1}(k+s)!(-1)^s}{(k-1)!(s+1)!2^{k+s+1}} \quad (8.2)$$



Фиг. 4

Следовательно, импульсивное давление на сфере и коэффициент присоединенной массы можно вычислить по формулам (4.3) и (5.4), если взять  $b_{ks}$  из (8.2).

$\lambda_1$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.5$
0.1 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.41934 0.61034				
0.2 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.48845 0.51234	0.42114 0.61677			
0.3 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.49666 0.50407	0.47398 0.53345	0.42272 0.62991		
0.4 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.49881 0.50221	0.49057 0.51783	0.46950 0.56685	0.43846 0.65846	
0.5 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.49983 0.50180	0.49865 0.51456	0.49589 0.55032	0.49312 0.62506	0.48335 0.76693
0.6 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.50085 0.50222	0.50689 0.51783	0.52454 0.56685	0.5705 0.65846	
0.7 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.50302 0.50407	0.52477 0.53345	0.59694 0.62991		
0.8 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.51144 0.51234	0.60868 0.61677			
0.9 $\left\{ \begin{array}{l} \mu' \\ \mu'' \end{array} \right.$	0.60977 0.61034				

9. В задачах 1 и 2 найдены коэффициенты присоединенных масс в двух предельных случаях, соответствующих числам Фруда, равным нулю и бесконечности. Соответствующие значения коэффициентов присоединенных масс приведены в таблице, в которой значение  $\mu'$  соответствует  $\varphi = 0$ ,  $\Phi = \infty$ , значение  $\mu''$  соответствует  $\partial\varphi/\partial z = 0$ ,  $\Phi = 0$ .

В промежуточных случаях, соответствующих конечному значению числа Фруда, коэффициент присоединенной массы  $\mu$  изменяется в пределах

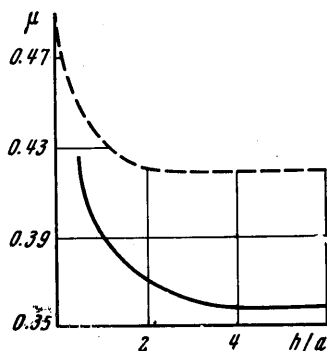
$$\mu' < \mu < \mu''$$

При  $\lambda_1 \rightarrow 1$  коэффициенты присоединенных масс совпадают, как и следовало ожидать.

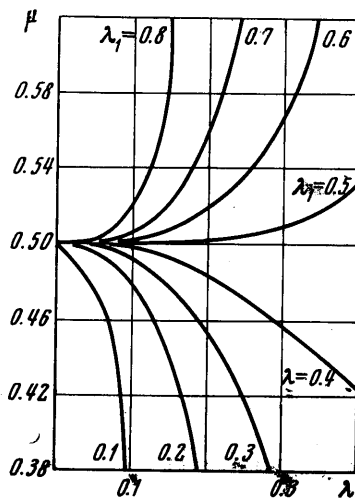
10. Задача 3. Рассмотрим вертикальный удар шара, погруженного в идеальную жидкость конечной глубины.

В безразмерных параметрах (1.1) задача сводится к отысканию гармонической в области  $\Omega_1$  функции  $\varphi$  по условиям (1.2), в которых последнее условие в связи с изменением граничного условия

на сфере принимает вид

$$\partial\varphi/\partial r = \cos\theta \text{ при } r = \lambda. \quad (10.1)$$


Фиг. 5



Фиг. 6

Для отыскания  $\varphi$  введем систему функций  $\varphi_k$  посредством соотношений

$$\varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{P_k(\cos\theta_n)}{r_n^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{P_k(\cos\theta_n^*)}{r_n^{*k+1}} \right] \quad (10.2)$$

Легло проверить, что  $\varphi_k$  — гармонические вне цепочки сфер функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= 0 && \text{при } y = -\lambda_1, -\lambda_1 \pm 2, -\lambda_1 \pm 4, \dots \\ \partial\varphi_k/\partial y &= 0 && \text{при } y = \pm 1 - \lambda_1, \pm 3 - \lambda_1, \dots \\ \varphi_k &\rightarrow 0 && \text{при } \rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Решение задачи ищем в виде

$$\varphi = M_0\varphi_0 + M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + \dots \quad (10.3)$$

Значения  $M_k$  подбираются так, чтобы удовлетворилось граничное условие на сфере

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k \frac{d\varphi_k}{dr} \Big|_{r=\lambda} = \cos\theta \quad (10.4)$$

Соотношение (10.4) эквивалентно бесконечной системе относительно  $M_k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k C_{pk} = b_p \quad (10.5)$$

$$C_{pk} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_p(x) dx, \quad b_p = \int_{-1}^1 P_1(x) P_p(x) dx \quad (10.6)$$

Произведя вычисления по последней формуле, получаем

$$b_p = 0 \quad \text{при } p \neq 1, \quad b_1 = 2/3, \quad (10.7)$$

Для вычисления  $C_{pk}$  разложим  $\Phi_k$  и  $\partial \Phi_k / \partial r$  по полиномам Лежандра. С этой целью приведем  $\Phi_k$  в формуле (10.2) к переменным  $r, \theta$ . Используя разложения

$$\frac{P_k(x_n)}{r_n^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+k)! r^s P_s(x)}{s! c_n^{k+s+1}} \quad (10.8)$$

$$\frac{P_k(x_{-n})}{r_{-n}^{k+1}} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+k)! P_s(x) (-1)^s}{s! c_{-n}^{k+s+1}} \quad (10.9)$$

