

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Ю. П. ГОЛОВАЧЕВ

(Ленинград)

Распространение ламинарной струи термодинамически равновесного «серого» газа рассматривается в приближении теории пограничного слоя. Учет одномерного радиационного переноса энергии осуществляется в P_1 -приближении метода сферических гармоник. Для иллюстрации влияния излучения выполнено численное решение задачи при дополнительных упрощающих предположениях для различных значений параметров излучения. Использованный метод и расчетная схема применимы для исследования сложных струйных течений излучающего газа.

1. Постановка задачи. В приближении теории пограничного слоя рассматривается задача о распространении ламинарной струи газа, истекающей из плоского сопла шириной $2L$ в однородный спутный поток того же газа. Газ считается «серым» и находящимся в состоянии местного термодинамического равновесия. В плоскости среза сопла ($x = 0$) задаются однородные профили параметров газа, и при $y = L$ происходит их скачкообразное изменение. Здесь x, y — координаты прямоугольной системы координат, причем ось x направлена вдоль по потоку.

В представляющем практический интерес диапазоне температур и плотностей влияние излучения сводится к появлению радиационного теплового потока, который должен быть учтен в уравнении энергии. Для нахождения радиационного потока энергии к системе уравнений пограничного слоя должно быть присоединено уравнение переноса излучения [4, 2]. Таким образом, система уравнений, описывающих распространение струи с учетом излучения, состоит из уравнений пограничного слоя для неизлучающего газа с уравнением энергии, содержащим дивергенцию лучистого теплового потока, и уравнения переноса излучения. Интегральный характер зависимости радиационного теплового потока от интенсивности излучения делает исходную систему уравнений интегродифференциальной.

Задача о распространении ламинарной струи с учетом одномерного радиационного переноса энергии для «серого» газа рассматривалась в работах [2, 3]. Для случая очень малой средней длины свободного пробега излучения получено решение линейризованных уравнений, справедливое, когда отклонения параметров струи от параметров спутного потока малы, а вязкой диссипацией и работой сил давления можно пренебречь. В случае любой конечной средней длины свободного пробега излучения решение не получено, но проведен анализ уравнения энергии, позволивший сделать некоторые качественные выводы о поведении решения.

Ниже рассматривается распространение излучающей плоской струи при любой конечной длине свободного пробега излучения.

2. Определение дивергенции лучистого теплового потока. В соответствии с допущениями теории пограничного слоя будем учитывать только поперечный радиационный перенос энергии. Для нахождения лучистого теплового потока воспользуемся P_1 -приближением метода сферических гармоник [4], которое дает достаточно точные результаты для любой конечной длины свободного пробега излучения. При этом уравнение переноса излучения приближенно заменяется системой двух уравнений

$$\frac{dq_y}{dy} = -\kappa(I_0 - 4\sigma T^4), \quad \frac{dI_0}{dy} = 3\kappa q_y \quad \left(I_0 = \int_{(4\pi)} I d\Omega \right) \quad (2.1)$$

Здесь q_y — составляющая радиационного теплового потока q , κ — объемный коэффициент поглощения, T — температура, I — интенсивность излучения, Ω — единичный вектор направления движения квантов, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Перейдя к оптической координате τ по формуле

$$\tau = \int_0^y \kappa dy \quad (2.2)$$

из уравнений (2.1) можно получить уравнение для потенциала лучистого теплового потока [5]

$$d^2\psi / d\tau^2 - 3\psi = 4\sigma T^4 \quad (\psi = -1/3 I_0) \quad (2.3)$$

Здесь ψ — потенциал лучистого теплового потока. Граничные условия для потенциала ψ имеют вид

$$q_y = d\psi / d\tau = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad q_y = d\psi / d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Первое условие вытекает из симметрии поля излучения, второе выражает тот факт, что при любой конечной длине пробега излучения достаточно далеко от оси струи устанавливается полное равновесие излучения с веществом однородного спутного потока.

