ОБ ОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

В. С. ГАЛКИН

(*Москва*)

В работах [1, 2] точные решения уравнения Больцмана для напряжений в сдвиговом [1] и одномерном нестационарном [2] течениях одноатомного максвеллова газа были использованы для анализа области применимости метода Чепмена — Энскога (некоторые выводы этих работ суммированы в работе [3]). Ниже рассматривается второе из указанных течений. В отличие от цитированных работ изучается область применимости метода Гильберта, решена задача начального кнудсеновского слоя (где время t^* порядка среднего времени между столкновениями $\tau = \mu / p$). Проведено сравнение результатов методов Чепмена — Энскога и Гильберта, уточняются некоторые выводы работ [1, 2]. Полученные выводы в основном справедливы и в случае сдвигового течения.

Рассмотрим одномерное нестационарное течение (одномерный разлет газа), когда скорость газа V, направленная по оси x, и плотность ρ даются формулами [2]

$$V = \frac{x}{t^* + c}, \quad \rho = \frac{\rho(0)}{1+t}, \quad t = \frac{t^*}{c}, \quad c = \text{const} \tag{1}$$

где c предполагается фиксированной величиной.

В этом случае из точной системы уравнений для моментов второго порядка следует [2] замкнутая система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для давления p и напряжения[1] p_{xx}

$$dp / d\eta + 5p + 2p_{xx} = 0, \qquad dp_{xx} / d\eta + 4p + (7 + 3/\varepsilon)p_{xx} = 0 \tag{2}$$

$$\eta = \frac{1}{3}\ln(1+t), \qquad \varepsilon = \tau\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mu(0)}{cp(0)} \sim K$$

Здесь K — число Кнудсена. В начальный момент времени $p = p(0)$, $p_{xx} = p_{xx}(0)$. Вопрос о допустимых значениях $\Pi_{xx}(0) = p_{xx}(0) / p(0)$ рассмотрен в работе [2].

Решение системы (2) имеет вид

$$\frac{p}{p(0)} = A(1+t)^{1/3 r_1}P, \qquad \frac{p_{xx}}{p} = -\frac{5+r_1}{2}Q$$

$$P = 1 + B(1+t)^k, \qquad Q = P^{-1}\left[1 + B\frac{5+r_2}{5+r_1}(1+t)^k\right] \tag{3}$$

$$A = \frac{5 + r_2 + 2\Pi_{xx}(0)}{r_2 - r_1}, \qquad B = \frac{1}{A} - 1, \qquad k = \frac{r_2 - r_1}{3}$$

---

[1] Напряжения p_{ij} вводятся так, что моменты второго порядка $\tau_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}$.

Корни характеристического уравнения системы (2)

$$r_{1,2} = -{}^3/_2\varepsilon^{-1}[1 + 4\varepsilon \mp \sqrt{1 + 4\varepsilon({}^1/_3 + \varepsilon)}] \tag{4}$$

Укажем основные свойства полученного решения.
При малых ε и фиксированном $\Pi_{xx}(0)$ имеем

$$r_1 = -5 + {}^8/_3\varepsilon - {}^{16}/_9\varepsilon^2 + \ldots \tag{5}$$

$$k = -\varepsilon^{-1} - {}^2/_3 + \ldots, \qquad B = {}^2/_3\Pi_{xx}(0)\varepsilon + \ldots \tag{6}$$

$$A = 1 - {}^2/_3\Pi_{xx}(0)\varepsilon - {}^4/_9[2 - \Pi_{xx}(0)]\varepsilon^2 + \ldots \tag{7}$$

Ряды (5), (7) сходятся при

$$\varepsilon < \varepsilon_*, \qquad \varepsilon_* = {}^1/_6(\sqrt{10} - 1) \tag{8}$$

В выражения (3) для p, p_{xx} входят медленно и быстро убывающие во времени члены. Действительно, имеем

$$-{}^5/_3 < {}^1/_3 r_1 < -1, \qquad -\infty < k < -2 \qquad (0 < \varepsilon < \infty)$$

Поэтому при любых фиксированных ε, $\Pi_{xx}(0)$ с ростом t решение (3) стремится к виду [2]

$$-p = Ap(0)(1 + t)^{{}^1/_3 r_1} \tag{9}$$

$$p_{xx} / p = -{}^1/_2(5 + r_1) \tag{10}$$

тем быстрее, чем меньше ε. Смысл «предельного» решения (9), (10) будет выяснен ниже. Построим теперь решения задачи при помощи методов Чепмена — Энскога и Гильберта и сравним их с решением (3).

