ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН

(*Москва*)

Задача решается при помощи модифицированного метода Рэлея [1, 2]. Численные результаты относятся к так называемым «сдвиговым слоям», которые образуются в пограничном слое перед разрушением. Найдены соответствующие коэффициенты усиления и наиболее опасные волновые числа. Показано, что для сдвиговых слоев справедлив аналог теоремы Сквайра. В оправдание грубой аппроксимации исходного профиля, доказано, что метод Рэлея дает точное решение для некоторой предельной задачи. Доказано также, что сильное сужение класса возможных начальных значений несущественно для отыскания критических характеристик.

1. Уравнение, которое определяет поведение малых возмущений при двумерном течении невязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial t\,\partial y^2}-\alpha^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}-i\alpha\frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\varphi+i\alpha U(y,t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-i\alpha^3\varphi U(y,t)=0 \tag{1.1}$$

Граничные и начальные условия обычные

$$\varphi(0,t)=0;\quad \varphi(1,t)=0,\quad \varphi(y,t)=\varphi_0(y) \tag{1.2}$$

Здесь $U(y,t)$ — профиль скорости основного потока, который в дальнейшем предполагается периодической функцией времени; функция тока $\psi(x,y,t)$ для малых возмущений представлена в виде

$$\psi(x,y,t)=e^{i\alpha x}\varphi(y,t)$$

Модификация метода Рэлея, предложенная в статье [2], заключается в том, что профиль скорости $U(y,t)$ заменяется кусочно-линейным по y:

$$U_n(y,t)=U_n(y_{k-1},t)+(y-y_{k-1})\frac{\partial U_n(y_{k-1},t)}{\partial y}\qquad\left(\begin{matrix}y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k\\ y_0=0,\ y_n=1\end{matrix}\right)$$

$$U_n(0,t)=U'(0,t)\qquad (k=1,\ldots,n)$$

Приближенное решение уравнения (1.1) ищут в виде суммы

$$\varphi_n(y,t)=a_k(t)e^{-\alpha y}+b_k(t)e^{\alpha y}\qquad (y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k)$$

Неизвестные a_k и b_k определяют из условий непрерывности нормальной составляющей скорости и непрерывности давления [1]. Таким образом, относительно a_k и b_k получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Особенно важно, что при непосредственных численных вычислениях по методу Рэлея достаточно заменить профиль скорости ломаной, состоящей всего из трех или четырех отрезков. Вместе с тем, очевидно сильное сужение класса возможных решений уравнения (1.1) из-за такой грубой аппроксимации профиля (хотя бы за счет существенной предопределенности начальных данных). В связи с этим представляет интерес выяснение причин быстрой сходимости метода.

Оказывается, что метод Рэлея дает точное выражение для предельного решения, к которому стремится решение уравнения (1.1) при стремлении $U(y,t)$ к $U_n(y,t)$. Обозначим через $\{U_{(k)}(y,t)\}$ последовательность профилей, для которой $\max|U_{(k)}-U_n|\to 0$ при $k\to\infty$, и через $\varphi_{(k)}(y,t)$ соответствующую последовательность решений (1.1), причем $\max|\varphi_{(k)}'(y,0)-\varphi_n'(y,0)|\to 0$ при $k\to\infty$. (Существование такой последовательности можно доказать, например, продемонстрировав равномерные оценки для приближенных рэлеевских решений.)

Если составить разность между уравнением (1.1) для $\varphi_{(k)}(y,t)$ и $\varphi_n(y,t)$, умножить полученную разность на $(\varphi_{(k)}-\varphi_n)^*$ и проинтегрировать от 0 до 1 по y, то после некоторых преобразований получим

$$\frac{dz_k}{dt}\leqslant c_1 z_k+c_2\max|U-U_n|+c_3\max\left|\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U_n}{\partial y}\right|$$

$$z_k=\int\limits_0^1\left\{|\varphi_{(k)}-\varphi_n|^2+\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\right|^2\right\}dy$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные, не зависящие от номера k. Отсюда

$$\max z_k(t)\to 0 \qquad \text{при } k\to\infty \ k\to\infty\,(t\in[0,\ T]$$

Точно также можно получить равномерные оценки для последовательности приближенных рэлеевских решений и доказать сходимость рэлеевских решений к точному.

