

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В МГД-КАНАЛЕ

А. В. ГУБАРЕВ, Л. М. ДЕГТЯРЕВ, А. П. ФАВОРСКИЙ

(Москва)

Изучаются сверхзвуковые течения электропроводного газа в электрическом и магнитном скрещенных полях [1] при наличии ударных волн. Показана возможность существования трех режимов стационарных течений, которые определяются характером зависимости электропроводности газа от температуры и плотности.

1. Нормальный режим характеризуется тенденцией продвижения скачка к входу в канал с повышением статического давления на выходе из канала. Стационарный режим такого типа существует и устойчив.

2. Аномальный режим (формально построенный) характеризуется тенденцией перемещения скачка к выходу с повышением статического давления на выходе из канала. Этот режим неустойчив, и течение в МГД-канале может быть либо полностью сверхзвуковым, либо полностью дозвуковым.

3. Предельный (граничный) режим является промежуточным между нормальным и аномальным режимами, характеризуется тем, что стационарное положение ударной волны и ее амплитуда не определены однозначно. Стационарное течение в этом случае не единственно.

Исследование проводится как путем формального построения решения стационарной задачи, так и путем решения соответствующей нестационарной задачи [4]. Установление стационарного режима при решении нестационарной задачи одновременно является проверкой его устойчивости.

1. **Постановка задачи.** Приведем общую постановку задачи, которая будет использоваться в дальнейшем. Пусть в начальный момент $t = 0$ в плоском канале между сечениями Γ_1 и Γ_2 (фиг. 1) имеется постоянный сверхзвуковой поток электропроводного газа. Предварительно газ, расширяясь, ускоряется на участке $\Gamma_0\Gamma_1$ сверхзвукового сопла. Из канала газ попадает в ресивер, где во все время процесса будет поддерживаться постоянное давление p_2 . Участки стенок канала ab и $a'b'$ представляют собой идеально проводящие электроды, замкнутые на некоторую нагрузку. Остальные участки стенок выполнены из идеального диэлектрика. Будем считать газ невязкой, нетеплопроводной, изотропно проводящей плазмой, подчиняющейся уравнению состояния идеального газа.

В момент $t = 0$ в объеме канала V между сечениями Γ_a и Γ_b благодаря внешним источникам возникает магнитное поле. Время установления магнитного поля $\tau_0 \sim 4\pi\sigma_0 L^2/c^2$ и время пролета газовой частицы $t_0 \sim L/v_0$ удовлетворяют неравенству $\tau_0 \ll t_0$, что означает $R_m = 4\pi\sigma_0 L v_0 \ll 1$, здесь L , v_0 , σ_0 — характерные значения длины, скорости и проводимости.

В процессе установления магнитного поля за время τ_0 в плазме протекают индукционные токи, приводящие к ее нагреву. Величина тепловой энергии, выделяющейся при этом во всем объеме $\sim H_0^2 V / 8\pi$.

Предполагается, что имеет место неравенство

$$H_0^2 V / 8\pi \ll (\rho_0 \varepsilon_0 + p_0 + \rho_0 u_0^2 / 2) V$$

т. е. переходный процесс установления магнитного поля не приводит к существенной перестройке течения, а вносимые им возмущения выносятся из канала сверхзвуковым потоком. Электрическое поле E создается электродами ab и $a'b'$ и определяется величиной нагрузки. Концевые

эффекты в газодинамическом течении и распределении электрических токов не учитываются, т. е. рассматривается одномерное приближение задачи.

В этих предположениях течение в канале $\Gamma_1\Gamma_2$ описывается системой уравнений магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) = \frac{1}{c} jH \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] = jE \quad (1.2)$$

$$j = \sigma \left(E - \frac{1}{c} uH \right), \quad \sigma = \sigma(\rho, T) \quad (1.3)$$

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = c_v T \quad (1.4)$$

$$H = \begin{cases} H_0(x_a \leq x \leq x_b), \\ 0(x_a > x > x_b), \end{cases} \quad E = \begin{cases} E_0(x_a \leq x \leq x_b) \\ 0(x_a > x > x_b) \end{cases}$$

В качестве начальных данных для системы (1.1) — (1.4) берутся параметры исходного сверхзвукового потока.

Будем предполагать, что в сечении Γ_1 поток остается сверхзвуковым с первоначальными значениями плотности, скорости и давления

$$\rho = \rho_1, \quad u = u_1, \quad p = p_1, \quad M_1 > 1 \quad (1.5)$$

На выходе из канала Γ_2 формально поддерживается давление в ресивере p_2 . Однако, если $M_2 > 1$, это граничное условие не играет роли, так как ресивер в этом случае не оказывает влияния на течение в канале.

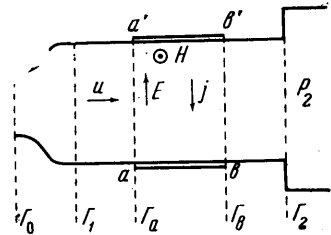
Рассмотрим влияние характера зависимости $\sigma(\rho, T)$ на режимы стационарного течения с ударной волной в зоне взаимодействия $\Gamma_a\Gamma_b$. Возможность установления соответствующего стационарного течения изучается с помощью численного решения нестационарной задачи, поставленной выше.