получаем

$$\Phi_k = \frac{P_k(x)}{r^{k+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} r^s P_s(x) b_{ks} \quad (10.10)$$

$$b_{ks} = \frac{(-1)^k (k+s)!}{k! s! 2^{k+s+1}} \left\{ \left[ 1 + (-1)^{k+s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{k+s+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{k+1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-\lambda_1)^{k+s+1}} + (-1)^{k+s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+\lambda_1)^{k+s+1}} \right] \right\} \quad (10.11)$$

Используя разложение (10.10) в формуле (10.6) и принимая во внимание ортогональность полиномов Лежандра в интервале  $-1 \leq x \leq 1$ , получаем

$$C_{pk} = \frac{2}{(2p+1)} \left[ -(p+1) \lambda^{-(p+2)} \delta_{pk} + b_{kp} p \lambda^{p-1} \right] \quad (p=1, 2, \dots) \quad (10.12)$$

$$\delta_{pk} = 0 \quad \text{при } p \neq k, \quad \delta_{pp} = 1 \quad (10.13)$$

$$C_{0k} = 0 \quad \text{при } k \neq 0 \quad C_{00} = -2/\lambda^2$$

На основании (10.12) систему (10.5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \left[ -(p+1) \delta_{pk} + p \lambda^{2p+1} b_{kp} \right] = \lambda^3 \delta_{p1} \quad (10.14)$$

Для  $M_k$  получаем формулу

$$M_k = -\frac{1}{2} \lambda^3 \delta_{1k} - \frac{k}{k+1} \lambda^{2k+4} l_k \quad (10.15)$$

Здесь  $l_k$  берутся из (3.17). Используя разложения  $M_k$ , представим функцию  $\Phi$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ , который имеет вид

$$\Phi = -\frac{1}{2} \lambda^3 b_{10} - \sum_{k=1}^6 \frac{k}{k+1} \lambda^{2k+4} l_k b_{k0} - \frac{1}{2} \lambda^3 r^{-2} P_1(x) - \\ - \lambda^3 \sum_{k=1}^6 \left[ r^k + \frac{k}{k+1} \lambda^{-1} r^{-(k+1)} \right] P_k(x) l_k - R(r, \lambda, \lambda_1) \quad (10.16)$$

Здесь  $R(r, \lambda, \lambda_1)$  находится по формуле (4.2).



Для импульсивного давления на сфере получаем формулу

$$P_t = \rho a u \left[ \frac{1}{2} P_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} \lambda^{k+2} P_k(x) l_k + \right. \\ \left. + \frac{R(\lambda, \lambda_1)}{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda^2 b_{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \lambda^{2k+3} l_k b_{k0} \right] \quad (10.17)$$

Присоединенную массу находим по формуле (5.4). После вычисления интеграла получаем

$$m_+ = \frac{2}{3} \rho a^3 \pi [1 + 3\lambda^3 l_1 + 2\lambda^{14} f(\lambda, \lambda_1)] \quad (10.18)$$

Здесь  $f(\lambda, \lambda_1)$  вычисляется по формуле (5.3).

На фиг. 5 показана зависимость коэффициента присоединенной массы сферы, касающейся свободной поверхности, от глубины слоя. Здесь  $H = h - 2a$ . Из фигуры видно, что при  $h/a \geq 3.5$  влияние дна мало существенно и не может исправить коэффициент присоединенной массы более чем на 5%. Пунктирной линией показан соответствующий график для горизонтального удара.

На фиг. 6 показана зависимость коэффициента присоединенной массы от  $\lambda$  для различных значений  $\lambda_1$ .

11. Случай бесконечной глубины. Решая задачу в безразмерных параметрах (6.1), введем  $\Phi_k$  при помощи соотношений

$$\Phi_k = \frac{P_k(x)}{r^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{P_k(x^*)}{r^{k+1}} \quad (11.1)$$

После приведения к переменным  $r, \theta$  получаем

$$\Phi_k = \frac{P_k(x)}{r^{k+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} r^s P_s(x) b_{ks}, \quad b_{ks} = \frac{(-1)^k (s+k)! (-1)^{s+1}}{k! s! 2^{k+s+1}} \quad (11.2)$$

Следовательно, импульсивное давление и коэффициент присоединенной массы можно вычислить по формулам (10.17) и (10.18), если  $b_{ks}$  брать из (11.2).

Поступило 30 IX 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б л о х Э. Л. Влияние глубины погружения сферы на коэффициент присоединенной массы при горизонтальном ударе. ПММ, 1955, т. 19, вып. 3.
2. С а б а н е е в В. С. Влияние глубины погружения на величину присоединенной массы шара. Уч. зап. ЛГУ, 1960, вып. 35, № 280.
3. В о р о в и ч Л. С. Вертикальный удар шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
4. Г о б с о н Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.