

меров и масс разделяемых тел. Если относительная скорость  $U$  придается отбрасываемому диску не мгновенно, а за некоторое время  $\Delta t$ , то при прочих равных условиях потребная величина  $U_0$  оказывается большей; при постоянном ускорении (например, под действием постоянной по величине тяги какого-либо разделяющего двигателя, установленного на отбрасываемой части) диску необходимо сообщить скорость

$$U_0 = \frac{1}{2}a_1\Delta t + (\frac{1}{4}a_1^2\Delta t^2 + 2a_1L_R - 2A/m_2)^{1/2}$$

Очевидно, что расхождение тел за время  $\Delta t$  должно быть меньше, чем  $L_R$ .

Поступило 10 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов Ю. Л., Семенкевич Ю. П., Черкез А. Я. Расчет отрывного течения между двумя телами. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, № 3.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. Мишин Г. И. Измерение донного давления в свободном полете. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
4. Корст Г. Теория определения донного давления в околосзвуковом и сверхзвуковом потоках. Сб. перев. Механика, 1957, № 5.
5. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., Гостехиздат, 1953.

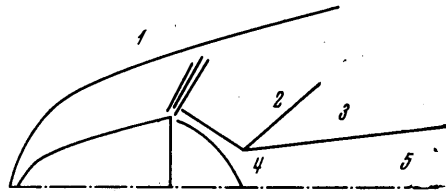
ГИПЕРЗВУКОВОЙ СЛЕД ЗА ЗАТУПЛЕННЫМИ ТЕЛАМИ

К. С. ХОРОШКО (Москва)

Приводятся численные результаты расчетов ламинарного и турбулентного следов за затупленными телами, движущимися с гиперзвуковой скоростью. Рассматривается случай чистого воздуха. Расчеты проведены методом конечных разностей. Учтено влияние градиента давления и неравновесного протекания химических реакций на параметры течения в следе, развивающемся в вихревом внешнем потоке.

Проведено сравнение с численными результатами, полученными по методу интегральных соотношений.

1. **Постановка задачи и основные соотношения.** В настоящее время исследование течения в следе посвящен целый ряд работ [1-4], однако точным численным методом исследовался след, развивающийся в однородном внешнем потоке. В данной работе исследуется след за затупленными осесимметричными телами. К решению задачи применен конечно-разностный метод, описанный в работе [4] при обобщении его на любой внешний поток.



Фиг. 1

Рассматривается задача о течении реагирующей смеси газов в области, расположенной вниз по потоку от горла следа. Схема течения представлена на фиг. 1, на которой: 1 — головной скачок, 2 — хвостовой скачок, 3 — внешний невязкий след, 4 — горло следа, 5 — вязкий след. Предполагается, что в этой области можно использовать уравнения пограничного слоя. Далее предполагается, что массовая диффузия в ионизованном воздухе, состоящем из компонент  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $NO^+$ ,  $e$ , описывается законами бинарной диффузии. Если принять, что электроны диффундируют вместе с  $NO^+$ , то воздух будет смесью, в которой все молекулы (все атомы) имеют приблизительно одинаковый молекулярный вес, и поэтому она может рассматриваться в первом приближении как двухкомпонентная смесь атомов и молекул. Течение рассматривается при постоянных числах Льюиса и Прандтля, хотя метод расчета допускает произвольное задание этих чисел.

Уравнения пограничного слоя для реагирующей смеси записываются в переменных Мизеса  $x$  и  $\psi$