Нетрудно видеть, что для того, чтобы охватить всевозможные начальные условия для уравнения (1.1), можно было бы при том же числе отрезков ломаной, аппроксимирующей профиль, увеличить число неизвестных a_k и b_k, например, так:

$$\varphi_n(y,t)=\begin{cases}a_k^{(1)}e^{\alpha y}+b_k^{(1)}e^{-\alpha y} & \text{при } y_{k-1}\leqslant y\leqslant {}^1/_2(y_{k-1}+y_k)\\ a_k^{(2)}e^{\alpha y}+b_k^{(2)}e^{-\alpha y} & \text{при } {}^1/_2(y_{k-1}+y_k)\leqslant y\leqslant y_k\end{cases}\tag{1.3}$$

Тем не менее, для численной реализации метода весьма существенно, что необходимость в таком усложнении не возникает.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $a_k(t)$ и $b_k(t)$ есть система с периодическими коэффициентами. Поэтому [3] произвольное решение системы можно представить в виде суммы

$$\sum_1^{2n} f_k^{(0)}(t)\exp\lambda_k t$$

Здесь $f_k^{(0)}(t)$ — периодические вектор-функции с тем же периодом, что и основной профиль скорости. Таким образом, можно сформулировать задачу об устойчивости и исследование системы сводится к отысканию λ_k.

Докажем, что «улучшение» приближенного решения уравнения (1.1) с целью рассмотрения произвольных начальных данных приводит лишь к увеличению числа характеристических показателей λ_k исключительно за счет появления чисто мнимых характеристических показателей, т. е. для отыскания λ_k с максимальной действительной частью достаточно ограничиться решением выше упомянутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого порядка.

Преобразуем приближенное рэлеевское решение

$$\begin{aligned}&\varphi_n=c_1\operatorname{sh}\alpha y\equiv\psi_1 && (0\leqslant y\leqslant y_1),\\ &\varphi_n=\psi_1+c_2\operatorname{sh}\alpha(y-y_1)\equiv\psi_2 && (y_1\leqslant y\leqslant y_2,\ldots)\\ &\varphi_n=\psi_k+c_{k+1}\operatorname{sh}\alpha(y-y_k)\equiv\psi_{k+1} && (y_k\leqslant y\leqslant y_{k+1},\ldots)\end{aligned}$$

Условия непрерывности давления [1] и граничные условия приводят к системе дифференциальных уравнений

$$c_k'(t) = \sum_{j=2} \alpha_{kj}(t)\, c_j(t) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha_{kj}(t)$ — периодические функции времени с тем же периодом, что и $U(y, t)$. Если приближенное решение видоизменить, полагая

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= c_1 \operatorname{sh} \alpha y \equiv \psi_1^* && (0 \leqslant y \leqslant {}^1/_2 y_1)\\
\varphi_n &= \psi_1^* + c_1^* \operatorname{sh} \alpha(y - y_1) \equiv \psi_1^{**} && ({}^1/_2 y_1 \leqslant y \leqslant y_1)\\
\varphi_n &= \psi_1^{**} + c_2 \operatorname{sh} \alpha(y - y_1) \equiv \psi_2 && (y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \ldots)\\
\varphi_n &= \psi_k + c_{k+1} \operatorname{sh} \alpha(y - y_{k+1}) \equiv \psi_{k+1} && (y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}, \ldots)
\end{aligned}$$

то, соответственно, изменится и (1.4)

$$c_k' = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{kj} c_j + \beta_k c_1^*, \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1$$

$$(c_1^*)' = -i\alpha U({}^1/_2 y_1,\ t)\, c_1^* \tag{1.5}$$

Обозначим через $\mathfrak{f}_k$ и $\mathfrak{g}_k$ фундаментальные решения систем (1.4) и (1.5). Соответственно

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_k &\equiv \{f_{k,1}; \ldots, f_{k,n-1}\} = \{c_2, \ldots, c_n\}\\
\mathfrak{g}_k &\equiv \{g_{k,1}, \ldots, g_{kn}\} = \{c_2, \ldots, c_n, c_1^*\}\\
\mathfrak{f}_{kk}(0) &= g_{kk}(0) = 1, \qquad f_{kj}(0) = g_{kj}(0) = 0 \quad (k \neq j)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$g_{kn}(t) = 0 \qquad (k \neq n), \qquad g_{kj}(t) = f_{kj}(t) \qquad (k < n,\ j < n)$$

Если обозначить через $F(\rho)$ характеристический определитель системы (1.4), то характеристическое уравнение для системы (1.5) принимает вид

$$\left[\rho - \exp\left\{-i\alpha \int_0^t U\left(\frac{1}{2} y, t\right) dt\right\}\right] F(\rho) = 0$$

что и требовалось доказать. Это доказательство без труда переносится и на общий случай.