2. Решение стационарной задачи. Отвлекаясь от процесса выхода на стационарный режим, рассмотрим сначала стационарную задачу течения проводящего газа в скрещенных электрическом и магнитных полях. Конечная длина канала и давление на выходе пока не будут фиксироваться. Будем считать, что при $x = 0$ имеется сверхзвуковой поток газа с заданными параметрами (1.5). Величины магнитного и электрического полей при $x \geq 0$ постоянны по пространству $E = E_0$, $H = H_0$. Стационарное течение в этом случае описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\rho u = \mu = \text{const}, \quad \frac{d}{dx}(\rho u^2 + p) = \frac{1}{c} jH \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] = jE$$

Здесь μ — расход газа в канале.



Фиг. 1

Исследуем все возможные стационарные режимы с ударной волной при фиксированных условиях (1.5) на входе. Уравнения (2.1), (1.3), (1.4) приведем к системе двух уравнений

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma u}{\mu} \left(E - \frac{1}{c} uH \right) f \quad (2.2)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{\sigma}{\mu} \left(E - \frac{1}{c} uH \right) \left[E - \frac{1}{c} uH - (\gamma - 1) \varepsilon f \right] \quad (2.3)$$

$$f = \frac{uH/c - (\gamma - 1)E}{u^2 - \gamma(\gamma - 1)\varepsilon}, \quad \sigma = \sigma \left(\frac{\mu}{u}, \frac{\varepsilon}{c_v} \right) \quad (2.4)$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

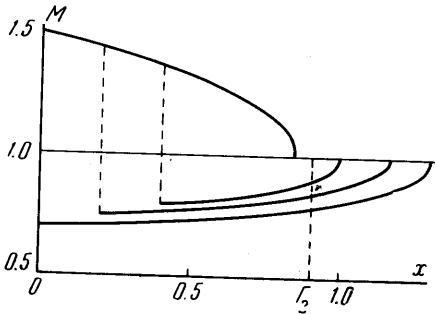
Уравнения (2.2), (2.3) следует дополнить соотношениями Гюгонио на скачке

$$\rho_+ u_+ = \rho_- u_- = \mu \quad (2.5)$$

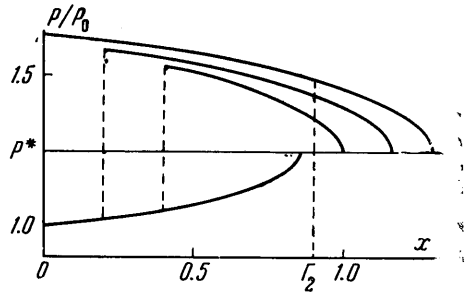
$$p_+ + \rho_+ u_+^2 = p_- + \rho_- u_-^2 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_+ + p_+ / \rho_+ + u_+^2 / 2 = \varepsilon_- + p_- / \rho_- + u_-^2 / 2 \quad (2.7)$$

Здесь индексом плюс отмечены параметры сверхзвукового течения перед ударным фронтом, а индексом минус параметры дозвукового течения за ним.



Фиг. 2



Фиг. 3

Исключая из (2.5) — (2.7) плотность ρ_- и разрешая их относительно u_- и ε_- , получим

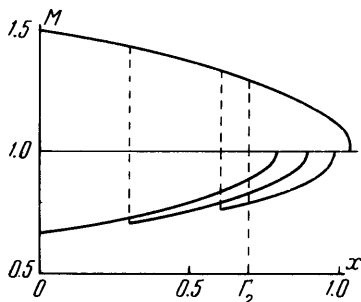
$$u_- = \frac{\gamma}{\gamma + 1} q - \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} q \right)^2 - 2r \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{1/2}, \quad \varepsilon_- = \frac{1}{\gamma} \left(r - \frac{u_-^2}{2} \right) \quad (2.8)$$

$$q = (\gamma - 1) \varepsilon_+ / u_+ + u_+, \quad r = \gamma \varepsilon_+ + u_+^2 / 2$$

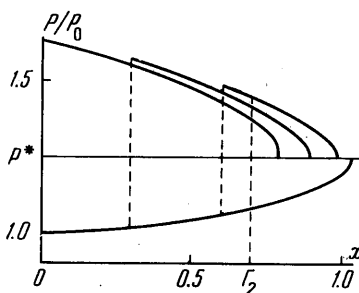
Исследование совокупности всех стационарных течений сводится к исследованию однопараметрического семейства решений уравнений (2.2), (2.3), где параметром ξ является положение разрыва, на котором выполняются (2.8).

Построим указанное семейство решений следующим образом. Проинтегрируем уравнения (2.2), (2.3) с начальными данными (1.5) при $x = 0$

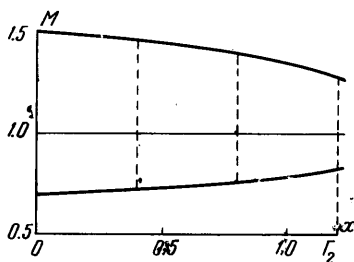
на длине взаимодействия, т. е. до точки $x = \xi_*$, в которой достигается $M = 1$ ($p = p_*$). Эту кривую назовем сверхзвуковой траекторией. Далее, в точке $x = \xi = \xi_0$ поместим разрыв, удовлетворяющий (2.8). Используя в качестве начальных данных значения u_- и ε_- справа от разрыва, получим при $x > \xi$ дозвуковую траекторию, соответствующую дозвуковому течению за скачком. Построенная интегральная кривая является представителем однопараметрического семейства решений с параметром ξ ($0 \leq \xi \leq \xi_*$).