$$\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u y, \quad \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v y \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho u} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\rho \mu y^2}{\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c_p \rho u} \sum_i h_i \sigma_i + \frac{1}{c_p \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\mu c_p y^2 \rho}{\sigma \psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \\ &+ \frac{\mu \rho u y^2}{c_p \psi^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{L}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \psi} \sum_i c_{pi} \frac{\partial c_i}{\partial \psi} \right] \\ \frac{\partial c_i}{\partial x} &= \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{L}{\sigma} \frac{\mu \rho u y^2}{\psi} \frac{\partial c_i}{\partial \psi} \right) + \frac{\sigma_i}{\rho u} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $c_i$  — массовая доля  $i$ -й компоненты,  $x, y$  — горизонтальная и радиальная координаты в физической плоскости,  $h$  — энтальпия,  $L$  — число Льюиса,  $\sigma$  — число Прандтля,  $u, v$  — горизонтальная и радиальная компоненты скорости,  $\mu$  — вязкость,  $\sigma_i$  — массовая скорость образования  $i$ -й компоненты в единице объема вследствие химических реакций.

Граничные условия для системы (1.2)

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial c_i}{\partial \psi} = 0 \\ \psi &= \psi_\delta(x), \quad u = u_e(\psi_\delta, x), \quad T = T_e(\psi_\delta, x), \quad c_i = c_{ie}(\psi_\delta, x) \end{aligned}$$

Параметры потока на линии тока  $\psi_\delta$  определяются как решение вдоль линии тока для невязкого газа.

Если след развивается в завихренном внешнем потоке, обусловленном искривленной ударной волной перед телом, то параметры потока на границе следа являются функциями  $x$  и координаты линии тока  $\psi_\delta$ , которая заранее неизвестна. Будем учитывать завихренность внешнего потока подобно тому, как это сделано в работе [5] для пограничного слоя на теле. В качестве предполагаемой ширины следа воспользуемся формулой, построенной в работе [3] для дальней части следа, именно

$$\delta = A_\delta \left( \frac{x}{d} \right)^{1/n}$$

где  $n = 2$  для ламинарного следа и  $n = 3$  для турбулентного,  $A_\delta$  характеризует начальную ширину следа и ее можно оценить по толщине пограничного слоя на теле.

При решении нужно следить, чтобы предполагаемая граница всегда находилась внутри расчетной сетки, следовательно, с ростом ширины следа растет сетка в радиальном направлении. Параметры в новых точках определяются решением невязкого внешнего потока. Уравнение ударной волны перед телом предполагается известным. Когда внешний поток при удалении от горла следа становится однородным с параметрами невозмущенного потока, то условие 2) переходит в граничное условие

$$\psi \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial c_i}{\partial \psi} = 0 \quad (1.3)$$

За затупленными телами при гиперзвуковых скоростях вязкий след формируется в основном за счет невязкого внешнего завихренного потока. Вкладом пограничного слоя на теле можно пренебречь. И поскольку нет ни полного, ни достаточно хорошего приближенного решения для задачи о течении в донной области, то за начальные данные были взяты значения, полученные путем расчета поверхности линий тока в невязком реагирующем газе около и вдоль тела.

Здесь

$$\begin{aligned} h &= \sum_i c_i h_i, \quad h_i = h_i(T), \quad c_{pi} = \frac{dh_i}{dT}, \quad c_p = \sum_i c_i c_{pi}, \\ \sigma_i &= \mu_i \sum_{s=1}^{Nm} (v_{is}'' - v_{is}') \left[ K_{js} \prod_{j=1}^N \left( \frac{\rho c_j}{\mu_j} \right)^{v_{js}'} - K_{rs} \prod_{j=1}^N \left( \frac{\rho c_j}{\mu_j} \right)^{v_{js}''} \right] \end{aligned}$$

$K_j, K_r$  — константы скоростей прямой и обратной реакций соответственно,  $\mu_i$  — молекулярный вес  $i$ -й компоненты.

**Вязкость.** В ламинарном следе коэффициент вязкости определяется по формуле Сатерленда. В турбулентном следе предполагалось, что уравнения движения остаются в форме (1.2) для средних значений параметров потока, а вязкость находится по фор-

муле Прандтля

$$\mu_T = \rho^\circ K \delta' (u_e - u^\circ), \quad \frac{\delta'^2}{2} = \int_0^{y_\delta} \frac{\rho}{\rho_\infty} y dy, \quad K = 0.02$$

где  $\rho^\circ, u^\circ$  — значения  $\rho$  и  $u$  на оси.