Прежде чем перейти к обсуждению результатов численного анализа, отметим, что при исследовании нестационарных прямолинейных потоков сохраняет силу преобразование Сквайра [4]. В самом деле, выписав уравнения для возмущений, имеющих периодическую составляющую поперек потока (β — соответствующее волновое число) и выполнив обычные преобразования [4]

$$(\alpha^*)^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad \alpha^* u^* = \alpha u + \beta w, \quad t = t^* \alpha^* / \alpha, \quad v^* = v, \quad \alpha p = \alpha^* p^*$$

получим для u^* и v^* те же уравнения в новых переменных, что и для u и v. Таким образом, окончательные изменения заключаются в следующем: в уравнении (1.1) профиль скорости $U(y, t)$ заменится на $U(y, t\alpha^* / \alpha)$.

2. Известно [5], что в пограничном слое перед разрушением образуются пульсирующие течения с сильной неравномерностью по y. В работе [2] эти течения моделировались плоско-параллельными прямолинейными нестационарными потоками. Первая модель не учитывает влияния стенки

$$U^{(1)}(y, t) = \begin{cases} U(t) y / |y| & \text{при } |y| > h(t)\\ U(t) y / h(t) & \text{при } |y| \leqslant h(t)\end{cases} \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$\zeta_1 = \frac{h(t)}{h(0)}, \quad \eta_1 = \frac{U(t)}{U(0)}, \quad y_* = \frac{y}{h(0)}, \quad t_* = \frac{tU(0)}{h(0)}$$

$$\alpha h(0) = k, \qquad \Phi = \frac{\varphi}{h(0)U(0)}$$

$$\zeta_1 = 0.125 + 0.075 \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \eta_1 = 0.125\left(10 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (T = 18.33)$$

где $h(0)$ — толщина пограничного слоя. Вторая модель построена с учетом стенки, $U(0)$ — скорость на бесконечности

$$\begin{aligned} &U^{(2)}(y, t) = \eta_2 + (1 - \eta_2)(y - \zeta_2) / (1 - \zeta_2) \qquad (\zeta_1 \leqslant y \leqslant 1) \\ &U^{(2)}(y, t) = \mu + (\eta_2 - \mu)(y - l) / (\zeta_2 - l) \qquad (l \leqslant y \leqslant \zeta_2) \\ &U^{(2)}(y, t) = y\mu / l \quad (0 \leqslant y \leqslant l) \quad U^{(2)}(y, t) = 1 \quad (y \geqslant 1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\mu = 0.4, \quad l = 0.22, \quad \eta_2 = 0.7 + 0.2 \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \zeta_2 = 0.75 - 0.15 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Представляет интерес выделение наиболее быстро растущих возмущений для таких модельных течений и исследование их характеристических параметров. Кроме того, важно понять роль трехмерных колебаний, наложенных на нестационарный поток.

Выражение для приближенного решения по методу Рэлея (профиль скорости (2.1)) целесообразно рассматривать в симметричном виде

$$\begin{aligned} &\varphi(y, t) = d(t)e^{-ky} \qquad (y \geqslant \zeta_1) \\ &\varphi(y, t) = a(t)e^{-ky} + b(t)e^{-ky} \qquad (|y| \leqslant \zeta_1) \\ &\varphi(y, t) = g(t)e^{ky} \qquad (y \leqslant -\zeta_1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда задача сводится [2] к исследованию системы

$$\begin{aligned} a' &= \left(-\eta_1 ik + \frac{i\eta_1}{2\zeta_1}\right) a + \frac{i\eta_1 b}{2\zeta_1} e^{(-2k\zeta_1)} \\ b' &= \left(\eta_1 ik - \frac{i\eta_1}{2\zeta_1}\right) b - \frac{i\eta_1 a}{2\zeta_1} e^{(-2k\zeta_1)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для составления характеристического определителя достаточно найти два решения системы (2.4) $f_1 \equiv \{f_{11}, f_{12}\}$ и $f_2 \equiv \{f_{21}, f_{22}\}$ с начальными данными (1.0) и (0.1). Характеристический определитель приводит к уравнению

$$\rho^2 - [f_{11}(T) + f_{22}(T)]\rho + f_{11}(T)f_{22}(T) - f_{12}(T)f_{21}(T) = 0 \tag{2.5}$$

В силу особенностей системы (2.4)

$$f_{11}(t) = f_{22}^*(t), \quad f_{12}(t) = f_{21}^*(t),$$
$$f_{11}(T)f_{22}(T) - f_{12}(T)f_{21}(T) = 1.$$