Решение уравнения (2.3) с граничными условиями (2.4) имеет вид

$$\psi = \frac{4\sigma}{\sqrt{3}} \left\{ \int_0^{\tau} T^4 \operatorname{sh} \sqrt{3}(\tau - t) dt - \left[\int_0^{\infty} T^4 \exp(-\sqrt{3}t) dt \right] \operatorname{ch} \sqrt{3}\tau \right\} \quad (2.5)$$

Дивергенция лучистого теплового потока определяется через вторую производную потенциала из уравнения (2.3)

$$\frac{dq_y}{d\tau} = 4\sigma T^4 + 4\sqrt{3}\sigma \left\{ \int_0^{\tau} T^4 \operatorname{sh} \sqrt{3}(\tau - t) dt - \left[\int_0^{\infty} T^4 \exp(-\sqrt{3}t) dt \right] \operatorname{ch} \sqrt{3}\tau \right\} \quad (2.6)$$

Итак, задача о распространении струи с учетом радиационного переноса энергии сводится к решению уравнений излучающего пограничного слоя, в которых $\operatorname{div} \mathbf{q}$ дается формулой (2.6).

3. Пример расчета. Для выявления основных особенностей течения найдено решение задачи при следующих упрощающих предположениях. Температура струи и спутного потока достаточно высока, а скорость истечения из сопла достаточно мала, чтобы газ можно было считать несжимаемым и пренебрегать вязкой диссипацией энергии. Теплоемкость газа, коэффициенты переноса и коэффициент поглощения считаются постоянными. Последнее предположение оправдывается, когда температура струи не слишком сильно отличается от температуры спутного потока.

Система уравнений, описывающих плоское струйное течение излучающего газа, при указанных предположениях имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\nu}{P} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (3.1)$$

Граничные условия

$$\left. \begin{aligned} u = u_+ = \text{const} \\ h = h_+ = \text{const} \\ v = \partial u / \partial y = 0 \\ \partial h / \partial y = 0 \end{aligned} \right\} (0 \leq y \leq L) \quad \left. \begin{aligned} u = u_{\infty} = \text{const} \\ h = h_{\infty} = \text{const} \\ u \rightarrow u_{\infty} \\ h \rightarrow h_{\infty} \end{aligned} \right\} (L < y < \infty) \quad \left. \begin{aligned} \\ \\ \\ \end{aligned} \right\} x > 0 \quad (3.2)$$

Здесь u, v — составляющие скорости по осям x, y ; ν — коэффициент кинематической вязкости; $h = c_p T$ — энтальпия; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; P — число Прандтля, ρ — плотность, индекс $+$ соответствует величинам на срезе сопла, индекс ∞ — величинам в однородном спутном потоке, $\operatorname{div} \mathbf{q}$ дается формулой (2.6), которая после перехода от оптических координат к физическим принимает вид

$$\frac{dq_y}{dy} = 4\kappa\sigma \left\{ T^4 + \sqrt{3}\kappa \left[\int_0^y T^4 \operatorname{sh} \sqrt{3}\kappa(y - S) dS - \left(\int_0^{\infty} T^4 \exp(-\sqrt{3}\kappa s) ds \right) \operatorname{ch} \sqrt{3}\kappa y \right] \right\} \quad (3.3)$$

После перехода к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{LR}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad u' = \frac{u}{u_+}, \quad v' = \frac{vR}{u_+}, \quad h' = \frac{h}{h_+}, \quad R = \frac{u_+ L}{\nu} \quad (3.4)$$

уравнения (3.1) имеют вид (штрихи у безразмерных величин опущены)

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0; \quad (3.5)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - 4\alpha BR \left\{ h^4 + \sqrt{3}\alpha \left[\int_0^{\eta} h^4 \operatorname{sh} \sqrt{3}\alpha(\eta - s) ds - \left(\int_0^{\infty} h^4 \exp(-\sqrt{3}\alpha s) ds \right) \operatorname{ch} \sqrt{3}\alpha\eta \right] \right\}$$

