

ВЛИЯНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА РАДИАЦИИ НА БЛИЗКОЕ К АДИАБАТИЧЕСКОМУ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА

В. А. ПРОКОФЬЕВ

(Москва)

На основании линеаризованных уравнений радиационной гидродинамики рассматривается распространение вынужденных плоских гармонических волн давления в покоящейся равновесной безграничной гомогенной среде вдали от источника волн (в дальнем поле). Учитывается диссипация энергии вследствие радиационного теплообмена между частицами газа. Радиационное поле принимается квазиравновесным, используется закон Кирхгофа. В рассмотрение включены два радиационных процесса — абсорбция и эмиссия электромагнитной энергии.

Все радиационные параметры сохраняются зависящими от частоты электромагнитных волн. Сравнение с исследованием [1], где эта зависимость не учитывалась, дает возможность выяснить пределы применимости различных существующих способов осреднения уравнения переноса радиации по спектру.

Получены формулы для вычисления коэффициентов затухания волн давления и меры дисперсии фазовой и групповой скорости волн при условиях, когда образующиеся волны не сильно отличаются от адиабатических звуковых волн. Приведено вычисление коэффициентов затухания в воздухе при обычных условиях, когда единственной «радирующей» примесью является водяной пар. В результате сравнения с суммарным затуханием за счет вязкости, теплопроводности и радиации показана преобладающая роль радиации в области инфразвуковых и низких звуковых частот волн давления.

Какой бы ни был спектр поглощения радиации среды, всегда радиационный теплообмен приводит к затуханию и дисперсии волн. В предельных случаях больших и малых частот волны почти адиабатические. Если обратная величина акустического числа Больцмана — число $Z \ll 1$, то волны давления останутся почти адиабатическими при любой частоте ω механических колебаний в волне.

При малых Z истинные коэффициенты поглощения волн обладают не меньше чем одним максимумом по частоте колебаний в волне. Число максимумов в зависимости от строения спектра может быть и значительно большим. Их величины зависят от индивидуальных свойств спектра. В случае оперирования лишь с единственным средним коэффициентом непрозрачности при $Z \ll 1$ существует лишь один максимум в строго определенной точке.

Мера дисперсии r в зависимости от ω имеет не меньше одного минимума. Количество минимумов, лежащих между 1 и $\gamma^{1/2}$, зависит от строения спектра. В осредненной теории получался лишь один минимум при строго определенном значении волнового числа Бугера w .

Аппроксимация истинного сложного спектра поглощения единственным коэффициентом непрозрачности не дает адекватного явлению описания влияния радиации на распространение волн различных частот.

1. Коэффициенты непрозрачности. Уравнение переноса радиации при учете эмиссии и абсорбции электромагнитной энергии и в пренебрежении членами, содержащими скорость света в знаменателе, имеет вид

$$s \nabla J_{\nu} = e_{\nu} - k_{\nu} J_{\nu} \quad (1.1)$$

Здесь $J_{\nu}(x, y, z, t; \mathbf{s})$ — интенсивность радиации в частоте ν в направлении \mathbf{s} ; e_{ν} , k_{ν} — объемные коэффициенты эмиссии и абсорбции. Для равновесной среды оно примет форму закона Кирхгофа

$$e_{\nu} / k_{\nu} \equiv B_{\nu} = J_{\nu 0} \quad (1.2)$$

где B_{ν} определяется состоянием среды. Для черного излучения B_{ν} — функция Планка.

Сложность спектра поглощения газов, в частности, в условиях, не сильно отличающихся от нормальных, и его индивидуальный характер создают чрезвычайные трудности в решении задач радиационной гидромеханики. Стремление перейти к интегральным характеристикам радиационного поля естественно, если иметь в виду, что в уравнениях гидромеханики принимается в расчет именно суммарное (интегральное) взаимодействие радиации с жидкостью. Однако не существует уравнений для интегральной интенсивности радиации или для спектрального потока радиации. Упрощение, основанное на осреднении по спектру уравнения переноса радиации, в общем случае не приводит к адекватному описанию явления. Даже в случае колебаний малой амплитуды выбор способа осреднения по спектру — не тривиальный вопрос.

Уравнение переноса радиации, осредненное по частотам, представится так:

$$s\nabla J = e_R - kJ \quad (1.3)$$

Здесь J , e_R — просуммированные по спектру величины J_ν , e_ν ; k — осредненный коэффициент абсорбции — коэффициент непрозрачности.

Коэффициенты непрозрачности можно записать в общей форме

$$k_n^n = \int_{(\nu)} A_\nu k_\nu^n d\nu, \quad A_\nu = r_\nu \left(\int_{(\nu)} r_\nu d\nu \right)^{-1} \quad (1.4)$$

Здесь n — действительное число, $r_\nu > 0$ — весовая функция. Интегралы распространяются на всю область спектра, где $k_\nu \neq 0$. Если $n = 1$, $r_\nu = B_\nu$, то получится планковское среднее k_P , при $n = -1$, $r_\nu = \partial B_\nu / \partial T$ — росселандово среднее k_{-1} , а при $n = 1$, $r_\nu = \partial B_\nu / \partial T$ — среднее гармоническое k_1 . Это наиболее употребительные коэффициенты непрозрачности.