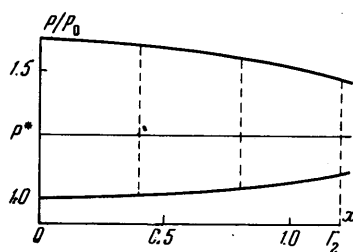
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Анализ описанных семейств решений при различных зависимостях $\sigma(\rho, T)$ показал, что существует два вида таких семейств, соответствующих двум различного типа стационарным режимам. Рассмотрим их на конкретных примерах, положив для определенности $E_0 = 0$. Поскольку эти примеры носят иллюстративный характер, укажем лишь значения безразмерных параметров $R_H = H_0^2 / 8\lambda r_1$ и $R_M = R_H R_m$.

1. Проводимость не зависит от плотности и температуры и является постоянной $\sigma = \sigma_0$. На фиг. 2, 3 показаны распределения значений числа Маха M и давления p/p_1 по длине канала для трех положений разрыва ($R_H = 1.36$, $R_M = 0.18$). Конечная длина канала зафиксирована положением сечения Γ_2 . Видно, что для этого случая характерно повышение давления (понижение числа Маха) на выходе Γ_2 при перемещении скачка к входу Γ_1 . Такой тип режима стационарных течений назовем нормальным.

2. Проводимость зависит от температуры по закону

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{3/4} \exp \left[\frac{I}{T_1} \left(1 - \frac{T_1}{T} \right) \right]$$

где I — потенциал ионизации газа.

Распределение по длине канала значений числа M и давления p/p_1 показаны на фиг. 4, 5 ($R_H = 0.85$, $R_M = 0.11$). В этом случае в отличие

от нормального режима перемещение скачка к входу Γ_1 сопровождается понижением давления и ростом числа M на выходе Γ_2 . В противоположность нормальному режиму такой режим назовем аномальным.

Естественно ожидать, что между этими двумя типами режимов существует промежуточный, который назовем предельным (граничным). Для этого режима характерно безразличное положение скачка при любой длине канала, не превышающей длины взаимодействия. На фиг. 6, 7 приведен пример аномального режима, который с высокой точностью совпадает с предельным ($R_H = 0.48$, $R_M = 0.063$). Он был получен при

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{I}{T_1} \left(1 - \frac{T_1}{T} \right) \right]$$

3. О решении нестационарной задачи. Наряду с формальным построением интегральных кривых уравнений (2.2), (2.3), (2.8) стационарное решение можно получить также методом установления, решая соответствующую нестационарную задачу, поставленную в п. 1. Одновременно метод установления является проверкой существования и устойчивости стационарного течения. Было проведено численное решение указанной нестационарной задачи. Для определенности в расчетах полагалось $p_2 = p_*(M_2 = 1)$, $E_0 = 0$.

Начиная с момента $t = 0$, происходит взаимодействие потока с магнитным полем, благодаря которому электропроводный газ тормозится лоренцевой силой. Если магнитное поле H_0 не превышает некоторого критического значения $H_0 = H_*$, течение в канале остается полностью сверхзвуковым и выходит на стационарный режим за время 4—6 пролетов газовых частиц. Дальнейшее повышение H_0 приводит к заперанию сверхзвукового потока на длине взаимодействия, которая становится меньше длины канала. Вследствие этого происходит образование волны сжатия, зарождающейся у правой границы области взаимодействия. Далее волна сжатия формируется в ударную волну, которая перемещается вверх по потоку. При реализации нормального стационарного режима скорость движения ударной волны замедляется и устанавливается стационарное течение с заданным давлением на выходе p_2 .

Установление нормального стационарного режима с ударной волной, которое происходит за время 15—20 пролетов газовых частиц, подтверждает его существование и устойчивость.

Попытки осуществить выход на аномальный стационарный режим ни при каком магнитном поле $H_0 > H_*$ не привели к его установлению. В отличие от предыдущего случая сформировавшаяся ударная волна не останавливается, а перемещается вверх по потоку, достигая сечения Γ_1 . Начиная с этого момента, исходная постановка задачи теряет силу.

Таким образом, в принятой постановке невозможно установление стационарного течения в аномальном режиме с ударной волной в МГД-канале. В самом деле, образование ударной волны происходит, если длина канала больше длины взаимодействия потока с магнитным полем. Но в этом случае, как следует из результатов п. 2, для аномального режима не существует стационарного положения ударной волны внутри канала.

4. Обсуждение результатов. Представляет интерес выяснить, когда течение с ударной волной происходит в том или ином режиме.

Остановимся сначала на предельном режиме. Имеет место утверждение. Режим стационарного течения с ударной волной является предельным тогда, и только тогда, когда плотность электрического тока при переходе через фронт скачка остается непрерывной независимо от положения скачка.

Для проверки этого утверждения воспользуемся интегральной формой стационарных уравнений

$$\rho u = \mu = \text{const} \tag{4.1}$$

$$[p + \rho u^2]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} jH dx \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} jE dx \tag{4.2}$$

где $x_1 \leq x_2$ принимают произвольные значения. Преимуществом интегральной формы записи уравнений является их справедливость, независимо от того, содержит ли течение скачок при $x = \xi$, $x_1 \leq \xi \leq x_2$ или нет.

Построим сверхзвуковую траекторию с начальными данными (1.5). В каждой точке ξ этой траектории можно поместить разрыв, удовлетворяющий соотношениям Гюгоню (2.8), и продолжить далее течение при $x > \xi$ по дозвуковой траектории, начальные значения для которой в точке $x = \xi$ определяются из (2.8).