Следовательно, (2.5) упрощается

$$\rho^2 - 2(\operatorname{Re} f_{11})\rho + 1 = 0 \tag{2.6}$$

Отсюда $\rho_1 = 1 / \rho_2$ (ρ_1 **и** ρ_2 — **корни уравнения** (2.6)), т. е. либо ρ_1 и ρ_2 **действительны (при** $|\operatorname{Re} f_{11}| > 1$) **и** $\operatorname{Sup} |\rho_k| > 1$, **либо** ρ_1 **и** ρ_2 — **мнимые числа (при** $|\operatorname{Re} f_{11}| < 1$ **и** $|\rho_k| = 1$). **В первом случае движение неустой-**

чиво, во втором случае наложенные возмущения имеют чисто колебательный характер. Отметим, что $\rho_1 \approx 2\mathrm{Re}\, f_{11}$ при $|\mathrm{Re}\, f_{11}| \gg 1$.

Отделяя действительные и мнимые части в уравнении (2.4), имеем

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1(t) z_1 + \gamma_2(t) z_2, \quad z_1 = \mathrm{Re}\, a + \mathrm{Im}\, b, \quad \gamma_1 = -{}^1/_2 \eta \zeta_1^{-1} e^{-2k\zeta_1} \\ z_2' &= -\gamma_2(t) z_1 - \gamma_1(t) z_2, \quad z_2 = \mathrm{Im}\, a + \mathrm{Re}\, b, \quad \gamma_2 = \eta_1 k - \eta_1 / 2\zeta_1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.7) получим

$$\begin{aligned} {}^1/_2 (z_1^2 + z_2^2)' &= \gamma_1 (z_1^2 - z_2^2) \\ {}^1/_2 (z_1^2 - z_2^2)' &= \gamma_1 (z_1^2 + z_2^2) + 2\gamma_2 z_1 z_2 \end{aligned}$$

Если $\gamma_2 < 0$, то $2\gamma_2 z_1 z_2 < -\gamma_2 (z_1^2 + z_2^2)$ и при

$$\gamma_1 - \gamma_2 < 0 \quad \text{и} \quad z_1^2(0) - z_2^2(0) < 0 \quad [z_1^2(t) - z_2^2(t)] < 0$$

Отсюда $(z_1^2 + z_2^2)' > 0$. Таким образом, еще до проведения численных расчетов выясняется, что при $2k\zeta_1 < 1$ течение неустойчиво.

Для составления и решения уравнений с учетом стенки удобно воспользоваться следующим представлением:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_3 + c_4 \,\mathrm{sh}\, k(y-1) & (1 < y) \\ \varphi &= \Phi_2 + c_3 \,\mathrm{sh}\, k(y-\zeta) \equiv \Phi_3 & (\zeta \leqslant y \leqslant 1) \\ \varphi &= \Phi_1 + c_2 \,\mathrm{sh}\, k(y-l) \equiv \Phi_2 & (l \leqslant y \leqslant \zeta) \\ \varphi &= \Phi_1 \equiv c_1 \,\mathrm{sh}\, ky & (0 \leqslant y \leqslant l) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Граничные условия и условие непрерывности давления позволяют для такого представления получить простую систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно производных

$$\begin{aligned} c_2' &= -i\mu c_2 k + ic_1 \,\mathrm{sh}\, kl [(\eta - \mu) / (\zeta - l) - \mu / l] \\ c_3' &= -i\eta c_3 + i[c_1 \,\mathrm{sh}\, k\zeta + c_2 \,\mathrm{sh}\, k(\zeta - l)][(1-\eta)(1-\zeta) - \\ &\qquad - (\eta - \mu) / (\zeta - l)] \\ c_4' &= -ic_4 k + i[c_1 \,\mathrm{sh}\, k + c_2 \,\mathrm{sh}\, k(1-l) + c_3 \,\mathrm{sh}\, k(1-\zeta)] \times \\ &\qquad \times [-(1-\eta)/(1-\zeta)] \\ c_1 &= -[c_2 \exp(-kl) + c_3 \exp(-k\zeta) + c_4 \exp(-k)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

При конкретных вычислениях фундаментальных решений f_i ($i = 1, 2, 3$) системы (2.9) сильнорастущие решения системы могут забить слаборастущие. Можно, конечно, следуя [6], отделить слаборастущие от сильнорастущих. Однако, учитывая, что ищется характеристический показатель с максимальной действительной частью, следует упростить процедуру. Предположим: пары векторов $f_1(T)$, $f_2(T)$ и $f_1(T)$, $f_3(T)$ линейно зависимы. Тогда из характеристического уравнения получим

$$\rho^3 - \rho^2 [f_{11}(T) + f_{22}(T) + f_{33}(T)] = 0$$

Отсюда $\rho = f_{11}(T) + f_{22}(T) + f_{33}(T)$

$$\lambda = T^{-1} \ln [f_{11}(T) + f_{22}(T) + f_{33}(T)]$$

(Исходное предположение можно ослабить: $f_1(kT)$, $f_2(kT)$, также как и $f_1(kT)$, $f_3(kT)$, линейно зависимы. При этом,

$$\lambda = \frac{1}{kT} \ln [f_{11}(kT) + f_{22}(kT) + f_{33}(kT)]$$

(k — целое положительное число). Для косвенной проверки справедливости этого предположения достаточно вычислить λ при различных k).