Сравнение коэффициентов непрозрачности различных порядков можно произвести на основании неравенства Буяковского

$$\int_{(\nu)} f^2(\nu) d\nu \int_{(\nu)} g^2(\nu) d\nu \geq \left(\int_{(\nu)} f(\nu)g(\nu) d\nu \right)^2$$

Положим

$$f = (A_\nu k_\nu^n)^{1/2}, \quad g = (A_\nu k_\nu^m)^{1/2}$$

где m , n — любые действительные числа, и будем считать, что из физических соображений выбираются такие весовые функции, спектральные интервалы и спектры поглощения, которые удовлетворяют условиям интегрируемости с квадратом функций f , g . Тогда получится неравенство

$$k_m^m k_n^n \geq k_{1/2}^{m+n} \quad (1.5)$$

При $n = j > 0$, $m = -j$ отсюда следует неравенство $k_j \geq k_{-j}$, так как $k_j^j = 0$, если $j = 0$. При $j = 1$ это означает, что среднее k_1 всегда не меньше росселандова среднего. Положив $m = 0$, $n = 2j > 0$, получим $k_{2j} \geq k_j$. Аналогично, если взять $m = 0$, $n = -2j < 0$, то будем иметь неравенство $k_{-2j} \leq k_{-j}$. Если теперь положить $m = n + 2$, $n = 1$ и если воспользоваться установленным выше неравенством $k_2 \geq k_1$, то из (1.5) получится неравенство $k_3 \geq k_2$. Отсюда методом математической индукции устанавливается, что $k_{n+1} \geq k_n$, если n целое положительное число. Аналогично, если в (1.5) теперь считать $m = -j$, $n = -(j + 2)$, j — натуральное число и учесть неравенство $k_{-1} \geq k_{-2}$, то при $j = 1$ получится соотношение $k_{-2} \geq k_{-3}$. Далее методом математической индукции можно показать, что $k_{-j} \geq k_{-(j+1)}$. Таким образом, получены неравенства

$$k_{n+1} \geq k_n \geq k_{-n} \geq k_{-(n+1)} \quad (1.6)$$

справедливые для любого натурального n .

Все коэффициенты непрозрачности равны между собой только для «серой» среды. Если даже коэффициент поглощения не зависит от температуры, то коэффициенты непрозрачности в общем случае могут оказаться функциями температуры. При вычислении интегралов (1.4), когда $n > 0$, иногда распространяют их на весь спектр ($0 < \nu < \infty$), что дает заниженные значения k_n .

Интегрированием (1.2) по всему спектру получается для интегральных характеристик

$$\epsilon_R = k_p \int_{(\nu)} B_\nu d\nu = k_p B \quad (1.7)$$

и интегральный закон Кирхгофа будет выполняться в покоящейся невозмущенной среде, если излучение черное и за коэффициент непрозрачности принимается планковское среднее. Функция B будет определяться законом Стефана — Больцмана лишь в том случае, если интервал интегрирования охватывает весь спектр.

Очевидно, при неравновесной радиации нельзя от уравнения (1.1) перейти в общем случае к уравнению (1.3) с одним коэффициентом непрозрачности, не зависящим от направления. Подобный переход всегда является приближенным (или вовсе неверным). Вторая ошибка может возникнуть, если для замыкания системы уравнений берется интегральный закон Кирхгофа с коэффициентом непрозрачности, отличным от планковского, вычисленного для всего спектра.

2. Дисперсионное соотношение. Характеристическое уравнение (дисперсионное соотношение), управляющее распространением вынужденных слабых волн в безграничном газе с учетом эмиссии и абсорбции электромагнитных волн и в предположении справедливости закона Кирхгофа для монохроматической радиации, имеет вид [2]

$$\gamma i(1 + m^2) + (\gamma + m^2)ZL = 0 \quad (2.1)$$

$$L = \int_{(\nu)} A_\nu L_\nu d\nu, \quad L_\nu = w_\nu \left(1 - \frac{1}{2q_\nu} \ln \frac{1 + q_\nu}{1 - q_\nu} \right) \quad (2.2)$$

$$m = \frac{ac_0}{\omega}, \quad Z = \frac{16\pi B^*}{(\rho c_\nu T)_{c_0}}$$

$$v_\nu = \frac{1}{w_\nu} = \frac{\omega}{c_0 k_{\nu 0}}, \quad q_\nu = m v_\nu \quad (2.3)$$

$$A_\nu = \frac{1}{4} \frac{T_0}{B^*} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_0, \quad B^* = \frac{T_0}{4} \int_{(\nu)} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_0 d\nu$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, c_0 — адиабатическая скорость звука, $a = a_r + ia_i$ — искомая комплексная величина, $1/2\omega/\pi$ — частота колебания в волне, ρ , T , c_ν — плотность газа, температура, удельная теплоемкость при постоянном объеме, B_ν — функция Планка. Нулями внизу отмечены параметры невозмущенной среды, Z — обратная величина числа Больцмана — отнесена к условной интегральной интенсивности радиации B^* , которая из дисперсионного соотношения выпадает.

Характеристическому уравнению можно придать еще такой вид

$$\frac{1}{2q_1} \int_{(\nu)} A_\nu \kappa_\nu^2 \ln \frac{\kappa_\nu + q_1}{\kappa_\nu - q_1} = 1 + \gamma i \frac{v_1}{Z} \frac{q_1^2 + v_1^2}{q_1^2 + \gamma v_1^2}$$

$$\kappa_\nu = \frac{k_{\nu 0}}{k_1} \quad k_1 = \int_{(\nu)} A_\nu k_{\nu 0} d\nu, \quad v_1 = \frac{1}{w_1} = \frac{\omega}{c_0 k_1} \quad q_1 = m v_1 \quad (2.4)$$

Зависимость искомых параметров волн (q_1 или m) от физических свойств и состояния среды проявляется через их зависимость от безразмерных чисел γ , Z , v_1 , через зависимость κ_ν и области интегрирования (ν) от свойств среды (зависимость A_ν от T введением новой переменной $x \equiv \equiv h_\nu / (kT)$ сведется к зависимости от T области интегрирования).