Таким образом, одной сверхзвуковой траектории соответствует семейство дозвуковых траекторий. В случае предельного режима все дозвуковые траектории совпадают, образуя одну предельную дозвуковую траекторию.

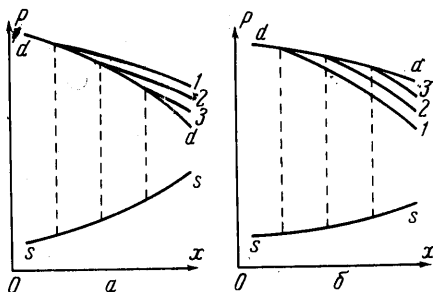
Пусть имеется предельный стационарный режим. Тогда в какой бы точке ξ ни был помещен скачок, полный ток

$$I = \int_{x_1}^{x_2} j dx \quad (x_1 \leq \xi \leq x_2) \tag{4.3}$$

остается постоянным в силу постоянства левых частей равенств (4.2) при изменении ξ . Отсюда в силу произвольности ξ следует непрерывность плотности электрического тока j при переходе через фронт скачка, в какой бы точке ξ он ни находился.

Проверим достаточность. Пусть известно, что плотность электрического тока j непрерывна при переходе через скачок. Рассмотрим кривую состояний, полученных ударным переходом при движении вдоль сверхзвуковой траектории. Назовем ее производной кривой. Покажем, что производная кривая является в данном случае предельной дозвуковой траекторией. Действительно, для произвольных x_1 и x_2 уравнения (4.1), (4.2) выполняются вдоль этой кривой в силу непрерывности тока на скачке и справедливости соотношений Гюгоню в точках x_1 и x_2 .

Исследуем вопрос о поведении плотности электрического тока при переходе через фронт скачка в случае нормального и аномального режима. Обратимся к фиг. 8. Рассмотрим сверхзвуковую траекторию (кривая ss) и соответствующую ей производную кривую dd . В случае нормального режима дозвуковые траектории $1, 2, 3$, отходящие от производной кривой dd , должны располагаться выше нее, как показано на фиг. 8, а. В этом случае повышение давления на выходе в ресивер приводит к перемещению скачка влево. Наоборот, при аномальном режиме производная кривая dd расположена выше отходящих от нее дозвуковых траекторий $1, 2, 3$ (фиг. 8, б), и повышение давления в ресивере сдвигает скачок вправо. В случае предельного режима дозвуковые траектории, отходящие от производной кривой, совпадают с ней.



Фиг. 8

Продифференцируем соотношения Гюгонио (2.6), (2.7) и, используя (2.1), записанные для сверхзвуковой траектории, получим, что вдоль производной траектории имеют место равенства

$$\mu u_d' + p_d' = j_+ H / c \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_- - \mu u_- \right) u_d' + \frac{\gamma}{\gamma - 1} u_- p_d' = j_+ E \quad (4.5)$$

Здесь индекс d относится к величинам на производной траектории. Решая (4.4) и (4.5) относительно p_d' , а (2.1), записанные вдоль дозвуковых траекторий, относительно p_-' , получим равенства

$$p_d' = p_-' j_+ / j_-, \quad u_d' = u_-' j_+ / j_- \quad (4.6)$$

или

$$p_d' - p_-' = p_-' (j_+ - j_-) / j_- = p_-' (j_+ / j_- - 1) \quad (4.7)$$

Из фиг. 8 видно, что для нормального режима, согласно его определению, справедливо неравенство

$$p_-' > p_d' \quad (4.8)$$

которое переходит в равенство для предельного режима и становится противоположным в случае аномального режима

$$p_-' < p_d' \quad (4.9)$$

Таким образом, стационарный режим с ударной волной является нормальным тогда, и только тогда, когда при разрежении дозвукового потока за скачком ($p_-' < 0$) выполняется неравенство

$$j_+ / j_- > 1 \quad (4.10)$$

а при сжатии потока за скачком ($p_-' > 0$) имеет место неравенство

$$j_+ / j_- < 1 \quad (4.11)$$

В противном случае режим будет аномальным, за исключением промежуточного предельного режима.

В частном случае $p_-' / j_- > 0$, который, например, имеет место в генераторном режиме, критерий можно сформулировать следующим образом:

$$j_+ < j_-$$

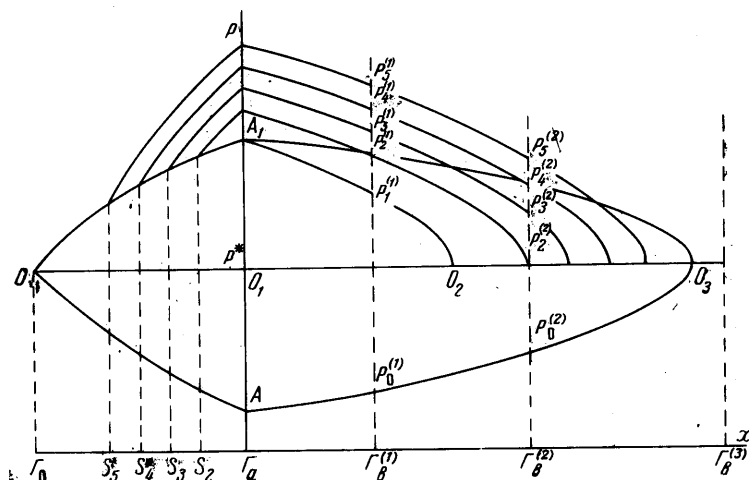
Следует отметить, что при классификации и рассмотрении свойств нормальных и аномальных режимов ограничение $R_m \ll 1$ не использовалось. Доказательство непрерывности плотности электрического тока на скачке для предельного режима также можно обобщить на случай произвольного значения R_m .