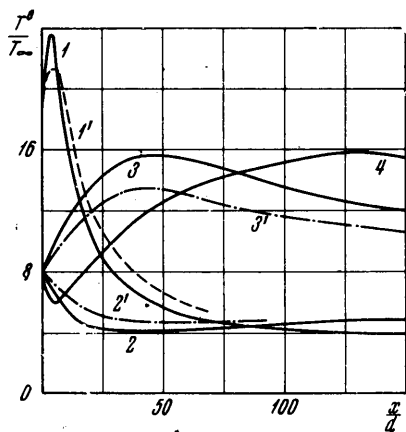
2. Решение системы. Система (1.2) решалась методом конечных разностей при использовании явной схемы. Дифференциальные уравнения системы заменялись разностными соотношениями на основании формул

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, \psi) - f(x, \psi)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{f(x, \psi + \Delta\psi) - f(x, \psi - \Delta\psi)}{2\Delta\psi}$$

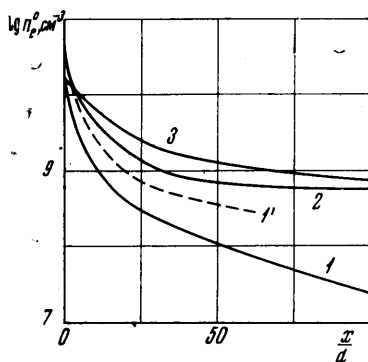
$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( a \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) = \frac{a(x, \psi + 1/2\Delta\psi)[f(x, \psi + \Delta\psi) - f(x, \psi)]}{\Delta\psi^2} - \frac{a(x, \psi - 1/2\Delta\psi)[f(x, \psi) - f(x, \psi - \Delta\psi)]}{\Delta\psi^2}$$

$$a(x, \psi \pm 1/2\Delta\psi) = 1/2 [a(x, \psi) + a(x, \psi \pm \Delta\psi)]$$

Величина шага  $\Delta\psi$  задается, а  $\Delta x$  определяется автоматически из условия устойчивости решения для системы уравнений, полученного применением линейной теории к исходной системе. Начиная от заданных значений в горле следа, расчет проводится для все более удаленных точек.



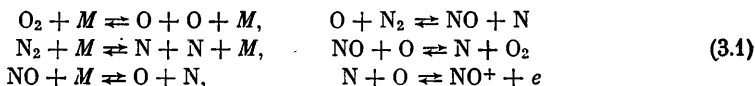
Фиг. 2



Фиг. 3

3. Численные результаты. Проведены расчеты для затупленных конусов при различных числах Рейнольдса  $R$ , отнесенных к параметрам набегающего потока, где за характерный размер тела взят диаметр кормовой части  $d$ . Скорость набегающего потока  $V_\infty$  равнялась 7500 м/сек, диаметр кормовой части менялся от 1 см до 2 м, угол образующей к оси конуса составлял  $10^\circ$ . Начальные данные в горле следа получены путем расчета поверхности линий тока в невязком реагирующем газе. След начал рассчитываться от давления, равного  $\sim 20p_\infty$ , где  $p_\infty$  — давление в набегающем потоке.

Исследовались следующие химические реакции для чистого воздуха:



$M$  — любая частица.

Константы скоростей реакций заимствованы из работ [6, 7]. Поступательная, вращательная и колебательная энергии предполагались в равновесии при поступательной температуре.