Уравнение (2.1) всегда имеет корень ($\pm m$) по модулю порядка единицы, соответствующий волнам давления, бегущим в противоположных на-

правлениях со скоростью, заключенной между ньютоновской и лапласовской скоростями звука. При некоторых значениях параметров уравнение имеет еще вторую пару корней, соответствующую индуцированным радиацией волнам, обладающим сильной дисперсией. Не существует ни чисто мнимых, ни действительных корней уравнения (кроме некоторых предельных точек). Знаки действительной m_r и мнимой m_i частей корня одинаковые — волны затухающие (в дальнейшем достаточно рассматривать только положительные m_r, m_i). По самому выводу уравнения видно, что берется только одно единственное значение логарифма (аргумент его заключен в интервале $0, \pi$). Разделение (2.1) на действительную и мнимую части даст

$$m_r w_1 = R + Z^{-1}(m_r \varphi + m_i \psi), \quad m_i w_1 = I - Z^{-1}(m_i \varphi - m_r \psi) \quad (2.5)$$

$$\varphi = 2\gamma(\gamma - 1)m_r m_i \chi^{-1}, \quad \chi = (\gamma + m_r^2 - m_i^2)^2 + 4m_r^2 m_i^2 \quad (2.6)$$

$$\psi = \gamma[(\gamma + m_r^2 - m_i^2)(1 + m_r^2 - m_i^2) + 4m_r^2 m_i^2] \chi^{-1}$$

$$R = \int_{(v)} A_v R_v w_v^2 dv, \quad I = \int_{(v)} A_v I_v w_v^2 dv$$

$$R_v = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + m_r v_v)^2 + m_i^2 v_v^2}{(1 - m_r v_v)^2 + m_i^2 v_v^2} \quad (2.7)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \arctg \frac{2m_i v_v}{1 - (m_r^2 + m_i^2)v_v^2}, \quad m_r^2 + m_i^2 \leq w_v^2$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[\pi - \arctg \frac{2m_i v_v}{(m_r^2 + m_i^2)v_v^2 - 1} \right], \quad m_r^2 + m_i^2 \geq w_v^2$$

Волны давления близки к адиабатическим волнам (слабо затухают и имеют скорость, близкую к лапласовской скорости звука), если $Z|L| \ll 1$, поскольку ZL равно притоку тепла за счет радиации, который только и учитывается здесь. Волны давления близки к изотермическим (слабо затухают и распространяются с ньютоновской скоростью звука), если $Z|L| \gg 1$. Наконец, если $Z|L| = O(1)$, то волны сильно затухают и распространяются со скоростью промежуточной между лапласовской и ньютоновской скоростями звука.

Для волн давления всегда $|m| = O(1)$, а величины $|q_v|$ в общем случае для конкретной среды могут быть малыми, умеренными и большими, функцию L можно разложить в степенные ряды

$$|q_v| < 1, \quad L = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^{2n+2}}{2n+3} v^{-(2n+1)} \quad (2.8)$$

$$|q_v| < 1, \quad L = \frac{1}{v_1} - \frac{\pi i}{2m} \frac{1}{v_2^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{-2n}}{2n-1} v^{-(2n+1)}$$

$$v_n = \omega / (c_0 k_n), \quad v_{-n} = \omega / (c_0 k_{-n}) \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что в случае предельно малых v_v применимо в первом приближении росселандово осреднение переноса радиации по частотам и осреднения Эддингтона и Мустеля по направлениям, а в случае больших v_v — среднее k_1 по частотам и осреднение Шустера — Шварцшильда по направлениям. В случае умеренных v_v появляются средние коэффициенты высших порядков, т. е. осреднение становится вообще неприемлемым.

Весь спектр поглощения можно разбить на три части

$$(v) = (v_1) + (v_2) + (v_3) \quad (2.10)$$

В области (v_1) считаются $q_v \ll 1$, в области (v_2) $q_v = 0$ (1) и в области (v_3) величины $q_v \gg 1$. Для волн давления в этих областях v_v соответственно малые, умеренные или большие. При заданных c_0 и ω это будет разбиение области коэффициентов поглощения (непрерывного и в линиях или полосах). Входящий в уравнение (2.1) интеграл разбивается на три интеграла в том же смысле, как и раньше, причем первый и третий из них может быть представлен рядами (2.8) и (2.9)

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \quad (2.11)$$

Если $|q_v| \ll 1$ в первой и $|q_v| \gg 1$ в третьей областях, то принимая во внимание, что $A_v > 0$, получим

$$|L_1| \ll 1, \quad |L_3| \ll 1 \quad (2.12)$$

Величина $|L_2|$ может быть либо порядка единицы, либо малой, в зависимости от значения в области (v_2) интеграла

$$A(v_k) \equiv \int_{(v_k)} A_v dv \quad (2.13)$$

С ростом частоты механических колебаний в волне часть спектра с большими коэффициентами поглощения может из области (v_1) перейти в область (v_2) и из (v_2) в область (v_3) .

Параметры волн зависят от физических характеристик среды и от частоты механических колебаний через безразмерные параметры γ , Z и величину преобладающего из L_k , которая в свою очередь зависит от v_v и $A(v_k)$ в этой области.

В области (v_1) господствует механизм радиационной теплопроводности, а в области (v_3) преобладает чистое излучение (высвечивание). Какая бы ни была величина Z , начиная с достаточно больших ω , будет преобладать область (v_3) .