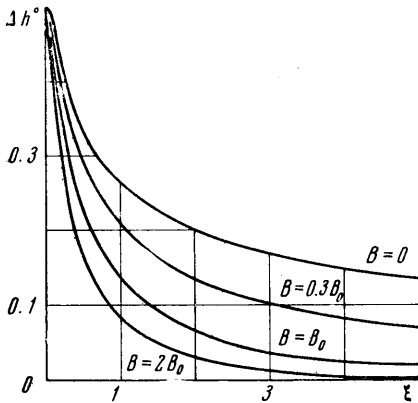
граничные условия

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 & (0 \leq \eta \leq 1), & & u = m & (1 < \eta < \infty) \\ k &= 1 & & & h = n & \end{aligned} \right\} \xi = 0 \quad (3.6)$$

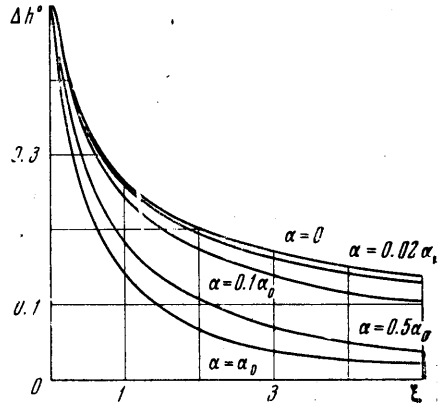
$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & (\eta = 0), & & u \rightarrow m & (\eta \rightarrow \infty) \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} &= 0 & & & h \rightarrow n & \end{aligned} \right\} \xi > 0$$

$$\left(m = \frac{u_\infty}{u_+}, n = \frac{h_\infty}{h_+}, B = \frac{\sigma T_+^4}{\rho u_+ h_+}, \alpha = \kappa L \right)$$

В расчетах принималось $m = n = 0.5$, $L = 0.1$ см. Учет радиационного переноса энергии приводит к появлению в уравнении энергии безразмерного параметра α — отношения характерного линейного размера задачи (полуширины сопла) к средней длине свободного пробега и B числа Больцмана, характеризующего от-



Фиг. 1



Фиг. 2

носительную роль радиационного переноса энергии по сравнению с гидродинамическим.

Система уравнений (3.5) с граничными условиями (3.6) решалась конечно-разностным методом с помощью двухслойной неявной шеститочечной схемы [6]. В начальном сечении $\xi = 0$ при $\eta = 1$ скорость и энтальпия газа меняются скачкообразно. Это заставляет считать начальный участок с более мелкими шагами по ξ и η . По мере увеличения ξ шаги интегрирования увеличиваются. Критериями точности счета, правильности выбора шага интегрирования и числа итераций по ξ служат интегральные условия сохранения избыточного импульса и избыточного потока тепла. В безразмерных переменных они имеют вид

$$\int_0^\infty u(u - m) d\eta = 1 - m, \quad \int_0^\infty u(h - n) d\eta = 1 - n \quad (3.7)$$

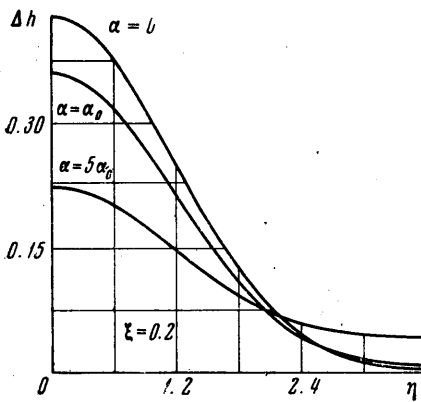
Следует отметить, что при наличии радиационного переноса энергии проверка второго из этих интегральных условий (3.8) затрудняется медленным приближением энтальпии к ее асимптотическому значению n . При интегрировании уравнений (3.5) соблюдалась точность порядка 1%, что соответствует точности P_1 -приближения метода сферических гармоник для одномерного радиационного переноса энергии.