В расчетах для формы ударной волны использовалась формула [2]

$$\frac{y}{d} = 0.98 \left[ \frac{x}{d} \sqrt{c_x} \right]^{0.46}$$

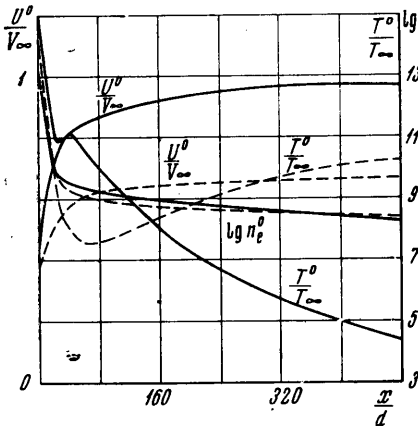
Значения  $y/d$ , рассчитанные по этой формуле, отличаются от их значений, полученных точным расчетом [8], на 10—15%. Для расчета давления в потоке вниз от горла использовалась формула (3.2) из работы [8]. Радиальное число точек в начальном сечении выбиралось так, чтобы при росте расчетной сетки в радиальном направлении в процессе решения параметры в новых точках можно было находить по формулам изэнтропического расширения совершенного газа от значения их за ударной волной перед телом

$$\frac{p}{p_\infty} = 0.7 + \frac{M_\infty^2}{24x/d} \quad (3.2)$$

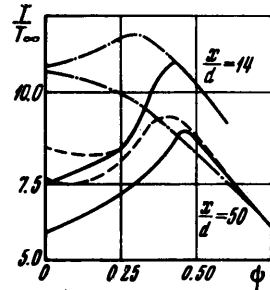
где  $M_\infty$  — число Маха в набегающем потоке.

Для выявления эффектов чисел Льюиса  $L$  и Прандтля  $\sigma$  были проведены расчеты ламинарного следа для значений  $L = 1.45$ ,  $\sigma = 0.71$  (кривые 1, 2, 3 (2', 3')) и для значений  $L = 1$ ,  $\sigma = 1$  (кривая 1' на фиг. 2, 3). Как показали расчеты, влияние чисел  $L$  и  $\sigma$  на температуру  $T^\circ/T_\infty$  и плотность электронов  $n_e^\circ$  незначительно.

Для исследования влияния химических реакций в облас-

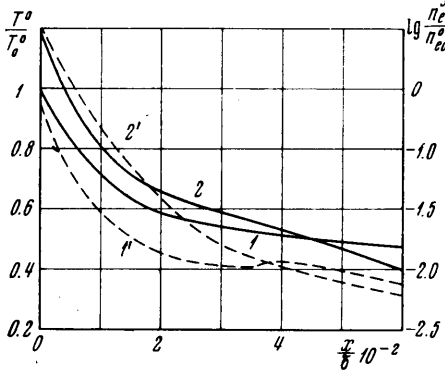


Фиг. 4



Фиг. 5

ти расширения проводились расчеты при наличии химических реакций (кривые 1, 2, 3, 4) и без них (кривые 2', 3'), фиг. 2, 3. Для всех значений числа Рейнольдса  $R = 2 \cdot 10^2$  (кривая 1),  $R = 2 \cdot 10^5$  (кривые 2, 2'),  $R = 1.8 \cdot 10^4$  (кривые 3, 3'),  $R = 2.7 \cdot 10^4$  (кривая 4) можно сказать, что учет химических реакций в области расширения оказывает небольшое влияние на температуру и плотность электронов. Расчеты показали, что имеет место большое влияние диффузии на параметры течения, тем большее, чем меньше число  $R$ . Этот результат означает, что при низких давлениях набегающего потока или на больших высотах возмущенное течение очень быстро захватывает всю область. На фиг. 4 для сравнения показано изменение температуры  $T^\circ/T_\infty$ , плотности электронов  $n_e^\circ$  и скорости в случае ламинарного (штриховые линии) и турбулентного (сплошные линии) следов при одном и том же значении числа  $R = 1.4 \cdot 10^5$  и  $V_\infty = 7000$  м/сек. На фиг. 5 показано сопряжение решений для вязкого следа и внешнего невязкого течения, рассчитанного по линиям тока (сплошные линии) с учетом неравновесности химических реакций. Гладкое сопряжение решений говорит о том, что оценка границы следа сделана правильно. Приведены случаи ламинарного (штриховые линии) и турбулентного (штриховые с точкой линии) следов.



