УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. В. ГОГОСОВ, В. А. ПОЛЯНСКИЙ, И. П. СЕМЕНОВА, А. Е. ЯКУБЕНКО

(*Москва*)

Методами кинетической теории получена замкнутая система уравнений, описывающая поведение многокомпонентной частично ионизованной газовой смеси в электромагнитном поле, когда существен объемный заряд. Приводится критерий, позволяющий отделить задачу о нахождении магнитного поля от нахождения остальных определяющих параметров. Получены выражения для тензоров вязких напряжений, тепловых и диффузионных потоков и вычислены коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Анализируются соотношения для силы трения и обмена энергией между компонентами при столкновениях частиц. Подробно обсуждаются уравнения смеси, состоящей из нейтральных частиц и заряженных частиц одного знака. Выписываются и анализируются безразмерные критерии в электрогидродинамике. Рассматриваются возможные упрощения системы уравнений и обсуждаются различные формы закона Ома. Проводится анализ слабых разрывов в электрогидродинамике. Уравнения электрогидродинамики при различных предположениях рассматривались также в работах [1] [1–3].

1. Уравнения движения многокомпонентной плазмы с объемным зарядом в электрическом поле. Рассмотрим многокомпонентную частично ионизованную плазму, находящуюся в электромагнитном поле. Выберем в качестве параметров, характеризующих макроскопическое состояние каждой компоненты плазмы, следующие величины: плотность ρ_α, давление p_α, скорость $\mathbf{u}_\alpha$, внутреннюю энергию единицы массы ε_α, температуру T_α. Введем также параметры, определяющие состояние среды в целом: объемный заряд, суммарные плотность и давление, среднюю массовую скорость, внутреннюю энергию единицы массы и температуру смеси

$$q = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha, \quad p = \sum_\alpha p_\alpha$$
$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad \varepsilon = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha \rho_\alpha\varepsilon_\alpha, \quad T = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha T_\alpha, \quad n = \sum_\alpha n_\alpha \tag{1.1}$$

При этом n_α, e_α, m_α — соответственно среднее число частиц в единице объема, заряд и масса частицы сорта α.

В магнитной гидродинамике изучаются явления, в которых электрическое поле $E \leqslant (u_0 / c)B$ (E, B — модули векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции, u_0 — характерная скорость движения проводящей среды). Это неравенство вместе с другими предположениями позволяет существенно упростить систему уравнений, описывающую поведение проводящей среды в рамках магнитной гидродинамики [4].

---

[1] Касьянов В. А. канд. дисс., Институт гидромеханики АН УССР, Киев, 1965, Ушаков В. В. канд. дисс., Институт гидромеханики АН УССР, Киев, 1966, Бортников Ю. С., Рубашов И. Б. Доклад на 6-ом Рижском совещании по магнитной гидродинамике, Рига, 1968.

Существует важный класс явлений [1–3, 5, 6], в которых электрическое поле велико, так что

$$E \gg (u_0 / c) B \max \{1, (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}\} \tag{1.2}$$

Здесь ε_0, μ_0 — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, предполагаемые в дальнейшем постоянными.

Именно такие явления рассматриваются в электрогидродинамике. Неравенство (1.2) соответствует тому, что в электромагнитном воздействии на заряженную среду преобладающим будет воздействие электрического поля. Отметим, что при выполнении (1.2) связь между электрической индукцией $\mathbf{D}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ в движущейся среде выражается формулой $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$.

Уравнения для введенных выше макроскопических параметров, описывающие движение проводящей среды в рамках электрогидродинамики (выполняется неравенство (1.2)) могут быть получены различными способами. В данной работе применяется метод, основанный на использовании кинетических уравнений, записанных для каждой из компонент плазмы [7, 8].

Умножим правые и левые части кинетических уравнений на величины m_α, $m_\alpha\mathbf{v}$, $0.5m_\alpha\mathbf{v}^2 + \varepsilon_{\alpha i}$ ($\mathbf{v}$ — микроскопическая скорость частицы, $\varepsilon_{\alpha i}$ — внутренняя энергия частицы α — сорта) и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Взяв в (1.2) величину $u_0 = \max\{|\mathbf{u}_\alpha|\}$, нетрудно показать, что в уравнениях, полученных после интегрирования, члены с магнитным полем в силу неравенства (1.2) могут быть опущены.

Система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha = R_\alpha^{(0)}, \qquad \sum_\alpha R_\alpha^{(0)} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\alpha u_{\alpha i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_\alpha u_{\alpha i}u_{\alpha j} + p_\alpha\delta_{ij} + \pi_{ij}{}^\alpha - \rho_\alpha w_{\alpha i}w_{\alpha j}) -$$

$$- e_\alpha n_\alpha E_i = R_{\alpha i}{}^{(1)} + R_\alpha{}^{(0)}u_i, \qquad \sum_\alpha R_{\alpha i}{}^{(1)} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\alpha \mathrm{E}_\alpha + \operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_\alpha - e_\alpha n_\alpha\mathbf{u}_\alpha\mathbf{E} = R_\alpha{}^{(2)} + \mathbf{u}\mathbf{R}_\alpha{}^{(1)} + {}^1/_2\mathbf{u}^2R_\alpha{}^{(0)},$$

$$\sum_\alpha R_\alpha{}^{(2)} = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathrm{E}_\alpha = \varepsilon_\alpha + 0.5\,\mathbf{u}_\alpha{}^2 - 0.5\,\mathbf{w}_\alpha{}^2, \quad \boldsymbol{\Pi}_\alpha = \rho_\alpha\mathbf{u}\mathrm{E}_\alpha + \mathbf{u}p_\alpha + \mathbf{u}\cdot\pi^\alpha + \mathbf{q}_\alpha + 0.5\,\rho_\alpha\mathbf{u}^2\mathbf{w}_\alpha$$

$$p_\alpha = p_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha), \qquad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(T_\alpha) \tag{1.6}$$