3. Почти адиабатические волны давления. Необходимым и достаточным условием существования «почти адиабатических волн давления» является выполнение неравенства

$$\beta \ll 1, \quad \beta \equiv ZK, \quad K \equiv \int_{(v)} A_v w_v (1 - \text{arc ctg } w_v) dv \quad (3.1)$$

Функция K получается из L подстановкой $m = \pm i$ — значения корня характеристического уравнения, соответствующего чисто адиабатическому движению волн. Она является главным членом в разложении L по степеням ε , если положить $m = \pm i(1 + \varepsilon)$, $|\varepsilon| \ll 1$. Поскольку A_v — положительная нормированная функция в области (v) , то из (3.1) следует, что всегда $\beta \leq 0.229878Z$. Вследствие этого неравенства (3.1) выполняется для малых чисел Z при любых функциях v_v , т. е. для всех частот колебаний в волне и при произвольных зависимостях коэффициента абсорбции от частоты электромагнитных волн. Число Z мало для жидкостей и газов в состоянии, не сильно отличающемся от нормального. Корни характеристического уравнения могут быть найдены в виде разложений по степеням малого параметра β , коэффициенты поглощения α_a° и α_a волн в расчете на длину звуковой волны и волны давления выразятся так:

$$\alpha_a^\circ / (2\pi) = \alpha_{10} = |m_r| = (\gamma - 1)\beta(2\gamma)^{-1} \{1 - \frac{1}{2}\beta^2(2\gamma)^{-2}[8\gamma^2 - 3(\gamma - 1)(3\gamma + 1)K_1 + 2(\gamma - 1)^2K_1^2 + 2(\gamma - 1)^2K_2]\} + O(\beta^5) \quad (3.2)$$

$$\alpha_a / (2\pi) = m_r / m_i = \alpha_1 = (\gamma - 1)\beta(2\gamma)^{-1} \{1 - \frac{1}{2}\beta^2(2\gamma)^{-2}[11\gamma^2 - 2\gamma - 1 - 3(\gamma - 1)(3\gamma + 1)K_1 + 2(\gamma - 1)K_2]\} + O(\beta^5)$$

$$K_n = \frac{\alpha^{(n)}}{K}, \quad \alpha^{(n)} = \int_{(v)} A_v v_v (1 + v_v^2)^{-n} dv$$

Мерой дисперсии волн могут служить отношения

$$\begin{aligned} r &= V/c_0 = 1 - 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}\beta^2(3\gamma + 1 - 2(\gamma - 1)K_1) + O(\beta^4) \\ r_1 &= V/c_0 = 1 - 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}\beta^2[3(3\gamma + 1) - 2(5\gamma - 1)K_1 + \\ &\quad + 4(\gamma - 1)K_2 + 2(\gamma - 1)K_1^2] + O(\beta^4) \\ r_2 &= V/c_a = 1 + 1/4(\gamma - 1)\gamma^{-2}\beta^2[2(3\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)K_1 + \\ &\quad + 2(\gamma - 1)K_2 + (\gamma - 1)K_1^2] + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Фазовая c_a и групповая V скорости волн отличаются от адиабатической скорости звука c_0 на малую величину порядка β^2 .

В первом приближении коэффициенты поглощения α_{10} и α_1 имеют максимумы и минимумы при тех же частотах механических колебаний, что и функция $K(\omega)$, т. е. при частотах, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha^{(1)}(\omega) = 2K(\omega) \quad (3.4)$$

В сухой среде существует единственный экстремум функции $K(\omega)$ — максимум при $\omega = 1.514994 k_0 c_0$. В селективно поглощающей среде может существовать $n > 1$ максимумов и $n - 1$ минимумов. Но в силу ограниченности функции K всегда при малых β коэффициент затухания волн ограничен

$$\alpha_{10} \leq 0.114939(\gamma - 1)Z/\gamma \quad (3.5)$$

Коэффициент затухания на единице длины $a_r = (\gamma - 1)\omega K(2\gamma c_0)^{-1}$ при любом спектре монотонно возрастает с частотой, и кривая $a_r(\omega)$ не имеет точек перегиба.

Все коэффициенты поглощения пропорциональны числу Z . Зависимость их от ω в общем случае даже в первом приближении весьма сложная.

Существенное отличие результатов использования спектрального распределения коэффициентов поглощения от аналогичных, основанных на осредненных по частотам коэффициентах поглощения, заключается также и в том, что при очень малых частотах механических колебаний оптическая длина волны в некотором спектральном интервале может оказаться величиной порядка единицы (при достаточно малых коэффициентах поглощения в этом интервале). Если этот интервал не очень узок и величины A_ν в нем не слишком малы, что является физически вполне реальным случаем, то величина K не будет пренебрежимо малой и коэффициенты затухания α_{10} и α_1 могут при этом достигать максимумов и даже наибольших значений. В пределе при $\omega \rightarrow 0$ при фиксированных k_ν , конечно, величина K и с нею и величины α_{10} и α_1 стремятся к нулю, но могут представиться случаи, когда физически этот подход к пределу осуществляется при чрезвычайно малых ω , гораздо меньших, чем при осреднении по частотам.

