

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РОЯ ПУЗЫРЬКОВ ВОЗДУХА В КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Э. З. АПШТЕЙН, С. С. ГРИГОРЯН, Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Описывается явление образования роя пузырьков воздуха в жидкости, находящейся в вертикальной трубе и совершающей вертикальные колебания. Объяснение механизма попадания воздуха в жидкость и поведения отдельных маленьких пузырьков даны в [1]. В данной работе изучается рой пузырей — воздушная подушка, рассматривается устойчивость этого роя. Сравниваются результаты экспериментальных исследований и теоретических расчетов.

Изучаемое явление состоит в следующем. Труба, открытая сверху и закрытая снизу, заливается жидкостью (водой, маслом, глицерином) и крепится на столе вибростенда, который может совершать колебательные движения в вертикальном направлении с заданными амплитудой и частотой (от 20 до 200 гц). Включив вибростенд и постепенно повышая частоту колебаний, можно наблюдать в трубе следующее.

При низких частотах жидкость покоится относительно трубы. Затем при некоторой частоте колебаний (около 50 гц) начинается придонная кавитация. Ядра кавитации, находящиеся в придонной зоне (20—30 см от дна), вследствие низкого давления получают возможность расти. Когда давление повышается, происходит резкое схлопывание пузырей, приводящее к сильным ударам. На поверхности жидкости при этом возникают брызги, всплески, и образующиеся вблизи поверхности пузырьки воздуха устремляются вниз. В течение нескольких секунд на дне образуется большое скопление пузырей — рой или воздушная подушка. После этого интенсивный приток пузырей вниз прекращается, а воздушная подушка немного поднимается и занимает устойчивое положение на расстоянии нескольких сантиметров от дна.

В дальнейшем с увеличением частоты колебаний вибростенда воздушная подушка поднимается все выше. Если же понижать частоту, то она будет опускаться вниз. При достаточном снижении частоты рой опускается на дно, а затем в виде одного большого пузыря всплывает на поверхность. При фиксированных амплитуде и частоте колебаний рой не меняет своего положения относительно поверхности жидкости.

Изучаемое явление распадается на две стадии: образование воздушной подушки и поведение уже образовавшегося роя пузырей в жидкости. Начальная стадия, связанная с кавитацией, захватом пузырьков воздуха с поверхности жидкости и движением их вниз, разобрана в работе [1]. Рассмотрим вторую стадию явления. Экспериментальным путем установлено, что в большинстве случаев амплитуда колебаний столба жидкости, находящейся над воздушной подушкой, значительно больше амплитуды колебаний стола вибростенда. Поэтому будем сначала считать, что в движении находится лишь жидкость над подушкой, а жидкость под подушкой и труба покоятся. Кроме того, предположим, что подушка является единым пузырем, имеющим цилиндрическую боковую поверхность и плоские торцы.

Таким образом, при колебаниях будет изменяться лишь высота подушки, а сечение ее останется равным сечению трубы. Будем считать, что жидкость в трубе идеальная, а объем подушки связан с давлением соотношением

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma \quad \text{или} \quad px^\gamma = p_0x_0^\gamma \quad (1)$$

Здесь p — давление в воздушной подушке в некоторый момент времени t ; $V = xS$ — объем подушки в этот момент; S — площадь сечения трубы; x — высота воздушной подушки; p_0, V_0, x_0 — начальные значения этих параметров; γ — показатель адиабаты газа, находящегося в подушке. Таким образом, давление в подушке дается формулой

$$p = p_0(x_0/x)^\gamma \quad (2)$$

Для давления на глубине H в жидкости, движущейся со скоростью w над подушкой, имеем

$$p = p_1 + \rho(g + dw/dt)H$$

Учитывая, что на границе воздушной подушки и жидкости эти давления равны и что $w = dx/dt$, получим уравнение для x

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{p_0}{\rho H} \left(\frac{x_0}{x}\right)^\gamma + \frac{p_1 + \rho g H}{\rho H} = 0 \quad (3)$$

Интегрируя его, найдем формулы для времени и периода колебаний

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{2x_1}{g}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{h}}{1+h} \varphi(y; y_m; \gamma) \quad \left(h = \frac{\rho g H}{p_1}\right) \quad (4)$$

$$T = \left(\frac{2x_1}{g}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{h}}{1+h} \varphi(1, y_m, \gamma) \quad \left(y = \frac{x}{x_{\max}}; y_m = \frac{x_{\min}}{x_{\max}}\right) \quad (5)$$