Обратимся к вопросу об устойчивости нормального, аномального режимов. Рассмотрим нормальный режим. Предположим, что ударная волна квазистационарным образом сместилась влево. Тогда давление на выходе из канала Γ_2 возрастает по сравнению с давлением в ресивере. Следовательно, из ресивера в канал должна прийти волна разрежения, которая ослабит ударную волну, т. е. будет стремиться вернуть ее в исходное положение. Аналогичное смещение ударной волны вправо понижает давление на выходе и вызывает приходящую из ресивера волну сжатия, которая усиливает ударную волну и снова стремится вернуть ее в исходное положение.

Обратная картина наблюдается в случае аномального режима. Смещение ударной волны влево сопровождается здесь образованием волны

сжатия, приходящей из ресивера, которая еще более усиливает ударную волну и сдвигает ее влево. При перемещении ударной волны вправо, приходящая из ресивера волна разрежения также усиливает эту тенденцию.

Проведенное рассмотрение нельзя назвать строгим. Тем не менее оно подтверждается результатами нестационарных расчетов и позволяет сделать качественный вывод о том, что существует и устойчив только нормальный режим. Аномальный режим неустойчив и поэтому не существует.



Фиг. 9

Вернемся к общей постановке стационарной задачи (фиг. 1), включив в рассмотрение сопловую часть $\Gamma_0\Gamma_1$. Будем считать, что длина участка постоянного течения $\Gamma_1\Gamma_a$ равна нулю. Выясним влияние квазистационарного изменения давления p_2 в ресивере на течение с ударной волной в нормальном и аномальном режимах.

Для течения в нормальном режиме с повышением давления характерно перемещение ударной волны вверх по потоку. При достаточно большом значении p_2 скачок покидает зону взаимодействия $\Gamma_a\Gamma_b$ и проходит в сопло. Снижение давления в ресивере возвращает его в зону взаимодействия. При дальнейшем понижении p_2 скачок либо занимает предельное положение, когда на выходе в ресивер достигается скорость звука (длина зоны взаимодействия $\Gamma_a\Gamma_b$ больше длины запирания), либо покидает канал, и течение снова становится полностью сверхзвуковым.

Пусть теперь режим течения является аномальным. Не ограничивая общности, положим $E = 0$. Благодаря этому критическое значение p^* давления в потоке, при котором $M = 1$, не зависит от x . Совокупность стационарных режимов представлена на фиг. 9. Здесь Oa соответствует сверхзвуковому течению в расширяющемся сопле и aO_3 — сверхзвуковому течению в МГД-канале вплоть до длины запирания (Oa_1 и a_1O_3 — производные кривые состояния за ударным фронтом для Oa и aO_3 соответственно). Рассмотрим последовательно три случая.

1. Длина МГД-канала меньше O_1O_2 (a_1O_2 — дозвуковая траектория, выходящая из точки a_1). Этому случаю соответствует сечение $\Gamma_b^{(1)}$ на фиг. 9. Пока давление p_2 в ресивере ниже давления $p_2^{(1)}$, в канале будет реализовываться сверхзвуковое течение. При этом, если $p_2 < p_0^{(1)}$, разрежение потока до давления p_2 происходит в двумерной системе волн разрежения (не-

расчетный режим). Если же $p_0^{(4)} < p_2 < p_2^{(4)}$, то необходимое поджатие потока достигается также в нерасчетном режиме, в двумерной системе волн сжатия. Пусть давление в ресивере достигло значения $p_2^{(4)}$. Тогда в сечении $\Gamma_b^{(4)}$ появляется ударная волна, которая будет перемещаться вверх по потоку. В силу неустойчивости эта волна проходит весь МГД-канал и останавливается в сопловой части в сечении S_2 . Течение в сопле на участке $\Gamma_0 S_2$ будет сверхзвуковым, а на участках $S_2 \Gamma_a$ (в сопле) и $\Gamma_a \Gamma_b^{(4)}$ (в МГД-канале) — дозвуковым. При дальнейшем повышении давления p_2 скачок будет устойчивым образом перемещаться влево (давлению $p_3^{(4)}$ соответствует скачок в сечении S_3 и т. д.). Нас не интересуют такие давления в ресивере, когда ударная волна полностью разрушает сверхзвуковое течение. Поэтому, начиная с некоторого значения p_2 , будем снижать его. Пока давление p_2 остается выше $p_1^{(4)}$, скачок находится в сопловой части канала и квазистационарно перемещается вправо. Если же давление $p_2 < p_1^{(4)}$, ударная волна получает возможность попасть в МГД-канал и благодаря своей неустойчивости выходит из него в ресивер. В канале восстановится полностью сверхзвуковое течение с давлением $p_0^{(4)}$ в сечении $\Gamma_b^{(4)}$.

2. Длина канала превышает $O_1 O_2$ (выходное сечение $\Gamma_b^{(2)}$ на фиг. 9). В этом случае поведение ударной волны с ростом давления p_2 в ресивере полностью повторяет предыдущий случай. Однако при снижении давления в ресивере ударная волна не доходит до входа Γ_a в МГД-канал. Она может лишь занять предельное положение в сечении S_2 , когда на выходе $\Gamma_b^{(2)}$ будет достигаться $M = 1$ ($p_2^{(2)} = p_*$). Дальнейшее понижение p_2 не меняет этого стационарного течения.