Отклонения фазовой и групповой скоростей волн от лапласовской скорости звука имеют экстремумы по ω в точках, где удовлетворяются соответственно уравнения

$$2(3\gamma + 1)K^2 - 2[(3\gamma - 1)\alpha^{(1)} - (\gamma - 1)\alpha^{(2)}]K + (\gamma - 1)\alpha^{(1)2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} 6(3\gamma + 1)K^2 - 4[6\gamma\alpha^{(1)} - (5\gamma - 3)\alpha^{(2)} + 2(\gamma - 1)\alpha^{(3)}]K + \\ + (7\gamma - 3)\alpha^{(1)2} - 6(\gamma - 1)\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Всегда k_ν — ограниченные величины, и можно для заданной среды указать такую частоту ω , начиная с которой оптические длины волн можно считать малыми в любой частоте электромагнитного спектра, т. е. для всего спектра $\nu_\nu \gg 1$. Условие малости β сведется к требованию $Z\nu_1^{-1} \ll 1$, а параметры волн представятся формулами

$$\alpha_{10} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left[\frac{Z}{\nu_1} - \frac{\pi Z}{2\nu_2^2} + \frac{Z}{\nu_3^3} - \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 5}{8\gamma^2} \frac{Z^3}{\nu_1^3} + \dots \right] \quad (3.8)$$

$$r = 1 - g + \dots, \quad r_1 = 1 + g + \dots, \quad r_2 = 1 + 2g + \dots, \\ g = 1/8(\gamma - 1)(\gamma + 3)\gamma^{-2}Z^2v_1^{-2}$$

Расхождение с осреднением по частотам начинается со второго члена в разложении коэффициентов затухания волн и в третьих членах в выражении меры дисперсии волн. Коэффициенты поглощения волн на длинах звуковой волны и волны давления малы и обратно пропорциональны частоте механических колебаний в волне, коэффициенты поглощения на фиксированной длине не зависят от частоты, малые отклонения фазовой и групповой скоростей волны от скорости звука обратно пропорциональны квадрату частоты.

С уменьшением частоты ω в окрестности наибольших из максимумов k_v величины v_v станут порядка единицы, а в остальном диапазоне они останутся большими, т. е. в соответствии с разложением (2.10) будут существовать области (v_2) и (v_3) , и, ограничиваясь главными членами, коэффициенты поглощения (3.2) можно переписать так:

$$\alpha_{10} \cong \alpha_1 = 1/2(\gamma - 1)\gamma^{-1}Z(K + v_1^{-1}) \quad (3.9)$$

где теперь уже K вычисляются интегралом по области (v_2) , средний коэффициент поглощения k_1 определяется интегралом по спектру (v_3) , а в число Z входит по-прежнему интеграл по всему спектру (v) . Относительные значения K и v_1^{-1} зависят от расположения в спектре участков, попавших в (v_2) и (v_3) , т. е. от значений функции Планка при заданной температуре, соответствующих интервалам (v_2) и (v_3) , и от ширины этих интервалов и их составляющих. По сравнению с осредненной теорией зависимость коэффициентов поглощения от частоты колебаний усложняется и принимает индивидуальный характер. Коэффициенты α_{10} , α_1 могут иметь несколько максимумов, различно выраженных. В затухании основную роль не обязательно будут играть области частот с наибольшими коэффициентами поглощения.

Все это отнесится и к дисперсии волн, которую теперь можно описать формулами

$$r = 1 - 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2(K + v_1^{-1})[(\gamma + 3)v_1^{-1} + \\ + (3\gamma + 1)K - 2(\gamma - 1)\alpha^{(1)}] + \dots \\ r_1 = 1 + 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2\{(K + v_1^{-1})[2(\gamma + 3)v_1^{-1} + \\ + (3\gamma + 1)K + 4(\gamma - 1)\alpha^{(2)} + (3 - 7\gamma)\alpha^{(1)}] - \\ - (\alpha^{(1)} + v_1^{-1})[(\gamma + 3)v_1^{-1} + (3\gamma + 1)K - 2(\gamma - 1)\alpha^{(1)}]\} + \dots \quad (3.10) \\ r_2 = 1 + 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2\{(K + v_1^{-1})[3(\gamma + 3)v_1^{-1} + \\ + 4(3\gamma + 1)K + 4(\gamma - 1)\alpha^{(2)} + (5 - 9\gamma)\alpha^{(1)}] - \\ - (\alpha^{(1)} + v_1^{-1})[(\gamma + 3)v_1^{-1} + (3\gamma + 1)K - 2(\gamma - 1)\alpha^{(1)}]\} + \dots$$

При дальнейшем уменьшении ω участки наиболее сильного поглощения радиации перейдут из области (v_2) в область (v_1) , а часть спектра из области (v_3) должна перейти в область (v_2) . Области (v_3) и (v_2) при любых малых ω будут существовать, поскольку будут существовать участки спектра со сколь угодно малыми k_v . Если такие окна почти полной прозрачности существуют в области, близкой к максимумам производной от функции Планка по температуре, и достаточно широки, то именно они будут определять радиационное затухание волн давления для определенного диапазона частот механических колебаний.

В случае достаточно малых частот колебаний параметры волн определяются выражениями