В соответствии с основной идеей метода Чепмена — Энскога нужно выразить p_{xx} через p, ε, исключая при этом производную от p по t при помощи уравнения энергии (первое уравнение (2)), после чего найти из уравнения энергии p. Для этого применим широко используемый итерационный метод получения ряда Чепмена — Энскога непосредственно из уравнений моментов [1, 4] при $\varepsilon \ll 1$. Из уравнений (2) получаем следующую итерационную схему:

$$-\frac{3}{\varepsilon}p_{xx}^{(n+1)} = \dot{p}_{xx}^{(n)} + 4p + 7p_{xx}^{(n)}, \qquad \dot{p}^{(n)} = -5p - 2p_{xx}^{(n)} \tag{11}$$

Здесь точкой обозначена производная по η, $p_{xx}^{(0)} = 0$. В результате получаем $p_{xx} = p\Pi_{xx}$, где Π_{xx} — степенной ряд по ε. В каждое приближение $\Pi_{xx}^{(n)}$, начиная с барнеттовского ($n = 2$), входит часть членов высших порядков ε^m, $m > n$, которые на каждом этапе необходимо отбрасывать. В этом смысле уравнения (11) «несовершенны», однако они просты и удобны при анализе сходимости разложения Π_{xx} по ε.

Пусть указанный степенной ряд сходится в некотором интервале значений ε к сумме $\Pi_{xx}^{(\infty)}$. Исключая из первого уравнения (11) производную от давления при помощи второго уравнения (11), устремляя n к ∞, получим для $\Pi_{xx}^{(\infty)}$ квадратное уравнение

$$2\varepsilon\Pi_{xx}^{(\infty)2} - (3 + 2\varepsilon)\Pi_{xx}^{(\infty)} - 4\varepsilon = 0 \tag{12}$$

которое совпадает с уравнением для $-{}^1/_2(5 + r_{1,2})$, а само разложение Π_{xx} по ε — с разложением $-{}^1/_2(5 + r_1)$ по ε (см. (5)), сходящимся при $\varepsilon < \varepsilon_*$ (8).

Таким образом

$$p_{xx}/p = -{}^1/_2(5+r_1) = -{}^4/_3\varepsilon + {}^8/_9\varepsilon^2 + \ldots \tag{13}$$

Здесь под r_1 понимается разложение (5), первый член ряда (13) соответствует приближению Навье — Стокса, второй — Барнетта и т. д.

Подставляя (13) в первое уравнение (2), получим решение по Чепмену — Энскогу

$$p/p_0 = (1+t)^{r_1/3}, \qquad r_1/3 = -{}^5/_3 + {}^8/_9\varepsilon + \ldots \tag{14}$$

Здесь p_0 — некоторое «начальное» значение p, получаемое из решения задачи начального кнудсеновского слоя, вне которого применимы решения по Чепмену — Энскогу и Гильберту. Существование кнудсеновского слоя обусловлено наличием малого параметра ε перед производной во втором уравнении (2) (перед дифференциальной частью уравнения Больцмана).

Решим задачу методом Гильберта и найдем p_0. Известно [4, 5], что при использовании этого метода решается последовательность неоднородных уравнений Эйлера[1], ряд Гильберта является внешним разложением уравнения Больцмана. Начальные условия определяются из решения задачи кнудсеновского слоя. Для этого будем использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [6].

В соответствии с изложенным решение для p будем искать в виде степенного ряда по ε, начальные значения всех коэффициентов разложения, кроме нулевого, будем полагать равными нулю, т. е.

$$p \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\varepsilon^k, \quad a_0(0) = p_0, \quad a_k(0) = 0 \quad (k \geqslant 1) \tag{15}$$

Введем функцию $\Pi_{xx} = p_{xx}/p$ и запишем последовательность неоднородных уравнений Эйлера (для p, скорость и плотность заданы) в виде

$$\dot{p}^{(n)} + 5p^{(n)} = -2(p\Pi_{xx})^{(n)}, \qquad p^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\varepsilon^k \tag{16}$$

Прямое (внешнее) разложение уравнения для Π_{xx}, получаемого из системы (2)

$$\varepsilon\dot{\Pi}_{xx} = 2\varepsilon\Pi_{xx}^2 - (3+2\varepsilon)\Pi_{xx} - 4\varepsilon \tag{17}$$

является степенным рядом по ε. Коэффициенты ряда не зависят от η и определяются путем разложения по ε квадратного уравнения, получаемого приравниванием правой части (17) нулю и совпадающего с уравнением (12). Следовательно, искомый ряд совпадает с рядом (13). После этого находится ряд для p

$$p = p_0 R(t), \qquad R(t) = (1+t)^{-5/3}[1 + {}^8/_9\varepsilon\ln(1+t) + \ldots] \tag{18}$$

Здесь первый член разложения соответствует приближению Эйлера и т. д.