3. Длина канала больше длины запирания $O_1 O_3$ (сечение $\Gamma_b^{(3)}$ на фиг. 9). При $p_2 < p_*$ ударная волна занимает стационарное положение в сопловой части канала, а давление на выходе в ресивере будет равным p_* . При $p_2 > p_*$ скачок располагается ближе к горловине сопла. При обратном снижении давления до $p_2 = p_*$ скачок возвращается в первоначальное положение и остается там при дальнейшем снижении p_2 .

Имеющий место гистерезис поведения ударной волны при аномальном режиме в электродной зоне напоминает картину течения неэлектропроводного газа в расширяющихся и сужающихся каналах (соплах и диффузорах). Нормальному режиму соответствует при этом стационарное течение в расширяющемся сопле. Такое течение с ударной волной устойчиво и перемещение скачка влево также связано с повышением давления в ресивере. Аномальному режиму соответствует стационарное течение в сужающемся канале (диффузоре). Такое течение неустойчиво, и скачок перемещается влево, пока не выйдет из зоны сужения канала [2, 3]. Предельный режим соответствует течению в прямой трубе, когда положение скачка неопределенно и решение неединственно. Зависимость электропроводности от температуры и давления вместе с термодинамическими свойствами газа являются при этом аналогом изменения площади сечения канала по его длине.

5. Влияние электрического и магнитного полей на режим стационарного течения. Рассмотренную в п. 3 стационарную задачу удобно сформулировать в фазовой плоскости безразмерных переменных $M = u/c_a$ и $\psi = cE/uH$, где c_a — адиабатическая скорость звука [5]. Величина ψ показывает отношение приложенного электрического поля E к величине uH/c . При $\psi < 1$ поток совершает полезную работу, при $\psi > 1$ работа совершается над газом. Размерные величины связаны с безразмерными переменными M , ψ соотношениями

$$u = \frac{cE}{\psi H}, \quad T = \frac{c^2 E^2}{\gamma R H^2 \psi^2 M^2}, \quad \rho = \frac{\mu H \psi}{cE}, \quad p = \frac{c \mu E}{\gamma H \psi M^2} \quad (5.1)$$

пользуясь которыми, (2.1), (1.3), (1.4) можно свести к системе двух уравнений

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \delta(\gamma - 1) \frac{M^2}{M^2 - 1} (\psi - 1) \left(\psi - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \quad \delta = \frac{\sigma H^2}{c^2 \mu} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{M^3} \frac{dM}{dx} = \delta(\gamma - 1) (\psi - 1) (1 + \gamma M^2) \left[\frac{\gamma(2 + M^2(\gamma - 1))}{(\gamma - 1)(1 + \gamma M^2)} - \psi \right] \frac{1}{2(M^2 - 1)} \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) получаем уравнение для фазовых траекторий

$$\frac{d\psi}{dM} = \frac{2\psi}{M} \frac{\psi(\gamma - 1) - \gamma}{\gamma(2 + M^2(\gamma - 1)) - (\gamma - 1)(\gamma M^2 + 1)\psi} \quad (5.4)$$

Условия Гюгонио (2.6), (2.7) в переменных M , ψ имеют вид

$$\frac{1}{\psi_-} \left(\frac{1}{\gamma M_-^2} + 1 \right) = \frac{1}{\psi_+} \left(\frac{1}{\gamma M_+^2} + 1 \right) \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\psi_-^2} \left(\frac{1}{(\gamma - 1)M_-^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\psi_+^2} \left(\frac{1}{(\gamma - 1)M_+^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.6)$$

Следствием (5.5) и (5.6) является связь между M_- и M_+

$$\frac{(1 + \gamma M_-^2)^2}{M_-^2 [2 + (\gamma - 1)M_-^2]} = \frac{(1 + \gamma M_+^2)^2}{M_+^2 [2 + (\gamma - 1)M_+^2]} \quad (5.7)$$

из которой следует, что число Маха за скачком не меньше $M^* = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)}/2\gamma$, соответствующего $M_+ = \infty$.

Интегральные кривые уравнения (5.4) представлены на фиг. 10. Стрелками указаны направления движения вдоль фазовых траекторий при возрастании x . Поле интегральных кривых имеет три особые точки. В начале координат O расположена седловая особая точка. Оси координат являются ее сепаратрисами. В точке $A(1, \gamma/\gamma - 1)$ также имеется седловая особая точка, сепаратрисами которой является прямая CC' ($\psi = \gamma/\gamma - 1$) и интегральная кривая QQ' , вдоль которой возможен непрерывный переход через скорость звука. Третья, узловая особая точка, расположена в точке $C'(0, \gamma/\gamma - 1)$.

Повторяя вывод (4.6), можно показать, что имеют место равенства

$$M_d' = M_-' j_+ / j_-, \quad \psi_d' = \psi_-' j_+ / j_-$$

из которых следует

$$\left(\frac{d\psi}{dM} \right)_d = \left(\frac{d\psi}{dM} \right)_- \quad (5.8)$$

Равенство (5.8) означает, что в любой точке производной кривой ее наклон совпадает с наклоном дозвуковой траектории, отходящей от этой точки. Таким образом, в плоскости $M\psi$ производная кривая, соответствующая сверхзвуковой траектории совпадает с дозвуковой траекторией. В частности, если интегральная кривая уравнения (5.4) пересекает прямую $M = 1$, то ее сверхзвуковая часть отображается ударным переходом на свою дозвуковую часть. Исключения составляют сепаратрисы особой точки A : AQ ударным переходом отображается на AC' и AC переходит в AQ' .