Здесь π^α — тензор вязких напряжений, $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$ — диффузионная скорость, $\mathbf{q}_\alpha$ — тепловой поток, E_α — полная энергия единицы массы α-компоненты среды, δ_{ij} — символ Кронекера. Величины, стоящие в правых частях уравнений (1.3) — (1.5), описывают соответственно изменение массы, импульса и энергии α-компоненты при столкновениях α-частиц с частицами других сортов. В уравнениях (1.3) — (1.6) величины p_α, π^α, ε_α, T_α, $\mathbf{q}_\alpha$ определены посредством функции распределения α-компоненты по скорости $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ ($\mathbf{c}$ — микроскопическая скорость частицы в системе координат, связанной с центром масс смеси). Уравнения состояния (1.6) можно получить при помощи функций распределения каждой из компонент, найденных из исходной системы кинетических уравнений. Для замыкания системы уравнений необходимо к (1.3) — (1.6) добавить уравнения Максвелла и соотношения, связывающие тензоры напряжений π^α и тепловые потоки $\mathbf{q}_\alpha$, а также величины $R_\alpha^{(n)}$ с определяющими параметрами и электрическим полем. Такие соотношения получены для многокомпонентной частично ионизованной разнотемпературной газовой плазмы методами кинетической теории в работах [9–12]. В п. 3, 4 данной работы выражения для π^α, $\mathbf{q}_\alpha$, $R_\alpha^{(n)}$ и коэффициенты переноса вычислены в случае, когда вследствие неравенства (1.2) в уравнениях переноса существенны члены с электрическим полем. Отметим, что эти соотношения не зависят от магнитного поля.

Оценим члены с магнитным полем в уравнениях Максвелла. Вводя безразмерные величины $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} / E_0$ и $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} / L$ (E_0, L — характерные величина электрического поля и длина), получим $|\operatorname{rot}\mathbf{E}^*| \sim BL / cTE_0 \sim u_0B / cE_0 \ll 1$ (предполагается, что характерное время T изменения магнитной индукции имеет порядок L / u_0). Поэтому для электрического поля имеем уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi q / \varepsilon_0 \tag{1.7}$$

Таким образом, уравнения (1.3) — (1.7) вместе с (1.1) и соотношениями для π^α, $\mathbf{q}_\alpha$, $R_\alpha^{(n)}$ образуют замкнутую систему уравнений электрогидродинамики для параметров ρ_α, $\mathbf{u}_\alpha$, p_α, ε_α, T_α и $\mathbf{E}$. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ не входит в эту систему и может быть определена из уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \tag{1.8}$$

по найденным из решения задачи значениям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$. Покажем, что изменение $\mathbf{B}$, описываемое уравнениями (1.8), удовлетворяет неравенству (1.2). Приняв для плотности тока оценку $j \sim qu_0$ и используя связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в движущейся среде, из первого уравнения (1.8) можно оценить величину изменения магнитной индукции ΔB на характерной длине

$$u_0\Delta B / \varepsilon_0\mu_0 cE \sim 4\pi ju_0L / \varepsilon_0c^2E \sim (u_0^2 / c^2)Q \qquad (Q = 4\pi qL / \varepsilon_0E)$$

В широком диапазоне реально осуществимых условий

$$(u_0^2 / c^2)Q \ll 1, \qquad u_0\Delta B / \varepsilon_0\mu_0 c \ll E$$

Используя формулы преобразования электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, можно видеть, что в силу неравенства (1.2) в электрогидродинамике электрическое поле не преобразуется, преобразуется только магнитное поле. Заметим, что в магнитной гидродинамике наоборот, преобразуется только электрическое поле, а магнитное поле не преобразуется. Нетрудно показать, что уравнения электрогидродинамики не зависят от выбора инерциальной системы координат.

При решении задач удобно (особенно в случае равенства температур компонент) использовать уравнения для параметров (1.1), характеризующих плазму в целом. Эти уравнения получаются из (1.3) — (1.6) суммированием по всем α. В рамках электрогидродинамики (выполняется (1.2)) имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}q + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0; \quad p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(T) \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p\delta_{ij} + \pi_{ij}) = qE_i, \quad \pi_{ij} = \sum_\alpha \pi_{ij}^\alpha \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \operatorname{div}\left[\rho\mathbf{u}\left(i + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \mathbf{u}\cdot\pi + \mathbf{q}\right] = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \quad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha \tag{1.11}$$

При этом $i = \varepsilon + p / \rho$ — энтальпия единицы массы смеси.

Вычитая из уравнения энергии (1.11) уравнение (1.10), умноженное скалярно на $\mathbf{u}$, получим уравнение притока тепла в электрогидродинамике

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\varepsilon u_j+\frac{\partial}{\partial x_j}q_j+p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=(j_i-qu_i)E_i \quad (1.12)$$

Уравнение для плотности электрического тока $\mathbf{j}$ (закон Ома) в электрогидродинамике получается аналогично тому, как это делается в магнитной гидродинамике [4] с той лишь разницей, что необходимо учитывать члены с объемным зарядом. В случае, когда имеются заряженные частицы одного сорта, законом Ома служит уравнение движения этих частиц (1.4). Подробный анализ этого случая изложен ниже (п. 2).

Отметим, что наряду с уравнениями (1.9) — (1.11), (1.7) и законом Ома при описании поведения среды в целом необходимо использовать, вообще говоря, уравнения неразрывности компонент и диффузионные уравнения, которые являются следствием уравнений (1.4) и (1.10) [10], так как плотности компонент и диффузионные скорости могут входить в коэффициенты переноса, в выражение для потока тепла, в закон Ома и т. д.