Здесь x_1 — высота воздушной подушки при атмосферном давлении p_1 , h — безразмерная глубина погружения, x_{\min} и x_{\max} — минимальная и максимальная высота подушки в процессе колебаний. Функция $\varphi(y, y_m, \gamma)$ при $\gamma \neq 1$ имеет вид

$$\varphi(y; y_m, \gamma) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-y_m)}{(1-y_m^{1-\gamma})} \right]^{-1/2\gamma} \times \\ \times \int_{y_m}^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y) - (1-y_m)(1-y^{1-\gamma})/(1-y_m^{1-\gamma})}} \quad (6)$$

При $\gamma = 1$ (изотермическое изменение объема подушки) функция $\varphi(y, y_m, \gamma)$ имеет следующий вид, который получается либо предельным переходом при $\gamma \rightarrow 1$ из (6), либо проведением всех выкладок из (3) при $\gamma = 1$

$$\varphi(y, y_m; 1) = \left[\frac{(y_m - 1)}{\ln y_m} \right]^{-1/2} \int_{y_m}^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y) - (1-y_m) \ln y / \ln y_m}} \quad (7)$$

Соотношение (5) связывает между собой период колебаний T , объем воздушной подушки x_1 , безразмерную глубину ее погружения h и y_m — величину, связанную с амплитудой колебаний, жидкости над подушкой. Однако неизвестно, будет ли подушка оставаться в этом положении, даже если соотношение (5) выполняется.

Поэтому рассмотрим вопрос об устойчивости воздушной подушки, находящейся на такой глубине, при которой выполняется (5). Будем теперь считать, что перетекание жидкости между подушкой и стенками трубы возможно, т. е. что подушка может двигаться вдоль трубы под действием градиента давлений. Относительно жидкости, находящейся ниже верхнего уровня подушки, предположим, что она движется вместе со столом вибростенда. Движение жидкости выше верхнего уровня подушки происходит в соответствии с уравнением (3). Тогда разность давлений, действующих на подушку, снизу p_- и сверху p_+ будет равна

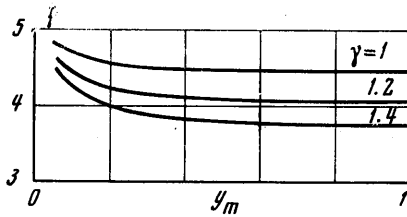
$$p_- - p_+ = \rho x(t) (g + dw/dt) \quad (8)$$

где dw/dt — ускорение стола вибростенда. Под действием этих сил подушка пойдет вверх или вниз. Пусть u — скорость движения подушки вдоль трубы, m — присоединенная масса жидкости. Тогда, пренебрегая вязким сопротивлением, можно написать

$$p_- - p_+ = m du/dt \quad (9)$$

Если колебания установившиеся, то за период колебаний

$$\int_0^T u dt = J = 0 \quad (10)$$



Фиг. 1

Для устойчивости подушки нужно, чтобы при выведении ее вверх из положения, в котором выполняется (10), интеграл J становился меньше 0 (т. е. подушка начинала бы двигаться вниз), а при смещении вниз $J > 0$.

Будем считать, что m зависит от размера подушки x следующим образом:

$$m(x) = Mx^n \quad (M = \text{const})$$

Из соотношений (8) — (10) получим

$$\int_0^T \frac{1}{Mx^{n-1}} \left(g + \frac{dw}{dt} \right) dt = 0$$

или в безразмерном виде

$$\int_0^1 \frac{1}{y^{n-1}(\tau)} \left[1 - \frac{A\omega^2}{g} \psi(\tau) \right] d\tau = 0, \quad \frac{dw}{dt} = -A\omega^2 \psi(\tau) \quad (11)$$

Здесь A — амплитуда колебаний вибратора, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота, $\psi(\tau)$ — периодическая функция, характеризующая форму колебаний вибратора.