Обратимся к равенству (4.7). Найдем на плоскости $M\psi$ кривые, вдоль которых $p_d' = p_-'$. Это равенство имеет место в том случае, когда один из сомножителей в правой части (4.7) обратится в нуль.

Рассмотрим подробнее эти возможности. Сомножитель p_-'/j_- удобно представить в виде

$$\frac{p_-'}{j_-} = \frac{H}{c(M_-^2 - 1)} [(\gamma - 1)M_-^2(\psi_- - 1) - 1] \quad (5.9)$$

Он обращается в нуль на кривой AD , вдоль которой

$$\psi = 1 + \frac{1}{(\gamma - 1)M^2} \quad (5.10)$$

Пунктирная линия AD' на фиг. 10 является дозвуковой частью этой кривой. Ниже нее справедливо неравенство $p_-'/j_- > 0$.

Обращение в нуль второго сомножителя означает непрерывность плотности тока j на скачке $j_- = j_+$ в переменных $M\psi$ и выражается равенством

$$\sigma_- \left(1 - \frac{1}{\psi_-}\right) = \sigma_+ \left(1 - \frac{1}{\psi_+}\right) \quad (5.11)$$

Подставляя в это выражение ψ_+ из (5.5), получим

$$\psi_- = \frac{1}{M_-^2 (1 + \gamma M_+^2)} \left[\frac{\sigma_- M_-^2 - \sigma_+ M_+^2}{\sigma_- - \sigma_+} + \gamma M_-^2 M_+^2 \right] \quad (5.12)$$

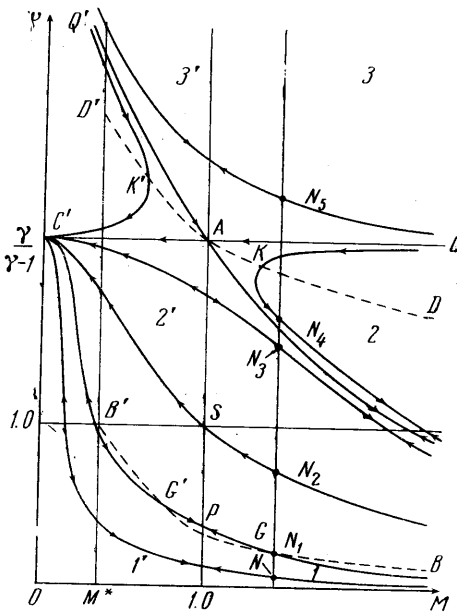
Предположим, что $\sigma_+ \rightarrow 0$ при $M_+ \rightarrow \infty$. Тогда из (5.12) следует, что $\psi_- = 1$. Отсюда можно заключить, что все кривые, вдоль которых выполняется (5.11), должны выходить из точки $B'(\gamma(\gamma - 1)/2\gamma, 1)$.

Чтобы получить качественное представление о поведении этих кривых, положим $\sigma = \sigma_* M^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Тогда при $M = 1$

$$\begin{aligned} \psi_-|_{M=1} &= \\ &= \frac{1}{\gamma + 1} \left[\left(\frac{d(\sigma M^2)}{d\sigma} \right)_{M=1} + \right. \\ &\left. + \gamma \right] = 1 - \frac{2}{\alpha(1 + \gamma)} \quad (5.13) \end{aligned}$$

Положение точки P определяется показателем α , так что при $\alpha = 0$ (т. е. $\sigma = \sigma_*$) линия $B'P$ совпадает с $B'M^*$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ точка F переходит в точку S . Ниже этой кривой $j_+ > j_-$, выше $j_- > j_+$.

Сверхзвуковыми прообразами кривых AD' и $B'P$ являются линии AD и BP , отделяющие области 1, 2, 3. Область 1, в которой $\psi < 1$, отображается ударным переходом в область I' , в которой $j_+ > j_-$ и $p_-'/j_- > 0$. Из (4.7) и (4.9) следует, что все течения, фазовые траектории которых лежат в областях 1 и I' , принадлежат аномальному режиму. Аналогичным образом сверхзвуковые течения, переводимые ударным переходом, из области 3 в дозвуковую область $3'$ также принадлежат к аномальному режиму. Область 2 отображается ударным переходом на область $2'$, в которой $p_-' > p_d'$, так как $p_-'/j_- > 0$ и $j_+ < j_-$. Следовательно, в силу (4.8) сверхзвуковые те-



Фиг. 10

в область I' , в которой $j_+ > j_-$ и $p_-'/j_- > 0$. Из (4.7) и (4.9) следует, что все течения, фазовые траектории которых лежат в областях 1 и I' , принадлежат аномальному режиму. Аналогичным образом сверхзвуковые течения, переводимые ударным переходом, из области 3 в дозвуковую область $3'$ также принадлежат к аномальному режиму. Область 2 отображается ударным переходом на область $2'$, в которой $p_-' > p_d'$, так как $p_-'/j_- > 0$ и $j_+ < j_-$. Следовательно, в силу (4.8) сверхзвуковые те-

чения с фазовыми траекториями в области 2, переходящие за ударной волной в области 2', принадлежат к нормальному режиму. Отметим на фиг. 10 точки G, K и соответствующие им G', K' . По траекториям, переходящим через эти точки, можно перейти из области аномального режима в область нормального режима и наоборот. Наличие таких траекторий указывает на то, что имеются стационарные течения, принадлежащие частично нормальному и частично аномальному режиму.