Полезно выписать уравнение для изменения энтропии s единицы массы среды в электрогидродинамике. Используя тождество Гиббса $Tds=d\varepsilon+pd(1/\rho)$ и уравнение притока тепла (1.12), получим

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u_i\frac{\partial s}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}q_i+\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=(j_i-qu_i)E_i$$

Параметры ε_α, p_α, T_α, π^α и $\mathbf{q}_\alpha$ были определены выше при помощи функции распределения f_α по скорости $\mathbf{c}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Существует другой способ определения этих параметров [13] — по скорости $\mathbf{c}_\alpha^*=\mathbf{v}-\mathbf{u}_\alpha$ ($\mathbf{c}_\alpha^*$ — микроскопическая скорость α-частицы в системе координат, связанной с центром масс α-компоненты). Связь между параметрами ε_α^*, p_α^*, T_α^*, $\pi^{\alpha*}$ и $\mathbf{q}_\alpha^*$, определенными по скорости c_α^*, и параметрами ε_α, p_α, T_α, π^α и $\mathbf{q}_\alpha$ нетрудно установить, используя соотношение $\mathbf{c}_\alpha^*=\mathbf{c}-\mathbf{w}_\alpha$, например: $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\alpha^*+0.5m_\alpha\mathbf{w}_\alpha^2$, $T_\alpha=T_\alpha^*+{}^1/_3m_\alpha\mathbf{w}_\alpha^2$ и т. д. Параметры $\varepsilon_\alpha^*,\ldots,\mathbf{q}_\alpha^*$ удобно использовать при описании движения каждой из компонент, так как при этом в уравнения движения (1.4) и энергии (1.5) не входят скорость среды $\mathbf{u}$ и диффузионные скорости $\mathbf{w}_\alpha$. Если исследуется движение плазмы в целом, то параметры $\varepsilon_\alpha,\ldots,\mathbf{q}_\alpha$ более удобны, так как уравнения для суммарных параметров имеют при этом наиболее простой вид. Заметим, что если диффузия мала, то $\varepsilon_\alpha\approx\varepsilon_\alpha^*$, $p_\alpha\approx p_\alpha^*$ и т. д.

Уравнения электрогидродинамики для параметров, характеризующих среду в целом, при различных предположениях выписывались в нескольких работах [1] [1–3]. В работе [1] к системе уравнений электрогидродинамики добавляется также первое уравнение (1.8), из которого выброшено магнитное поле. Нетрудно видеть, что такая система уравнений будет переопределенной, так как найденное из уравнений (1.7), (1.9) — (1.11) поле $\mathbf{E}$, вообще говоря, не будет удовлетворять первому уравнению (1.8) с $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$. Ситуация аналогична имеющейся в МГД, когда из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi q/\varepsilon_0$ нельзя выбрасывать заряд и писать $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, иначе система уравнений МГД становится переопределенной. Наоборот, уравнение $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi q/\varepsilon_0$ служит для определения q по найденному из решения задачи полю $\mathbf{E}$. Как указывалось выше, из уравнений (1.8) находится магнитное поле $\mathbf{B}$.

2. Различные формы закона Ома и безразмерные критерии электрогидродинамики. В этом разделе исследуются электрогидродинамические уравнения, описывающие движение среды в целом. Будем для простоты считать, что среда состоит из двух компонент — заряженной (i) и нейтральной (a), причем первая содержит заряженные частицы только одного знака. Такая среда может рассматриваться как модель плазмы, в которой имеется значительный избыток заряженных частиц одного сорта. Так как плотность электрического тока при этом $\mathbf{j}=q\mathbf{u}_i$ ($\mathbf{u}_i$ — скорость заряженной компоненты), то, как отмечалось выше, законом Ома будет уравнение (1.4) движения заряженных частиц.

[1] См. также сноску на стр. 31.

Вводя безразмерные переменные $f^* = f/f_0$ (звездочка обозначает безразмерную величину, индекс 0 — характерное для рассматриваемой задачи значение параметра), запишем уравнения (1.10), (1.11), (1.4) и (1.7) в безразмерном виде

$$\rho^*\left(\frac{\partial u_k^*}{\partial t^*} + u_r^*\frac{\partial u_k^*}{\partial x_r^*}\right) = -\frac{1}{\theta_1}\frac{\partial p^*}{\partial x_k^*} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x_r^*}\eta^* W_{kr}^* + Sq^*E_k^* \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\rho^*\left(\frac{1}{\gamma\theta}T^* + \frac{\mathbf{u}^{*2}}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k^*}\rho^* u_k^*\left(\frac{1}{\theta}T^* + \frac{\mathbf{u}^{*2}}{2}\right) + \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{\theta PR}\frac{\partial}{\partial x_k^*}\lambda^*\frac{\partial T^*}{\partial x_k^*} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x_k^*}\eta^* u_r^* W_{kr}^* + SJ j_k^* E_k^*$$

$$\frac{\alpha m_i J}{m_a S}\left(\frac{\partial}{\partial t^*}j_k^* + J\frac{\partial}{\partial x_r^*}\frac{j_r^* j_k^*}{q^*}\right) = -D\frac{\partial p_i^*}{\partial x_k^*} + q^*E_k^* + \tag{2.3}$$

$$+ (R_q/b^*)(q^*u_k^* - Jj_k^*)$$

$$\operatorname{rot} E^* = 0, \qquad \operatorname{div} E^* = Qq^* \tag{2. 4}$$

Здесь η^*, λ^*, b^* — безразмерные коэффициенты вязкости, теплопроводности и подвижности; $\gamma = c_p/c_v$, c_p, c_v — удельные теплоемкости. Безразмерные величины R, P, θ_1, θ, α, S, J, R_q, D, Q даются формулами

$$R = \frac{\rho_0 u_0 L}{\eta_0},\quad P = \frac{c_p\eta_0}{\lambda_0},\quad \theta_1 = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0},\quad \theta = \frac{u_0^2}{c_p T_0},\quad \alpha = \frac{n_{i0}}{n_0}$$

$$S = \frac{q_0 E_0 L}{\rho_0 u_0^2},\quad J = \frac{j_0}{q_0 u_0},\quad R_q = \frac{u_0}{b_0 E_0},\quad D = \frac{p_{i0}}{q_0 E_0 L},\quad Q = \frac{4\pi q_0 L}{\varepsilon_0 E_0}$$

Здесь L — характерная длина.