Легко показать, что $R(t)$ является разложением по ε при фиксированном t правой части формулы (14). Устремляя в (16) величину n к ∞, используя формулу (13), получим

$$\dot{p}^{(\infty)} + 5p^{(\infty)} = p^{(\infty)}(5 + r_1)$$

[1] В отличие от метода Чепмена — Энскога, когда последовательно решаются уравнения Эйлера, Навье — Стокса, Барнетта и т. д.

Решение этого уравнения дается формулой (14).

Найдем теперь внутреннее разложение. Перейдя в уравнении (17) и в уравнении энергии к переменной $t_i = t\sqrt{\varepsilon}$ и разлагая их в ряды по ε при фиксированном t_i, получим

$$\Pi_{xx} = \Pi_{xx}(0)e^{-t_i} + \frac{2}{3}e^{-t_i}\varepsilon\left[\Pi_{xx}(0)\left(\frac{3}{4}t_i^2 - t_i\right) + \right.$$

$$\left. + \Pi_{xx}^2(0)(1 - e^{-t_i}) + 2(1 - e^{-t_i})\right] + \ldots \qquad (19)$$

$$p = p(0)[1 - {}^5/_3\varepsilon t_i + {}^2/_3\varepsilon\Pi_{xx}(0)(e^{-t_i} - 1) + \ldots] \qquad (20)$$

Сращивая стандартными методами [6] внешнее и внутреннее разложения (18), (20), найдем, что p_0 — степенной ряд по ε, и определим его коэффициенты

$$p_0 = p(0)[1 + {}^2/_3\varepsilon\Pi_{xx}(0) + \ldots]$$

Для определения радиуса сходимости этого ряда проще воспользоваться готовым решением (3). Так как ряд Гильберта является внешним разложением, то рассмотрим асимптотическое разложение решения (3) для $\varepsilon \to 0$ при фиксированном t. Обозначая через L — степенной ряд по ε, коэффициенты которого — полиномы по t, $\Pi_{xx}(0)$, используя (5), (6), получим

$$p \sim p(0)AR[1 + \varepsilon L(1+t)^{-1/\varepsilon}] \sim p(0)AR \qquad (21)$$

Здесь A — разложение (7). Сравнивая (18), (21), найдем

$$p_0 = p(0)A, \qquad A = 1 + {}^2/_3\varepsilon\Pi_{xx}(0) + \ldots \qquad (\varepsilon < \varepsilon_*) \qquad (22)$$

Срастим решение по Чепмену — Энскогу (14) с внутренним. Для этого снова используем в уравнении энергии замену переменной $p_{xx} = p\Pi_{xx}$, подставим внутреннее разложение (19) уравнения (17) в уравнение энергии. После интегрирования найдем

$$p = p(0)\exp[-{}^2/_3\Pi_{xx}(0)(1 - e^{-t_i})\varepsilon - {}^4/_9\varepsilon^2 Z + \ldots](1 + \varepsilon t_i)^{-5/3 + 8/9\varepsilon + \ldots}$$

$$Z = \Pi_{xx}(0)[(1 + t_i - {}^3/_4 t_i^2)e^{-t_i} - 1] + {}^1/_2\Pi_{xx}^2(0)(1 + e^{-2t_i} - \qquad (23)$$

$$- 2e^{-t_i}) + 2(1 - e^{-t_i})$$

Переходя здесь к внешней переменной t, сравнивая с (14), получим

$$p_0 = p(0)\exp\{-{}^2/_{34}\Pi_{xx}(0)\varepsilon - {}^4/_9\varepsilon^2(2 - \Pi_{xx}(0) + {}^1/_2\Pi_{xx}^2(0)) + \ldots\} \qquad (24)$$

Таким образом, в каждом приближении в (24) удерживаются внепорядковые по ε члены. Разлагая (24) в ряд по ε, получим (22). Тот же результат можно получить, сравнивая решение (14) с «предельным» решением (9). Само это предельное решение при малых $\varepsilon < \varepsilon_*$ является просто суммой ряда, даваемого внешним асимптотическим разложением, отличие его от точного решения характеризуется той же ошибкой, что и внешнее разложение (21). Теперь суммируем полученные результаты.