Выберем на плоскости $M\psi$ некоторую точку N . Пусть эта точка определяет сверхзвуковой поток на входе в электродную зону Γ_a , длину которой будем считать заданной. Проследим на фиг. 10 за траекториями, по которым будет перемещаться эта точка при увеличении внешнего электрического поля E , т. е. с ростом ψ , и проанализируем скачки, которыми можно перейти на дозвуковые части этих траекторий.

Пусть внешнее поле E настолько мало, что точка N принадлежит траектории, целиком лежащей в областях 1 и 1'. В этом случае течение со скачком в любой точке $x = \xi$ принадлежит аномальному режиму. С повышением величины E в потоке появляется область, примыкающая к сечению Γ_b , течение в которой принадлежит нормальному режиму. Одну из таких траекторий выделяет точка N^1 . Будем увеличивать значение E . Указанная область расширяется и занимает весь поток между сечениями Γ_a и Γ_b . Таким течениям соответствуют траектории, определяемые точками N^2, N^3 . При дальнейшем увеличении E в потоке снова появляется область, примыкающая к сечению Γ_a (траектория с точкой N^4), в которой течение принадлежит аномальному режиму. При еще большем увеличении E эта область расширяется на весь поток (траектория с точкой N^5).

6. Влияние изменения площади сечения канала и теплообмена со стенками. С учетом этих факторов в квазиодномерном приближении система уравнений стационарного течения (2.1) имеет вид

$$\rho u F = \mu = \text{const} \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dx} [F(p + \rho u^2)] = \frac{1}{c} j H F + F' p \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u F \left(\epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] = j E F + q \quad (6.3)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения канала, q — величина теплового потока, приходящего от стенок. Повторяя вывод равенства (4.7), находим, что

$$p_+ - p_- = \frac{1}{M_-^2 - 1} \left[\frac{H}{c} [(\gamma - 1)(\psi_- - 1)M_-^2 - 1](j_+ - j_-) - \frac{F'}{F} [1 + (\gamma - 1)M_-^2](p_+ - p_-) - \frac{c(\gamma - 1)}{u_- H} (q_+ - q_-)M_-^2 \right]$$

Из (6.4) видно, что расширение канала является положительным фактором с точки зрения достижения нормального режима. Течение можно перевести из аномального режима в нормальный достаточно сильным расширением канала, и наоборот сужение может перевести устойчивый нормальный режим с ударной волной в неустойчивый аномальный. В случае $\sigma = \sigma_0, \psi = 0$ и $q = 0$, пользуясь законом сохранения импульса на скачке

$$p_+ - p_- = \frac{\mu}{F} (u_- - u_+)$$

и (6.4), получаем предельный режим, если площадь поперечного сечения канала F удовлетворяет уравнению

$$F' = - \frac{H^2}{c^2} \frac{\sigma_0}{\mu} F^2 \quad (6.5)$$

Интегрируя (6.5), получаем, что в канале имеет место нормальный режим, если площадь сечения убывает не быстрее чем

$$F = \frac{H^2}{c^2} \left(\frac{\sigma_0}{\mu} x + A \right)^{-1}$$

где A — произвольный параметр.

Рассмотрим теперь канал постоянного сечения, в котором теплообмен со стенкой происходит по закону

$$q = -K(T_{aw} - \theta)$$

Здесь T_{aw} — адиабатическая температура стенки, θ — температура стенки. Из (6.4) имеем

$$p_{a'} - p_{-'} = \frac{1}{M_-^2 - 1} \left[\frac{H}{c} [(\gamma - 1)(\psi_- - 1)M_-^2 - 1](j_+ - j_-) - ckM_-^2 \frac{\gamma - 1}{u - H} (T_{aw+} - T_{aw-}) \right]$$

Так как адиабатическая температура стенки за скачком T_{aw-} всегда больше температуры T_{aw+} перед скачком, то отсюда видно, что теплообмен со стенками (подвод или отвод тепла) улучшает «нормальность» режима.

Возвращаясь к общему случаю, из (6.4) получаем, что течение с ударной волной принадлежит предельному режиму, когда площадь сечения канала удовлетворяет уравнению

$$F' = BF/A, \quad A = [1 + (\gamma - 1)M_-^2](p_+ - p_-)$$

$$B = \left[\frac{H}{c} (\gamma - 1)(\psi_- - 1)M_-^2 - 1 \right] (j_+ - j_-) - \frac{c(\gamma - 1)}{u - H} M_-^2 (q_+ - q_-)$$

Это уравнение совместно с уравнениями (6.1) — (6.3) составляет замкнутую систему уравнений. Если зафиксировать параметры потока на входе в электронную зону Γ_a , то, решая эту систему уравнений, можно найти параметры течения в предельном режиме и закон изменения площади сечения канала для выбранных электрофизических и термодинамических свойств потока. Наконец, можно показать, что учет трения о стенки улучшает качество течения, сдвигая его в область нормального режима.

Авторы благодарны А. А. Самарскому, Е. П. Велихову, П. П. Волосевичу, С. П. Курдюмову, Ю. П. Попову за полезные советы и обсуждения, а также А. А. Иванову за проведение численных расчетов.

Поступило 14 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. М., «Мир», 1968.
2. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М., Гостехиздат, 1953.
3. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной газодинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1967.
5. Елисеев Б. В., Лобанов А. Д. О продольной устойчивости течения в скрещенных полях. Теплофизика высоких температур; 1967, т. 5, № 1.