$$\alpha_{10} \approx \alpha_1 = 1/2(\gamma - 1)\gamma^{-1}Z(1/3v_{-1} + K + v_1^{-1}) + \dots \\ r = 1 - 1/8(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2(1/3v_{-1} + K + v_1^{-1})[1/3(7 - 3\gamma)v_{-1} + \\ + (3\gamma + 1)K - 2(\gamma - 1)\alpha^{(1)} + (\gamma + 3)v_1^{-1}] + \dots \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1 + \frac{1}{8}(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2\{3(3\gamma + 1)K^2 + 2K[4(\gamma + 1)v_1^{-1} + \\
 &+ 2(\gamma - 1)\alpha^{(2)} - (5\gamma - 1)\alpha^{(1)}] - 2\alpha^{(1)}[(3\gamma + 1)v_1^{-1} - (\gamma - 1)\alpha^{(1)} + \\
 &+ \frac{1}{3}(5 - \gamma)v_{-1}] + 4(\gamma - 1)(\frac{1}{3}v_{-1} + v_1^{-1})\alpha^{(2)} + \frac{1}{3}(3\gamma - 7)v_{-1}^2 + \\
 &+ \frac{2}{3}(\gamma - 5)v_{-1}v_1^{-1} + (\gamma + 3)v_1^{-2}\} + \dots \\
 r_2 &= 1 - \frac{1}{8}(\gamma - 1)\gamma^{-2}Z^2\{(\frac{1}{3}v_{-1} + \alpha^{(1)} - 2K - v_1^{-1})[\frac{1}{3}(7 - 3\gamma)v_{-1} + \\
 &+ (3\gamma + 1)K - 2(\gamma - 1)\alpha^{(1)} + (\gamma + 3)v_1^{-1}] + (\frac{1}{3}v_{-1} + K + \\
 &+ v_1^{-1})[\frac{1}{3}(7 - 3\gamma)v_{-1} - 2(3\gamma + 1)K + (5\gamma - 1)\alpha^{(1)} - \\
 &- (\gamma + 3)v_1^{-1} - 4(\gamma - 1)\alpha^{(2)}]\} + \dots
 \end{aligned}$$

Здесь v_{-1} определяется в области (v_1) , величины K , $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ — в области (v_2) и v_1 — в области (v_3) . Из трех областей определяющими будут те, которые вносят наибольший вклад, в соответствии с чем характер зависимости коэффициентов поглощения и скорости волн от частоты колебаний будет различный.

Когда радиационный перенос определяется областью (v_1) , где $v_v \ll 1$ (при этом $Zv_{-1} \ll 1$), то принимая в расчет только эту область спектра, параметры волн можно представить разложениями ($z_1 \equiv \frac{1}{3}Zv_{-1}$)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10} &= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left[z_1 - \frac{z_1^2}{8\gamma^2} (5\gamma^2 - 30\gamma + 33) - \frac{v_{-3}^3}{5} \right] + \dots \\
 r &= 1 - \frac{(\gamma - 1)(7 - 3\gamma)}{8\gamma^2} z_1^2 + \dots, \quad r_1 = 1 - \frac{3(\gamma - 1)(7 - 3\gamma)}{8\gamma^2} z_1^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если осредненные коэффициенты поглощения радиации находятся интегрированием по всему спектру, как в «осредненной теории», то справедливы неравенства

$$\beta \leq Zv_{-1}^{-1} \leq 0.229878Z \leq \frac{1}{3}Zv_{-1}, \quad v_{-1} \geq v_1 \tag{3.13}$$

Близкие к звуковым волны давления очень больших частот, когда все $v_v \gg 1$, достаточно хорошо описываются осредненной теорией, если пользоваться коэффициентом непрозрачности k_1 и осреднением по направлениям Эддингтона или осреднением Шустера — Шварцшильда. При малых частотах колебаний осреднение по частотам дает правильные результаты, если использован надлежащим образом вычисленный коэффициент непрозрачности Росселанда и если при этом преобладающим является только участок спектра (v_1) . Осреднение по направлениям в последнем случае допустимо (в первом приближении) по схеме Эддингтона или Мустеля. При умеренных значениях v_v осреднение по частотам допустимо только тогда, когда преобладает спектр в области (v_2) . Осреднение по направлениям в этой области не даст количественно верных результатов.

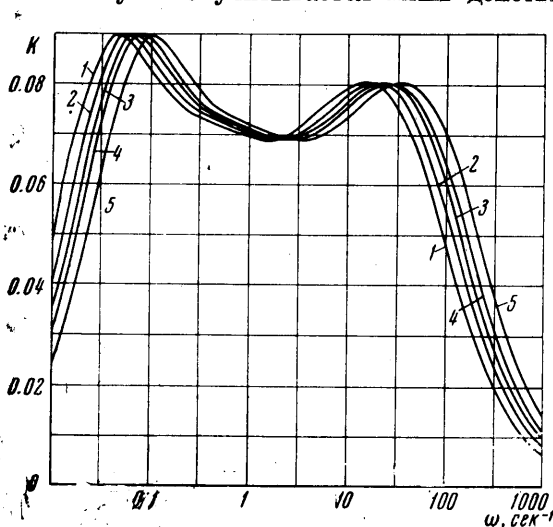
В общем случае для достаточно малых значений β отношение коэффициентов акустического поглощения с учетом спектрального распределения интенсивности оптической радиации (отметим их индексом ν) к соответствующим коэффициентам, полученным на основании осредненного по частотам уравнения переноса радиации, при любом значении частоты вынужденных колебаний равно

$$\frac{m_{\nu}}{m_r} = \frac{\alpha_{\nu}}{\alpha_a} = \frac{\alpha_{\nu}^1}{\alpha_a^1} = \frac{1}{w(1 - w \operatorname{arc} \operatorname{ctg} w)} \int_{(\nu)} A_{\nu} w_{\nu} (1 - w_{\nu} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} w_{\nu}) d\nu \tag{3.14}$$

и зависит не только от значения спектральных коэффициентов поглощения и состояния среды, но и от частоты колебаний и не может, следовательно, в общем случае обратиться в единицу для всего диапазона механических колебаний.

4. Поглощение звука во влажном воздухе. Поглощение звука в атмосферном воздухе вызывается многими факторами, среди них в классической акустике учитывается лишь действие вязкости и теплопроводности (стоксовское поглощение).

Однако дополнительное поглощение, обусловленное радиационным теплообменом, может давать на низких звуковых частотах такой же вклад и даже гораздо больший, как и вязкость с теплопроводностью. Для подтверждения этого были вычислены коэффициенты затухания звуковых волн в воздухе для некоторой модели спектра и сопоставлены со стоксовскими коэффициентами затухания.