При записи уравнений (2.1), (2.2) сделаны следующие предположения: тензор вязких напряжений среды и поток тепла пропорциональны соответственно девиатору W тензора скоростей деформаций среды и градиенту температуры T, температуры компонент одинаковы, внутренняя энергия среды $\varepsilon = c_v T$, энтальпия среды $i = c_p T$. В уравнении (2.3) пренебрегается тензором вязких напряжений заряженных частиц и квадратичным членом с диффузионной скоростью, в силе трения учитываются только члены, пропорциональные разности скоростей компонент. Предполагая, что плотность заряженных частиц мала по сравнению с плотностью нейтральной компоненты, в соответствии с результатами, полученными ниже (п. 3, 4), имеем $\mathbf{R}_i^{(1)} = qb^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i)$.

Из уравнений (2.1), (2.2) видно, что когда параметр взаимодействия $S \ll 1$, и $SJ \ll 1$, электрические силы не оказывают влияния на движение [3]. Член, описывающий работу электрического поля, также несуществен. Таким образом, в уравнениях для ρ, $\mathbf{u}$, T, p отсутствуют члены с электрическим полем и током, так что указанные параметры могут быть определены независимо от электрических величин.

Параметр Q характеризует изменение электрического поля. В случае $Q \ll 1$ уравнения (2.4) дают $\Delta\mathrm{E} = 0$. Следовательно, при малых числах Q электрическое поле определяется при соответствующих граничных условиях из последнего уравнения независимо от остальных параметров.

Заметим, что аналогичная ситуация возникает в магнитной гидродинамике при малых магнитных числах Рейнольдса, когда магнитное поле может быть найдено отдельно от других величин, определяющих движение плазмы.

Рассмотрим порядок членов в уравнении для плотности электрического тока (2.3). Предварительно отметим, что по предположению величина $\alpha \ll 1$. Параметр D имеет порядок отношения характерной тепловой энергии частиц газа kT_0 к работе, совершаемой электрическим полем E_0 над частицей заряда e_i на характерной длине L. В рассматриваемом диапазоне параметров $D < 1$. Предположим, что все производные в уравнении (2.3) конечны.

Пусть, параметр R_q — большой ($R_q = \infty$). Тогда из (2.3) следует, что $\mathbf{j} = q\mathbf{u}$. Из уравнений сохранения заряда и неразрывности (1.9) нетрудно получить, что в этом случае $d \ln (q / \rho) / dt = 0$. Следовательно, в жидкой частице отношение $q / \rho = \mathrm{const}$, имеет место «вмороженность» заряженных частиц в среду, другими словами отсутствует проскальзывание заряженных частиц относительно нейтральных [14, 15]. Заметим, что в магнитной гидродинамике при магнитных числах Рейнольдса $R_m = \infty$ имеет место вмороженность магнитных силовых линий в вещество. В силу этой аналогии параметр R_q удобно называть, как предложено в работе [1], электрическим числом Рейнольдса. Электрогидродинамические течения при больших числах R_q исследовались в работе [15].

Рассмотрим случай малых чисел R_q ($R_q \ll 1$). Если характерная величина плотности электрического тока $j_0 \sim q_0 b_0 E_0$ (параметр $J \sim R_q^{-1}$), в уравнении (2.3) можно опустить член, содержащий $q\mathbf{u}$. В случае $j_0 \sim \sim q_0 u_0$ (параметр $J \sim 1$) может быть опущен весь последний член в правой части (2.3). Если при этом давление заряженных частиц не зависит от температуры T, то задачи об определении электрических параметров ($\mathbf{j}, q, T$) и параметров $p, \rho, \mathbf{u}, T$ отделяются. В случае, когда взаимодействие между заряженной и нейтральной компонентами плазмы пренебрежимо мало (отсутствует трение, обмен энергией при столкновениях частиц разных сортов) число $R_q = 0$ и удобно вместо суммарных величин (1.1) использовать параметры, характеризующие состояние каждой компоненты, так как системы уравнений для них независимы.

Пусть число $R_q \sim 1$, а параметр $J \ll 1$. Тогда уравнение (2.3) принимает вид

$$-D\partial p_i^* / \partial x_k^* + q^* E_k^* + (R_q / b^*) q^* u_k^* = 0$$

При малых значениях коэффициента $am_i J / m_\alpha S$ в (2.3) не существенны конвективные члены и можно записать

$$J\mathbf{j}^* = q^*\mathbf{u}^* + (b^* / R_q)(q^*\mathbf{E}^* - D\nabla p_i^*) \tag{2.5}$$

В ряде работ [2, 16] член $D\nabla p_i^*$ записывается в виде $DT^*\nabla q^*$. Нетрудно видеть, что это можно делать, когда изменение температуры невелико. Величина D в широком диапазоне параметров, представляющих практический интерес, мала ($D \ll 1$). Поэтому член с градиентом давления заряженных частиц существен только при больших ∇p_i^*. Если $D\nabla p_i^* \ll 1$, закон Ома (2.5) принимает простой вид

$$J\mathbf{j}^* = q^*\mathbf{u}^* + (b^* / R_q) q^*\mathbf{E}^* \tag{2.6}$$

3. Тензоры вязких напряжений, диффузионные и тепловые потоки и коэффициенты переноса плазмы с объемным зарядом в электрическом поле. Ниже исследуются на основе кинетических уравнений явления переноса в многокомпонентной плазме, находящейся в сильном электрическом поле. Пусть взаимодействие нейтральных частиц между собой и с заряженными частицами описывается в кинетических уравнениях интегралами столкновений Больцмана, а взаимодействие заряженных частиц друг с другом — интегралами столкновений Ландау. Предположим далее, что макроскопические параметры среды мало меняются на длине и за время свободного пробега частиц. Вычислим моменты первого, второго и третьего порядков от кинетических уравнений с использованием 13-моментного грэдовского представления функций распределения каждой из компонент (процедура вывода моментных уравнений подробно изложена в работах [8–10, 12]). Тогда с учетом указанных выше предположений и условия (1.2) будем иметь следующую систему уравнений для определения тензоров вязких напряжений, потоков тепла и диффузии:

$$\sum_\beta (a_{\alpha\beta} J_{\beta i} + b_{\alpha\beta} h_{\beta i}) = -\rho_\alpha F_{\alpha i} + \frac{\partial}{\partial x_i} p_\alpha \tag{3.1}$$

$$\sum_\beta c_{\alpha\beta} \pi_{ij}^\beta = -2\eta_\alpha^* W_{ij} + \tau_\alpha W_{ij}^\alpha \tag{3.2}$$

$$\sum_\beta f_{\alpha\beta} h_{\beta i} = -\lambda_\alpha^* \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} + \sum_\beta d_{\alpha\beta} \tau_\alpha^* J_{\beta i} + \frac{e_\alpha \tau_\alpha^*}{m_\alpha} \pi_{ij}^\alpha E_j \tag{3.3}$$

Здесь

$$F_{\alpha i} = \frac{e_\alpha^*}{m_\alpha} E_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p, \quad \mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \quad \mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{2.5}{\gamma_\alpha} \mathbf{J}_\alpha$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

$$W_{ij}^\alpha = \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left(E_i J_{\alpha j} + E_j J_{\alpha i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} E_k J_{\alpha k}\right) \tag{3.4}$$

$$e_\alpha^* = e_\alpha - m_\alpha q / \rho, \qquad \gamma_\alpha = m_\alpha / kT_\alpha$$

Коэффициенты η_α^*, λ_α^*, τ_α, τ_α^* в уравнениях (3.1)—(3.3) имеют вид

$$\eta_\alpha^* = 0.5 p_\alpha \tau_\alpha, \qquad \lambda_\alpha^* = 2.5 k p_\alpha \tau_\alpha^* / m_\alpha$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{0.3 A_{\alpha\alpha}^*}{\tau_{\alpha\alpha}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha \gamma_\beta \tau_{\alpha\beta}} \left\{1 + \frac{0.6}{\gamma_\alpha}\gamma_\beta [A_{\alpha\beta}^* + \Delta_{\alpha\beta}(2C_{\alpha\beta}^* - A_{\alpha\beta}^*)]\right\} \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha^*} = \frac{0.4 A_{\alpha\alpha}^*}{\tau_{\alpha\alpha}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)\tau_{\alpha\beta}} \left\{ 3\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\beta} + 2.5\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} + \right.$$

$$+ 1.6 A_{\alpha\beta}^* - 1.2\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} B_{\alpha\beta}^* + \Delta_{\alpha\beta}\left(-5 - 1.6 A_{\alpha\beta}^* + 13.2 C_{\alpha\beta}^* - \right.$$

$$\left. \left. - 3.6\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} L_{\alpha\beta}^* + 2.4\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} F_{\alpha\beta}^* \right) + 2.4\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha}\Delta_{\alpha\beta}^2 (3L_{\alpha\beta}^* - F_{\alpha\beta}^*) \right\}$$

При этом

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}, \quad \Delta_{\alpha\beta} = \frac{1 - T_\beta / T_\alpha}{1 + m_\beta / m_\alpha}$$

Величины τ_α, τ_α^*, $a_{\alpha\beta} \div f_{\alpha\beta}$ возникли в результате вычисления моментов от интегралов столкновений, которое проводилось в предположении, что между частицами происходят упругие столкновения с сохранением суммарных импульса и энергии поступательного движения сталкивающихся частиц. Коэффициенты $c_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha} = 1$. Выпишем соотношения для коэффициентов $a_{\alpha\beta} \div f_{\alpha\beta}$

$$a_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha \tau_{\alpha\beta}}, \quad a_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta \tau_{\beta\alpha}}, \quad \alpha \neq \beta$$

$$b_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha \tau_{\alpha\beta}} (1.2 C_{\alpha\beta}^* - 1), \quad b_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\beta \tau_{\beta\alpha}} (1.2 C_{\alpha\beta}^* - 1), \quad \alpha \neq \beta$$

$$c_{\alpha\beta} = -\frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\tau_\alpha}{m_\beta \gamma_\alpha \tau_{\beta\alpha}} [1 - 0.6 A_{\alpha\beta}^* + 0.6\Delta_{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta}^* - 2C_{\alpha\beta}^*)], \quad \alpha \neq \beta$$

$$d_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha \gamma_\alpha^2 \tau_{\alpha\beta}} \left[3C_{\alpha\beta}^* - 2.5 + \Delta_{\alpha\beta}\left(5\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\beta} + 4A_{\alpha\beta}^* - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 6C_{\alpha\beta}^* \right) + \Delta_{\alpha\beta}^2 (12 C_{\alpha\beta}^* - 4A_{\alpha\beta}^*) \right] \tag{3.6}$$

$$d_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{m_\beta\gamma_\alpha{}^2\tau_{\beta\alpha}}[3C_{\alpha\beta}{}^* - 2.5 + \Delta_{\alpha\beta}(-5 + 4A_{\alpha\beta}{}^* - 6C_{\alpha\beta}{}^*) + \Delta_{\alpha\beta}{}^2(12C_{\alpha\beta}{}^* - 4A_{\alpha\beta}{}^*)],$$
$$\alpha \neq \beta$$

$$f_{\alpha\beta} = -\frac{\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\tau_\alpha{}^*\gamma_\beta}{m_\beta(\gamma_\alpha+\gamma_\beta)\gamma_\alpha\tau_{\beta\alpha}}[5.5 - 1.6A_{\alpha\beta}{}^* - 1.2B_{\alpha\beta}{}^* + \Delta_{\alpha\beta}(5 + 1.6A_{\alpha\beta}{}^* - 13.2C_{\alpha\beta}{}^* -$$
$$- 3.6L_{\alpha\beta}{}^* + 2.4F_{\alpha\beta}{}^*) + 2.4\Delta_{\alpha\beta}{}^2(3L_{\alpha\beta}{}^* - F_{\alpha\beta}{}^*)], \qquad \alpha \neq \beta$$