При сделанных предположениях, как видно из (3.5) и (3.6), динамическая часть задачи может решаться независимо от тепловой. Распределение скоростей в плоском струйном течении несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами переноса найдено в [7].

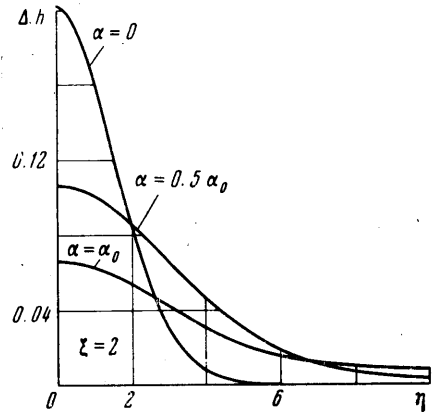
В данной работе получены результаты для различных значений параметров излучения α и B (фиг. 1—4). На фиг. 1 показано изменение безразмерной избыточной энтальпии на оси струи для различных значений числа Больцмана

$$\Delta h = \frac{h - h_\infty}{h_+} = \frac{h}{h_+} - n, \quad \Delta h^0 = \Delta h \quad \text{при } \eta = 0$$

Величина $B = B_0$ соответствует температуре $T_+ = 6000^\circ \text{K}$. При $B = 0$ получается решение для неизлучающей струи. Изменение безразмерной избыточной энтальпии вдоль оси струи при $B = B_0$ для различных значений параметра α показано на фиг. 2, $\alpha = 0$ соответствует неизлучающему газу, $\alpha = \alpha_0$ коэффициенту поглощения $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$. Видно, что в рассмотренном диапазоне α и B с увеличением числа Больцмана и коэффициента поглощения влияние радиационного переноса энергии увеличивается. Радиационный перенос энергии уменьшает энтальпию на оси струи. При этом основное изменение максимальной энтальпии происходит на тем более коротком участке, чем больше число Больцмана и коэффициент погло-



Фиг. 3



Фиг. 4

щения. На фиг. 3, 4 приведены профили безразмерной избыточной энтальпии для $\xi = 0.2$ и $\xi = 2$ при $B = B_0$ для разных значений α . Видно, что радиационный перенос энергии приводит к перераспределению энтальпии по сечению струи. Он уменьшает температуру горячей области вблизи оси и повышает температуру газа вдали от оси. В рассмотренном диапазоне α этот эффект тем заметнее, чем больше коэффициент поглощения. Перераспределение энтальпии становится более значительным по мере удаления от начального сечения $\xi = 0$. Одной из существенных сторон влияния радиационного переноса энергии на распространение струи является расширение области теплового смешения, отчетливо видное на фиг. 4.

В заключение отметим, что использованный метод и расчетная схема применимы для исследования струйных течений сжимаемого газа с учетом вязкой диссипации и химических реакций с переменными коэффициентами переноса и поглощения. В начальном сечении вместо однородных могут быть заданы произвольные профили параметров газа, в частности параболические.

Автор выражает благодарность Ю. П. Лунькину за помощь в постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 26 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Бай Ш и -и. Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
3. Pai S.-I. Laminar jet mixing in radiation gasdynamics. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 10.
4. Cheng P. Dynamics of a radiating gas with application to flow over a wavy wall. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 2. (Рус. перев.: Динамика излучающего газа. Течение на волнистой стенке. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 2).
5. Cohen I. M. Radiative heat — flux potential. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 5. (Рус. перев.: Потенциал лучистого теплового потока. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 5.)
6. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. работ ВЦ МГУ. Вычислительные методы и программирование, Изд. МГУ, 1962.
7. Белоглазов Б. П., Гиневский А. С. Численное решение плоской задачи о неавтономных струйных течениях несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.