Фиг. 1

относительной влажности $\varphi = 0,4 \div 0,9$. Учитывалась абсорбция радиации лишь наиболее важной из излучающих компонент воздуха — водяного пара. Коэффициенты затухания волн давления за счет вязкости, теплопроводности при малых β , X , θ определяются формулами [3]

$$\alpha_{10} = \frac{\alpha_a^\circ}{2\pi} = \frac{\alpha_a}{2\pi} = \frac{c_0 \alpha_a^1}{\omega} = 1/2 \left[X + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\theta + \beta) \right] \quad (4.1)$$

$$X = 4/3 \mu_0 \omega \rho_0^{-1} c_0^{-2}, \quad \theta = \lambda_0 \omega \gamma^{-1} \rho_0^{-1} c_0^{-1}$$

Здесь μ_0 , λ_0 — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности. При указанных выше условиях

$$7.821 \geq Z 10^5 \geq 7.776, \quad 1.668 \leq X \omega^{-1} 10^{10} \leq 1.658, \quad 2.198 \leq \omega^{-1} 10^{10} \leq 2.201$$

За спектр абсорбции водяного пара в инфракрасной области взяты массовые коэффициенты абсорбции, предложенные в качестве приближенных в работе [4], а также аппроксимации этих коэффициентов в сторону длинных волн. Этим спектром охватывается диапазон длин электромагнитных волн $5 \leq \lambda \leq 35$ мк, причем в интервале $5 \div 9$ мк коэффициенты осреднены в интервалах $\Delta\lambda = 0,5$ мк, а в остальном диапазоне — в интервалах 1 мк. В этом участке спектра находится максимум по λ функции Планка B_λ ($\lambda_{\max} = 9,931$ мк) и максимум ее производной по температуре ($\lambda'_{\max} = 8,310$ мк). На этот участок спектра приходится 0,9092 полной радиационной энергии черного тела и 0,9395 производной по температуре полной энергии черного тела.

Коэффициенты затухания, вызванного радиационным переносом, α_a на длине волны l и α_a^1 на 1 см толщины слоя газа пропорциональны $K(\omega)$ и $\omega K(\omega)$

$$\alpha_a = a_l K, \quad \alpha_a^1 = a_1 \omega K, \quad a_l = \pi(\gamma - 1) Z \gamma^{-1}, \quad a_1 = (\gamma - 1) Z (2\gamma c_0)^{-1} \quad (4.2)$$

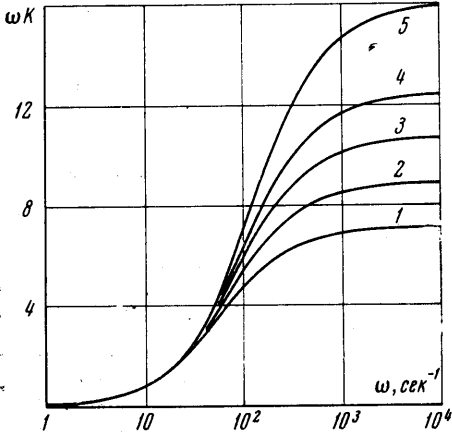
Кривые	φ	$\rho 10^3 / \text{г/см}^3$	$a_l 10^5$	$a_1 10^{10}$
1	0.422	0.6047	6.637	3.091
2	0.527	0.7549	6.639	3.091
3	0.632	0.9056	6.639	3.090
4	0.737	1.056	6.640	3.089
5	0.947	1.357	6.644	3.087

При вычислении K и Z интегралы распространяются на интервал длин инфракрасной радиации $5 \leq \lambda \leq 35$ мк. Коэффициенты пропорциональности приведены в таблице.

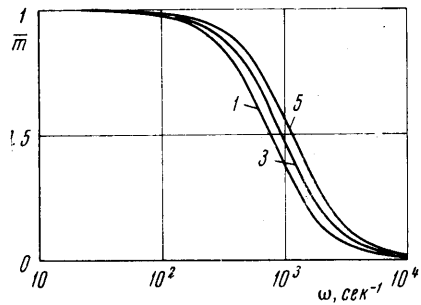
Результаты расчета K представлены на фиг. 1. Функция $K(\omega)$ имеет два максимума. С увеличением содержания поглощающей компоненты вся кривая сдвигается в сторону больших частот. Кривые для двух содержаний поглощающей компоненты пересекаются три раза между соответствующими экстремумами: увеличение содержания малых поглощающих присадок приводит к увеличению истинного коэффициента поглощения звуковых волн некоторых частот (больших частот всегда) и к уменьшению для других частот.

Коэффициенты α_a^1 (фиг. 2) являются в заданных средах монотонно возрастающими функциями частоты. Взаимное расположение и пересечение кривых, соответствующих разным φ (в принятом на фиг. 2 масштабе они не различаются) такое же, как и кривых $K(\omega)$.