Проведенные вычисления показали, что для профиля (2.1) наиболее опасно волновое число $K = 2.9$. Максимальная действительная часть характеристического показателя (коэффициент усиления) равна 1.97. Численные значения для некоторых значений даны ниже

$K=$	0.47	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
$\lambda =$	0.647	1.16	1.32	1.45	1.55	1.63	1.75	1.86	1.92
$K=$	2.7	2.9	3.1	3.3	5	6	9	10	
$\lambda =$	1.956	1.97	1.95	1.85	1.64	1.48	0.933	0.711	

Вычисления, проведенные с учетом твердой границы, указывают, что в рамках теории идеальной жидкости влияние стенки приводит к резкому уменьшению коэффициента усиления ($\max \operatorname{Re} \lambda = 0.26$). Самое опасное волновое число значительно увеличилось ($k^* = 4.4$). Представление о степени уменьшения коэффипиента усиления λ с изменением k и о величинах частот дают приведенные ниже данные

$K=$	3.0	3.2	3.4	3.6	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	=5.0	5.2	5.49
$10 \cdot \operatorname{Re}\lambda =$	1.76	2.00	2.16	2.29	2.52	2.57	2.58	2.57	2.52	=2.43	2.4	2.39
$10^3 \cdot \operatorname{Im}\lambda =$	12·7	—6.2	—5.6	—5.5	—7.8	—6.2	—4.55	—2.87	—1.15	=0.6	5.0	6.9

Отметим, что полученные величины частот близки к нулю и даже можно указать волновое число, близкое к $K^* = 4.4$, для которого $\omega = 0$.

Численная проверка теоремы Сквайра показала, что рассматриваемые нестационарные сдвиговые слои, точно также как и стационарные, более устойчивы по отношению к трехмерным, чем к двумерным возмущениям: коэффициенты λ для трехмерного и двумерного колебания отличаются на множитель $\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. (В расчетах период T изменялся от 3 до 20.)

Вызывает интерес сравнение полученных результатов с известными экспериментальными и теоретическими данными [2, 5]. В статье [2] с помощью метода Рэлея была решена задача о линейном развитии возмущений нестационарных потоков (2.1) и (2.2). В качестве начальных данных были взяты соответствующие решения задачи об устойчивости стационарного профиля. Коэффициент усиления при этом определялся либо из энергетических соображений, либо по отношению амплитуды возмущения при $t = T / 2$ к начальному значению амплитуды при $t = 0$.

В общих чертах совпадение вполне удовлетворительное. В частности, в работе [2] волновое число, соответствующее максимальному коэффициенту усиления, лежит в интервале (4, 5). Здесь же для первой модели $k^* = 2.9$, для второй модели $k^* = 4.4$. Коэффициенты усиления по второй модели также хорошо согласуются, а для первой модели коэффициент усиления здесь значительно выше. Отмеченные расхождения в величинах волновых чисел и коэффициентов усиления легко объясняются случайным выбором начальных условий и некоторым произволом при определении величины коэффициента усиления в [2].

Сравнение с экспериментом [5] показывает безусловные преимущества второй модели при количественном описании явления. Действительно, измерения, проведенные в [5], показали, что за половину периода первичной волны ($T / 2 = 9.16$) энергия возмущения вырастает примерно на два порядка. Согласно проведенным расчетам для второй модели энергия возмущения увеличивается примерно в 110 раз, а для первой модели — примерно на 15 порядков. Соответствие между волновыми числами также значительно лучше для второй модели (в эксперименте $k^* \approx 5$).

Автор благодарит Г. И. Петрова за постоянное внимание и руководство работой.

Поступило 24 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 304.
2. Greenspan H. P., Benney D. J. On sheah—layer instability breakdown, transition. J. Fluid Mech, 1963, vol. 15, No. 1, p. 133.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Klebanoff P. D., Tidstrom D. D., Sargent L. M. The three dimensional nature of Boundary — layer instability. J. Fluid Mech, 1962, vol. 12, No. 1.
6. Герценштейн С. Я. О трехмерных возмущениях в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.