Из соотношения (11) получаем

$$\frac{A\omega^2}{g} = \left(\int_0^1 \frac{d\tau}{y^{n-1}(\tau)} \right) \left(\int_0^1 \frac{\psi(\tau) d\tau}{y^{n-1}(\tau)} \right)^{-1} = f(y_m; \gamma) \quad (12)$$

Формулы (5) и (12) дают параметрическую зависимость между комбинациями безразмерных параметров

$$\left(T \sqrt{\frac{2x_1}{g}} \right) \frac{1+h}{\sqrt{h}} = F\left(\frac{A\omega^2}{g} \right) \quad (13)$$

или, учитывая, что $T = 2\pi / \omega$

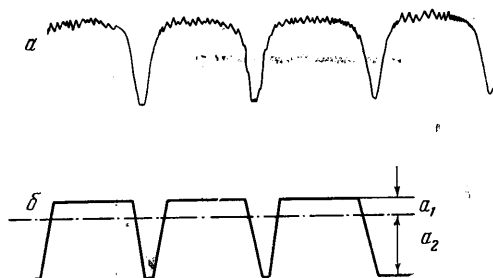
$$\sqrt{\frac{A}{x_1}} \frac{1+h}{\sqrt{h}} = F_1 \left(\frac{A\omega^2}{g} \right) \quad (14)$$

Таким образом, задавая $A, \omega, x_1, \rho, g, p_1$ из (14), можем найти глубину, на которой воздушная подушка имеет нулевое всплытие за период колебаний. Будет это положение устойчивым или нет, можно решить, зная вид функций

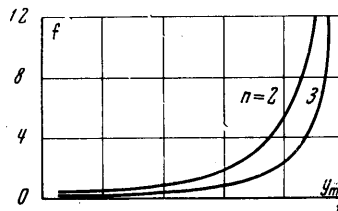
$$\varphi(1, y_m, \gamma), \quad f(y_m, \gamma).$$

График функции $\varphi(1, y_m, \gamma)$ приведен на фиг. 1. Чтобы вычислить $f(y_m, \gamma)$, нужно конкретизировать функцию $\psi(\tau)$ и число n . Так как ускорение вибратора, на котором проводились эксперименты, имело форму, показанную на

фиг. 2, а, то в качестве $\psi(\tau)$

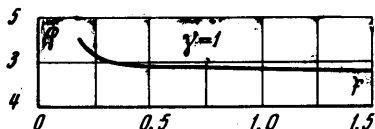


Фиг. 2

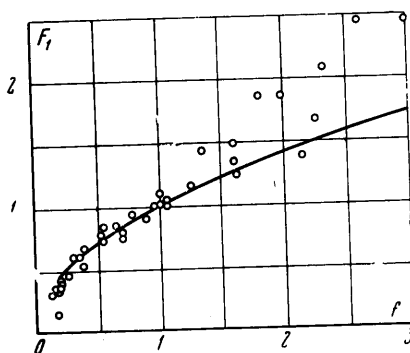


Фиг. 3

возьмем ломаную (см. фиг. 2, б), аппроксимирующую реальную кривую. Величины a_1 и a_2 подобраны из условия, что размах колебаний вибратора равен $2A$ и средняя скорость за период равна нулю. При этом максимальное ускорение уже не равно $A\omega^2/g$, как в случае синусоидальных колебаний, а будет больше $A\omega^2/g$. Функции $f(y_m, \gamma)$ для такой $\psi(\tau)$ при $n = 2, 3$ представлены на фиг. 3. Разберем теперь вопрос об устойчивости. Кривая на фиг. 4 получена для $n = 3, \gamma = 1$ из фиг. 1, 3 (см. формулы (5), (12)). Точки, лежащие на этой кривой, соответствуют таким положениям подушки, в которых она имеет нулевое всплытие. Уменьшим глубину ее погружения,



Фиг. 4



Фиг. 5

оставив неизменными все остальные величины. Новому положению подушки будет соответствовать точка над кривой нулевого всплытия. На фиг. 1 аналогичная точка сдвинется по кривой влево и вверх (y_m уменьшится), а на фиг. 3 точка сместится влево по горизонтали, т. е. окажется

выше кривой. В этом положении величина $A\omega^2/g$ больше, чем то значение ее, которое обеспечивает нулевое всплытие.

Как видно из (10) и (11), подушка при этом начнет смещаться вниз к положению нулевого всплытия. Аналогично можно показать, что смещенная вниз подушка снова возвращается к положению нулевого всплытия, т. е. в этом положении подушка устойчива.

На фиг. 5 приведены экспериментальные точки и теоретическая кривая (см. (14)) для $n = 3$, $\gamma = 1$. Согласие между ними следует считать удовлетворительным.

НИИ механики МГУ

Поступило 11 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Якимов Ю. Л., Апштейн Э. З. Поведение пузырьков воздуха в жидкости при вибрации. В сб. трудов симпозиума по механике в Юрате (Польша), 1965.