Величины $\tau_{\alpha\beta}$ имеют порядок времени установления локального максвелловского распределения в отсутствие внешних сил. Выражение для $\tau_{\alpha\beta}$ представим в виде

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} = \frac{16}{3}n_\beta\left(\frac{1}{2\pi\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2}Q_{\alpha\beta}$$

где величину $Q_{\alpha\beta}$, имеющую размерность площади, можно рассматривать как некоторое эффективное сечение столкновений частиц α и β. Для частиц, взаимодействующих по закону Кулона и в случае других законов взаимодействия, имеем соответственно

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e_\alpha e_\beta\gamma_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}}\right)^2\ln\Lambda_{\alpha\beta}, \qquad Q_{\alpha\beta} = (2\pi\gamma_{\alpha\beta})^{1/2}\Omega_{\alpha\beta}{}^{11}$$

Здесь $\ln\Lambda_{\alpha\beta}$ — кулоновский логарифм, интегралы $\Omega_{\alpha\beta}{}^{lr}$ имеют вид [7]

$$\Omega_{\alpha\beta}{}^{lr} = \left(\frac{2\pi}{\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2}\int v^{2r+3}e^{-v^2}(1-\cos^l\chi_{\alpha\beta})\,b\,db\,dv$$

В случае кулоновского взаимодействия величины $A_{\alpha\beta}{}^* \div L_{\alpha\beta}{}^*$ в формулах (3.5), (3.6) суть числа

$$A_{\alpha\beta}{}^* = B_{\alpha\beta}{}^* = 1, \quad C_{\alpha\beta}{}^* = {}^1/_3, \quad F_{\alpha\beta}{}^* = -{}^1/_3, \quad L_{\alpha\beta}{}^* = -{}^1/_9$$

Для других законов взаимодействия между частицами эти величины будут комбинациями интегралов $\Omega_{\alpha\beta}{}^{lr*} = \Omega_{\alpha\beta}{}^{lr} / \Omega_{\alpha\beta}{}^{11}$, подобранными таким образом, чтобы для твердых упругих шариков они все равнялись единице

$$A_{\alpha\beta}{}^* = {}^1/_2\Omega_{\alpha\beta}{}^{22*}, \quad B_{\alpha\beta}{}^* = {}^5/_3\Omega_{\alpha\beta}{}^{12*} - {}^1/_3\Omega_{\alpha\beta}{}^{13*}, \quad C_{\alpha\beta}{}^* = {}^1/_3\Omega_{\alpha\beta}{}^{12*}$$
$$F_{\alpha\beta}{}^* = {}^1/_3\Omega_{\alpha\beta}{}^{23*} - {}^5/_6\Omega_{\alpha\beta}{}^{22*}, \qquad L_{\alpha\beta}{}^* = {}^2/_9\Omega_{\alpha\beta}{}^{13*} - {}^5/_9\Omega_{\alpha\beta}{}^{12*}$$

Соотношения (3.1)—(3.3) образуют систему алгебраических уравнений, позволяющую определить величины π^α, J_α, h_α как функции введенных в п. 1 определяющих параметров и их производных. Подобного рода системы рассматривались в работах [9–11] в предположении, что членами с электрическим полем в уравнениях (3.2) и (3.3) можно пренебречь. При этом учитывалось магнитное поле. Легко видеть, что в таких предположениях уравнения для тензоров напряжений (3.2) не зависят от остальных и могут решаться отдельно. Наличие сильного электрического поля связывает уравнения (3.1)—(3.3) друг с другом, и их приходится решать совместно.

Определим сначала тензоры напряжений из уравнений (3.2)

$$\pi_{ij}{}^\alpha = -2\eta_\alpha W_{ij} + \sum_\beta \frac{\overset{(1)}{\mu}_{\alpha\beta}}{\tau_\alpha{}^*}W_{ij}{}^\beta$$
$$\eta_\alpha = \sum_\beta \eta_\beta{}^*\frac{|c|_{\beta\alpha}}{|c|}, \qquad \overset{(1)}{\mu}_{\alpha\beta} = \tau_\alpha\tau_\beta{}^*\frac{|c|_{\beta\alpha}}{|c|} \tag{3.7}$$

При этом $|c|$ — определитель с элементами $c_{\alpha\beta}$, $|c|_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\beta\alpha}$ этого определителя. Коэффициент η_α в (3.7) — динамическая вязкость α-компоненты плазмы в отсутствие электрического поля. Подставим (3.7) в уравнение (3.3). Разрешая затем полученное соотношение относительно $h_{\alpha i}$, будем иметь:

$$h_{\alpha i} = -\sum_\beta \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial T_\beta}{\partial x_i} + \sum_\beta \overset{(0)}{\mu}_{\alpha\beta}J_{\beta i} - \overset{(1)}{\varkappa}_\alpha E_jW_{ij} + \sum_\beta \overset{(2)}{\varkappa}_{\alpha\beta}E_jW_{ij}{}^\beta$$

$$\overset{(1)}{\varkappa_\alpha} = \sum_\beta \frac{2e_\beta\tau_\beta{}^*\eta_\beta\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_\beta{}^* m_\beta} \tag{3.8}$$