Ряд Гильберта для p представляет собой последовательное разложение предельного решения (9) (внешним разложением) в ряд по ε при фиксированном t. Метод Чепмена — Энскога дает решение, по форме совпадающее с (9), (10), разлагается по ε лишь r_1. Решение неаналитически зависит от ε, в каждом приближении учитываются «внепорядковые» по ε члены. При любых фиксированных t, $\Pi_{xx}(0)$ и $\varepsilon < \varepsilon_*$ решения обоими методами сходятся к (9). Поэтому методы Чепмена — Энскога и Гильберта в рассматриваемом случае эквивалентны: при малых числах K они применимы при любых t вне кнудсеновского слоя.

В области применимости указанных методов отдельные (одинаковые по номеру) их приближения отличаются одно от другого, вообще говоря, на внепорядковые по ε величины. Конечно, эти приближения справедливы в конечных интервалах времени. Например, при фиксированном ε и $t \to \infty$ отношение $p^{(1)}/p \to \infty$, где $p^{(1)}$ — давление по Навье — Стоксу, p — его точная величина.

Область применимости по t отдельных приближений рассматриваемых методов зависит от номера приближения, ε и — в общем случае — от характера течения. В данном случае, как показывают расчеты при $A = 1$, приближения типа Навье — Стокса примерно эквивалентны, область применимости приближения Барнетта (для p) несколько больше области применимости аналогичного приближения метода Гильберта [3].

Начальное значение p_0 существенно зависит от величины $\Pi_{xx}(0)$. Если

$$\Pi_{xx}(0) = -{}^1/_2(5 + r_1) \tag{25}$$

то из (3) следует, что $A = 1$, $B = 0$ и формулы (9), (10) являются точным решением задачи при любом t. Начальный кнудсеновский слой исчезает. Решения методами Чепмена — Энскога и Гильберта при $\varepsilon < \varepsilon_*$ и любых t сходятся в обычном смысле к точному решению.

В общем случае методы Гильберта и Чепмена — Энскога носят асимптотический характер, являясь указанными формами внешнего асимптотического разложения.

В приближении Навье — Стокса имеем

$$p = p(0)\,[1 - {}^2/_3\Pi_{xx}(0)\,\varepsilon]\,(1 + t)^q, \qquad q = -{}^5/_3 + {}^8/_9\varepsilon$$

Решение в приближении Эйлера следует отсюда при $\varepsilon = 0$, оно не зависит от $\Pi_{xx}(0)$, т. е. от решения задачи кнудсеновского слоя: решение этой задачи для определения необходимых при использовании метода Чепмена — Энскога (и метода Гильберта) начальных и краевых условий требуется только в приближениях более высоких, чем приближение Эйлера. В качестве граничных условий для уравнений Навье — Стокса используются условия «скольжения» на теле и скачке уплотнения. Для получения этих условий необходим анализ кнудсеновского слоя у поверхности тела и структуры скачка уплотнения.

Полученные выводы в основном справедливы и для сдвигового течения

$$V_x = \alpha y, \qquad V_y = V_z = 0, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \qquad \rho = \mathrm{const} \tag{26}$$

однако в этом случае имеются некоторые специфические особенности.

Причиной рассмотрения здесь именно одномерного нестационарного течения (1) является то, что оно «менее вырожденное», чем сдвиговое течение (26). Для обоих течений отличны от нуля напряжения в приближении Навье — Стокса: в случае течения (1) — p_{xx}, в случае течения (26) — p_{xy}. Однако в отличие от течения (1) в случае сдвигового течения уравнения Эйлера удовлетворяются тождественно, в формуле для p_{xy} равен нулю барнеттовский член (этот член в формуле (11) для p_{xx} отличен от нуля).