На фиг. 3 представлены отношения коэффициента затухания звука на фиксированной длине за счет радиации к



Фиг. 2



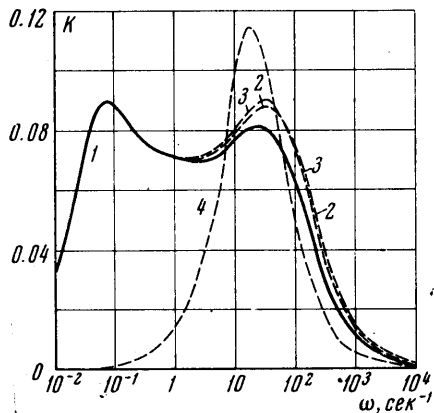
Фиг. 3

соответствующему коэффициенту затухания за счет суммарного действия вязкости, теплопроводности и радиации. В рассматриваемых случаях поглощение инфразвуковых волн (при $\omega \leq 10^2$ сек⁻¹) определяется радиационным теплообменом. В области слышимых звуков при $10^2 \leq \omega \leq 10^4$ сек⁻¹ осуществляется постоянный спад роли радиационного теплообмена от полного преобладания до мало заметного влияния. В области $\omega > 10^4$ преобладание эффекта вязкости и теплопроводности становится полным. Увеличение содержания поглощающей компоненты, как и продолжение спектра в сторону более длинных электромагнитных волн, сдвигает кривую $K(\omega)$ в сторону больших частот.

Продолжение спектра в сторону длинных электромагнитных волн с целью учесть абсорбцию радиационной энергии в широкой полосе справа от рассматриваемого участка может заметно сказаться на числовых значениях коэффициентов затухания звука.

Рассмотрим два продолжения: 1) $\alpha_a = 180$ см²/г при $\infty > \lambda \geq 35$ мк, 2) $\alpha_a = 110$ при $\lambda = 34$ мк, $\alpha_a = 108$ см²/г при $\infty > \lambda > 34$ мк. На фиг. 4 при $\varphi = 0.7$ приведены значения K , $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ — кривые 1, 2, 3 — для первоначального спектра, первого и второго продолжений (интеграл в выражении для A_v , как и числа Z , всегда вычислялся в пределах от $\lambda = 5$ до $\lambda = 35$ мк).

При первом продолжении относительное приращение K не превышает 1% для $\omega < 3$ сек⁻¹, возрастает до 18% на пороге слышимости низких звуков и остается близким к 26% в области звуковых и ультразвуковых частот. Второе продолжение приводит к росту коэффициентов затухания в области звуковых и ультразвуковых частот на 16—17%. Оба продолжения спектра вызывают всюду рост $K(\omega)$ и сдвиг



Фиг. 4

экстремумов вдоль оси ω , но заметное приращение K получается при $\omega > \omega_{\min}$. Вторым максимумом из-за обоих продолжений сдвигается от $\omega_{\max} = 26$ до 35 сек^{-1} , при этом он возрастает, а разница между ним и первым максимумом значительно уменьшается. При $\omega < 68 \text{ сек}^{-1}$ $K^{(2)} > K^{(1)}$, а при больших частотах $K^{(2)} < K^{(1)}$.

Если в формулу (4.2) вместо коэффициента радиационной абсорбции α_λ подставить одно из его средних значений α , то для вычисления коэффициента затухания за счет радиационного теплообмена в рамках модели серой среды получится следующая формула [1]:

$$\alpha_\alpha = \pi(\gamma - 1)ZK\gamma^{-1}, \quad K = w(1 - w \operatorname{arc} \operatorname{ctg} w), \quad w = \rho_a c_0 \alpha \omega^{-1} \quad (4.3)$$

причем Z определится формулой (2.3), ρ_a — плотность поглощающей компоненты.

Для рассмотренного спектра при $\varphi = 0.7$ плотность водяного пара $\rho = 1.050 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$ средние коэффициенты радиационной абсорбции и построенные по ним волновые числа Бугера равны

$$\begin{aligned} \alpha_p &= 35.00 \text{ см}^2/\text{г}, & w_p &= 12.65 \omega^{-1} \\ \alpha_1 &= 34.22 \text{ см}^2/\text{г}, & w_1 &= 12.37 \omega^{-1} \\ \alpha_{-1} &= 0.3045 \text{ см}^2/\text{г}, & w_{-1} &= 0.1100 \omega^{-1} \end{aligned}$$

Монохроматические числа Бугера для избранного спектра меняются от $w_{\lambda \min} = 0.03613 \omega^{-1}$ до $w_{\lambda \max} = 71.54 \omega^{-1}$. В соответствии с п. 3 в этом случае нельзя пользоваться осредненным по частотам уравнением переноса радиации для частот от 10^{-3} до 10^3 сек^{-1} , т. е. в области, включающей наибольшее влияние радиационного теплообмена. Лишь для очень малых частот и для частот, приближающихся к краю интервала (где радиация становится уже несущественной) можно пользоваться моделью серой среды. Использование модели серой среды во всем диапазоне приводит даже к качественно неверной картине: вместо кривой $\alpha_\lambda(\omega)$ с двумя максимумами получится кривая с одним максимумом ($1/2 K$ изображено на фиг. 4, кривая 4 для массового коэффициента непрозрачности $\alpha = 34.22 \text{ см}^2/\text{г}$). Максимум $K(\omega)$ при любом α равен 0.22988 (достигается при $\omega_{\max} = 0.5474 \alpha = 18.73 \text{ сек}^{-1}$), т. е. оказывается в 2.55 раза большим, чем наибольший из максимумов этой функции, вычисленной по спектральному распределению коэффициентов адсорбции.

Поступило 15 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. Затухание плоских вынужденных волн давления в газах под влиянием радиационного теплообмена. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 8—16.
2. Прокофьев В. А. Слабые волны в сжимаемой жидкости с учетом излучения. ПММ, 1957, т. 21, № 6, стр. 775—782.
3. Прокофьев В. А. Учет излучения в гидродинамической теории распространения плоских вынужденных волн бесконечно малой амплитуды. Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., механ., астрон. физ., хим., 1957, № 6, стр. 7—16.
4. Кондратьев К. Я. Актинометрия. Гидрометеиздат, 1965, стр. 116.