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\beta{}^* \frac{|f|_{\beta\alpha}}{|f|}, \quad \overset{(0)}{\mu_{\alpha\beta}} = \sum_\gamma \frac{d_{\gamma\beta}\tau_\gamma{}^*\lambda_{\alpha\gamma}}{\lambda_\gamma{}^*}, \quad \overset{(2)}{\varkappa_{\alpha\beta}} = \sum_\gamma \frac{\overset{(1)}{\mu_{\gamma\beta}}\lambda_{\alpha\gamma}e_\gamma}{\lambda_\gamma{}^* m_\gamma}$$

Определитель $|f|$ состоит из элементов $f_{\alpha\beta}$, $|f|_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $f_{\beta\alpha}$ этого определителя. Величины $\lambda_{\alpha\beta}$ суть коэффициенты теплопроводности α-компоненты смеси в отсутствие электрического поля $\mathbf{E}$. Из (3.8) видно, что в общем случае поток тепла α-компоненты пропорционален градиентам температур всех компонент. Используя (3.8), можно получить уравнения для определения $J_{\alpha i}$

$$\sum_\beta \left\{ \left(a_{\alpha\beta} + \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}\overset{(0)}{\mu_{\gamma\beta}} \right) J_{\beta i} + \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\varkappa_{\gamma\beta}} E_j W_{ij}{}^\beta \right\} = \tag{3.9}$$
$$= -\rho_\alpha F_{\alpha i} + \frac{\partial}{\partial x_i} p_\alpha + \sum_\beta \left\{ \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}\lambda_{\gamma\beta}\frac{\partial T_\beta}{\partial x_i} + b_{\alpha\beta}\overset{(1)}{\varkappa_\beta} E_j W_{ij} \right\}$$

Система (3.9), так же, как и исходная система (3.1), линейно зависима, поскольку сумма коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ и сумма коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ по всем α равна нулю. Поэтому для определения $\mathbf{J}_\alpha$ необходимо к (3.9) добавить очевидное равенство

$$\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0 \tag{3.10}$$

Решение системы (3.9), (3.10) удобно искать следующим образом. Исключим из каждого α уравнения (3.9) величину J_α при помощи (3.10). Обозначим

$$\overset{(0)}{a_{\alpha\beta}} = a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\alpha} + \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}(\overset{(0)}{\mu_{\gamma\beta}} - \overset{(0)}{\mu_{\gamma\alpha}})$$

$$\overset{(1)}{a_{\alpha\beta}} = \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}\left(\overset{(2)}{\varkappa_{\gamma\beta}}\frac{e_\beta}{m_\beta} - \overset{(2)}{\varkappa_{\gamma\alpha}}\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)$$

Тогда уравнения (3.9) перепишутся в виде

$$\sum_\beta \left[(\overset{(0)}{a_{\alpha\beta}} + \overset{(1)}{a_{\alpha\beta}}\mathbf{E}^2) J_{\beta i} + \frac{1}{3}\overset{(1)}{a_{\alpha\beta}}(J_{\beta j}E_j)E_i \right] = B_{\alpha i} \tag{3.11}$$

Здесь для сокращения записи правая часть (3.9) обозначена через $B_{\alpha i}$

$$B_{\alpha j} = -n_\alpha e_\alpha{}^* E_i + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{\gamma,\nu} b_{\alpha\gamma}\lambda_{\gamma\nu}\frac{\partial T_\nu}{\partial x_i} + \sum_\beta b_{\alpha\beta}\varkappa_\beta{}^{(1)}E_j W_{ij}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (3.11) на $\mathbf{E}$ и исключая из (3.11) скалярное произведение $\mathbf{J}_\beta\mathbf{E}$, получим уравнения для определения $\mathbf{J}_\beta$. Решение этих уравнений запишем следующим образом:

$$\mathbf{J}_\alpha = \gamma_\alpha \sum_\beta [D_{\alpha\beta}{}^{(2)}\mathbf{B}_\beta{}^\perp + (D_{\alpha\beta}{}^{(2)} + D_{\alpha\beta}{}^{(3)})\mathbf{B}_\beta{}^\parallel] \tag{3.12}$$

разбив векторы $\mathbf{B}_\beta$ на составляющие, параллельные ($\parallel$) и перпендикулярные ($\perp$) направлению электрического поля $\mathbf{E}$. Здесь введены обобщенные коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}{}^{(n)}$

$$D_{\alpha\beta}{}^{(2)} = \frac{|a^{(2)}|_{\beta\alpha} - |a^{(2)}|_{\alpha\alpha}}{\gamma_\alpha |a^{(2)}|}$$

$$D_{\alpha\beta}{}^{(3)} = -\frac{1}{3}\sum_{\nu,\gamma} a_{\nu\gamma}{}^{(1)}\mathbf{E}^2 \frac{|a^{(2)}|_{\nu\alpha}(|a^{(3)}|_{\beta\gamma} - |a^{(3)}|_{\alpha\gamma})}{\gamma_\alpha |a^{(2)}|\,|a^{(3)}|}$$

При этом $a_{\alpha\beta}^{(2)} = a_{\alpha\beta}^{(0)} + a_{\alpha\beta}^{(1)}\mathbf{E}^2$, $a_{\alpha\beta}^{(3)} = a_{\alpha\beta}^{(0)} + (^4/_3)a_{\alpha\beta}^{(1)}\mathbf{E}^2$, $|a^{(n)}|$ — определители с элементами $a_{\alpha\beta}^{(n)}$, $|a^{(n)}|_{\alpha\beta}$ — алгебраические дополнения элементов $a_{\alpha\beta}^{(n)}$ этих определителей.

Таким образом, в случае, когда в уравнениях переноса существенны члены, связанные с электрическим полем, диффузионный перенос массы происходит по-разному вдоль и поперек направления электрического поля. Тензоры напряжений и тепловые потоки содержат члены, пропорциональные $\mathbf{J}_\beta$, поэтому под действием сильного электрического поля анизотропия возникает также в коэффициентах переноса импульса и тепла. Кроме того, в выражениях для потоков вязкого импульса, тепла и диффузии возникают дополнительные члены, связанные с электрическим полем.