В работе [1] сравнивалось точное решение для напряжений в сдвиговом течении с решением методом Чепмена — Энскога, в работе [2] проведен аналогичный [1] анализ одномерного нестационарного течения (1). При решении задачи этим методом предполагалось $p_0 = p(0)$, что справедливо при специальных начальных условиях типа (25), когда начальный кнудсеновский слой исчезает. Это не дало возможности провести до конца анализ области применимости метода Чепмена — Энскога, однако позволило впервые [1] показать неправомерность часто встречающихся при изложении указанного метода и теоремы единственности Гильберта представлений о «причинности» состояния газа при больших t^* и малых, но конечных, ε, о «нормальности» решений этим методом (см. замечания по этому поводу во введении к работе [5]). Такого рода состояния и соответствующие им «нормальные» решения, при больших t^* не зависящие от начальных значений негидродинамических моментов, могут реализоваться в каких-то частных вырожденных ситуациях или при специальных начальных условиях типа (25) (или асимптотически при $\varepsilon \to 0$, когда будет справедливо приближение Эйлера). В работе [3] были получены точные нормальные решения уравнений Больцмана для диффузионных скоростей $W_i(t^*)$ в двухкомпонентной смеси газов (при наличии внешних сил), которые при больших t^* перестают зависеть от $W_i(0)$ и зависят лишь от гидродинамических переменных. Кроме того, в этой работе был проведен анализ других нормальных решений — точных решений для течений (1), (26) при условиях типа (25), когда $p_0 = p(0)$ и анализ наиболее нагляден. В частности, рассматривался вопрос об областях сходимости рядов для p_{xx}/p по малым и большим ε, определяемых областями сходимости соответствующих разложений r_1.

В заключение остановимся на вопросе о соотношении между различными [1] способами получения выражений напряжений p_{ij} и тепловых потоков q_i через гидродинамические переменные при помощи уравнений моментов. В итерационных схемах типа (11), дающих ряд Чепмена — Энскога, при получении n-го приближения для p_{ij}, q_i проводится исключение полных производных от гидродинамических переменных при помощи уравнений сохранения $(n-1)$-го приближения. Можно построить другие схемы, в которых не проводится такого исключения. При этом в формулы для p_{ij}, q_i в приближениях типа Барнетта и т. д. будут входить «точные» значения полных производных и, следовательно, внепорядковые по ε члены.

Получающаяся при этом перегруппировка рядов Чепмена — Энскога в некоторых частных случаях, вообще говоря, может оказаться эффективной [1]: несколько членов этих «перегруппированных» рядов могут лучше аппроксимировать точные решения, чем соответствующие отрезки рядов Чепмена — Энскога.

Поясним сказанное на примере течения (1). Обозначим через $\pi_{xx}^{(n)}$ последовательные приближения к $\Pi_{xx} = p_{xx}/p$, даваемые итерационной схемой без указанного исключения производной.

Вместо (11) будем иметь

$$-\frac{3}{\varepsilon}\pi_{xx}^{(n+1)} = \ln^{\cdot} p\ \pi_{xx}^{(n)} + 4 + 7\pi_{xx}^{(n)}, \quad \ln^{\cdot} p = -5 - 2\pi_{xx}^{(n+1)}, \quad \pi_{xx}^{(0)} = 0 \qquad (27)$$

Отсюда во втором приближении

$$\pi_{xx}^{(2)} = \Pi_{xx}^{(2)} / (1 + {}^8/_9\varepsilon^2), \qquad \Pi_{xx}^{(2)} = -{}^4/_3\varepsilon + {}^8/_9\varepsilon^2 \qquad (28)$$

Здесь $\Pi_{xx}^{(2)}$ соответствует приближению Барнетта (см. (13)).

В работе [1] был сделан вывод, что итерационные схемы типа (27) дают приближения для напряжений, лучше согласующиеся с точными значениями, чем приближения по Чепмену — Энскогу. Этот вывод основан, во-первых, на утверждении, что используемое в методе Чепмена — Энскога исключение полных производных приводит к появлению «некорректных» членов в уравнениях Барнетта, и, во-вторых, на сравнении результатов различных итерационных схем получения приближений для p_{xy}.

Однако результаты этого сравнения носят частный характер: для сдвигового течения (26), когда барнеттовские члены в p_{xy} равны нулю. В работе [2] было показано, что в случае течения (1) значения $\Pi_{xx}^{(2)}$ (приближение Барнетта) хорошо согласуются с точными даже в области расходимости ряда Чепмена — Энскога, значительно уточняя результаты по Навье — Стоксу. Дополнительные расчеты показали, что $\Pi_{xx}^{(2)}$ лучше согласуется с точным решением, чем $\pi_{xx}^{(2)}$ (28).

Автор признателен М. Н. Когану за обсуждение работы.

Поступило 14 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells kinetic theory. J. Rational Mech. and Analysis, 1956, vol. 5, No. 1, pp. 55—128.
2. Галкин В. С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 186—188.
3. Галкин В. С. О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 41—50.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. Grad H. Asymptotic of the Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 2, pp. 147—181. (Рус. перев.: Сб. Некоторые вопросы кинетической теории газов. М., «Мир», 1965, стр. 7—92.)
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.