Фиг. 6

На фиг. 6 приведено сравнение с расчетом, выполненным интегральным методом в работе [4] (штриховые линии) при следующих значениях:  $V_\infty = 6515$  м/сек,  $T_0^\circ = 3338^\circ \text{K}$ ,  $\delta = 0.141$  м,  $n_{e0}^\circ = 9.76 \cdot 10^{10}$  для высоты  $H = 43.5$  км; качественное поведение температуры (кривые 1, 1') и плотности электронов (кривые 2, 2') совпадает, но с ростом  $x/d$  отличие в значениях растет.

Индексы  $\circ$  — параметры на оси,  $o$  — параметры в начальном сечении,  $\infty$  — параметры в набегающем потоке.

Расчеты контролировались суммированием концентраций, выполнением интегрального закона сохранения количества движения.

Автор благодарит Мурзинова И. Н. за ценные советы и Воронкина В. Г. за предоставление расчетов начальных данных.

Поступило 15 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zeiberg S. L., Bleich G. D. Finite — difference calculation of hypersonic wakes. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
2. Lees L., Hromas L. Turbulent diffusion in the wake of a blunt-nosed body at hypersonic speeds. J. Aerospace Sci, 1962, vol. 29, No. 8.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
4. Bloom M., Steiger M. Diffusion and chemical relaxation in free mixing. J. Aerospace Sci, Paper, No. 63—67.
5. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Lin S., Teare J. D. Rate of ionization behind shock waves in air. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
7. Hall J., Eshenroeder A., Marrone P. Inviscid hypersonic airflows with coupled nonequilibrium processes. J. Aerospace Sci. Paper, No. 62—67.
8. Steginsky B. Calculation of cylindrical blast wave propagation with counterpressure. AIAA Journal, vol. 2, No 1, 1964.
9. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновеснодиссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.

#### К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕЙ

Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается плоское симметричное обтекание бесконечного клина равномерной струей малой сверхзвуковой скорости (с отошедшей ударной волной). В предельном случае звуковой струи приводится точное решение, построенное методом С. А. Чаплыгина [1].

Задача обтекания тел сверхзвуковой струей с отошедшей ударной волной является важной задачей современной аэродинамики, привлекающей внимание исследователей. Так, в работе [2] изучалось падение сверхзвуковой струи на стенку: методом интегральных соотношений в первом приближении было построено численное решение при  $M_\infty \geq 3$  ( $M_\infty$  — число Маха набегающего потока). В данной работе приводятся некоторые аналитические исследования обтекания бесконечного клина для случая малой сверхзвуковой скорости струи, когда изменениями энтропии на ударной волне можно пренебречь.

Установим характер течения в окрестности точки  $A$  пересечения ударной волны и границы струи, распространяющейся в среде с постоянными давлением  $p_\infty$ . Из соотношения для давлений на скачке уплотнения в точке  $A$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2kM_\infty^2 \sin^2 \sigma - k + 1}{k + 1}$$

следует, что либо в точке  $A$  ударная волна вырождается в характеристику, либо в окрестности точки  $A$  в области между ударной волной и границей струи происходит дополнительный разгон потока, т. е. точка  $A$  является особой. Здесь  $\sigma$  — угол наклона ударной волны к вектору скорости набегающего потока,  $k$  — показатель адиабаты. В области дозвуковых скоростей таких особенностей не существует, поэтому течение в окрестности точки  $A$  является или сверхзвуковым, или смешанным. Покажем, что осуществиться может только последний случай.

Особенность в точке  $A$  (если она существует) — типа Прандтля — Майера. Это означает, что в сверхзвуковой части плоскости годографа область определения решения ограничена некоторой эллипсолоидой, на которой функция тока постоянна.

Предположим, что звуковая линия выходит не из точки  $A$ , а из некоторой точки  $C$ , расположенной на ударной волне внутри струи. Так будет и в случае сверхзв-