Вычислим коэффициенты подвижности заряженных частиц в электрическом поле. Из (3.12) видно, что диффузионный поток массы, обусловленный электрическими силами, равен $\mathbf{J}_{\alpha e} = \rho_\alpha b_\alpha \mathbf{E}$. Таким образом, коэффициент подвижности имеет вид

$$b_\alpha = -\sum_\beta \frac{e_\beta^* n_\beta}{p_\alpha}(D_{\alpha\beta}^{(2)} + D_{\alpha\beta}^{(3)})$$

Выражения (3.7), (3.8) и (3.12) связывают величины π^α, $\mathbf{J}_\alpha$, $\mathbf{h}_\alpha$ с электрическим полем и макроскопическими параметрами плазмы $\mathbf{u}$, ρ_α, T_α и их производными. Все эти соотношения в общем случае многокомпонентной плазмы очень сложны и громоздки. Анализ зависимости полученных выражений от электрического поля можно провести на примере двухкомпонентной смеси, состоящей из одного сорта нейтральных частиц (a) и одного сорта ионов (i). Предположим, что смесь слабо ионизована ($n_i \ll n_a$), так что столкновениями заряженных частиц между собой можно пренебречь. Такую двухкомпонентную газовую смесь можно рассматривать как модель плазмы, в которой имеется избыток заряженных частиц одного знака и в которой вклад от противоположно заряженных частиц в перенос импульса, тепла и заряда несуществен. Будем считать для простоты, что температуры компонент равны ($T_i = T_a = T$).

Опуская промежуточные громоздкие вычисления по формулам (3.7), (3.8) и (3.12), запишем окончательные выражения для суммарного тензора вязких напряжений π, тепловых потоков $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{q}_i$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$.

Суммарный тензор вязких напряжений

$$\pi_{rs} = -2(\eta_a + \eta_i)W_{rs} + (\eta_i / p_i)[(j_r - qu_r)E_s + (j_s - qu_s)E_r - {}^2/_3\delta_{rs}(j_k - qu_k)E_k]$$
$$\eta_a = 0.5p_a\tau_a\xi_a\Delta^{-1}, \qquad \eta_i = 0.5p_i\tau_i\xi_i\Delta^{-1} \tag{3.13}$$

Значения величин τ_a, τ_i, ξ_a, ξ_i, Δ приведены ниже (формулы (3.18)).

Тепловой поток нейтральных частиц

$$q_{ar} = -\lambda_a\frac{\partial T}{\partial x_r} - \mu_a(j_r - qu_r) + \mu_a^*[{}^1/_3(j_k - qu_k)E_kE_r + E^2(j_r - qu_r)] -$$
$$- 2\mu_a^* p_i\xi_i E_k W_{kr} \tag{3.14}$$

Тепловой поток ионов

$$q_{ir} = -\lambda_i\frac{\partial T}{\partial x_r} - \mu_i(j_r - qu_r) + \mu_i^*\left[\frac{1}{3}(j_k - qu_k)E_kE_r + \right.$$
$$\left. + E^2(j_r - qu_r)\right] - 2\mu_i^* p_i\xi_i E_k W_{kr} \tag{3.15}$$

Коэффициенты λ_a, μ_a и μ_a^* в формулах (3.14), (3.15) имеют вид

$$\lambda_a = \frac{2.5kp_a\tau_a^*\xi_a^*}{\Delta_1 m_a}, \quad \lambda_i = \frac{2.5kp_i\tau_i^*\xi_i^*}{\Delta_1 m_i}, \quad \mu_i^* = \frac{0.5e_i\tau_i\tau_i^*}{\Delta\Delta_1 m_i}$$

$$\mu_a = \frac{2.5m_ikT}{m_ae_i} - \frac{10b_1(1-g_1^{**})kTm_i^2\tau_a^*}{\Delta_1 e_i M^2\tau_{ia}}\left(1 + \frac{\rho_i}{\rho_a}\right)$$

$$\mu_i = -\frac{2.5kT}{e_i} + \frac{10b_1(1-g_1^*)kTm_a^2\tau_i^*}{\Delta_1 e_i M^2\tau_{ia}}\left(1 + \frac{\rho_i}{\rho_a}\right), \quad \mu_a^* = \mu_i^*(\xi_i^* - 1)$$

Величины τ_α^*, τ_i^*, ξ_α^*, ξ_i^*, Δ_1, g_1^*, g_1^{**}, b_1, M выписаны ниже (формула (3.18)).

Выражение для плотности электрического тока — закон Ома разделим на две части, вводя составляющие векторов вдоль и поперек направления электрического поля $\mathbf{E}$: ток вдоль поля

$$\mathbf{j}_\parallel = \frac{1}{1+E^2/E_*^2}\left\{qb\mathbf{E} - \frac{b}{c_a}(\nabla_\parallel p_i - c_i\nabla_\parallel p) - qD_t\nabla_\parallel T + qD_v(\mathbf{E}\cdot W)_\parallel\right\} + q\mathbf{u}_\parallel \quad (3.16)$$

Ток поперек поля

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{1}{1+3E^2/4E_*^2}\left\{-\frac{b}{c_a}(\nabla_\perp p_i - c_i\nabla_\perp p) - qD_t\nabla_\perp T + \right.$$

$$\left. + qD_v(\mathbf{E}\cdot W)_\perp\right\} + q\mathbf{u}_\perp \quad (3.17)$$

При этом $\mathbf{E}W$ имеет компоненты E_kW_{kr} вдоль осей координат, $c_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ — массовая концентрация α частиц. Коэффициенты переноса D_t, D_v, b записываются следующим образом:

$$D_t = \frac{10b_1(1-t_1)\xi_a^* k m_i \tau_\alpha^*}{\Delta_1(1-g_1)m_a M}, \qquad D_v = \frac{4b_1(1-g_1^*)\xi_i e_i m_a \tau_i^2}{\Delta(1-g_1)m_i M}$$

$$b = e_i c_a M \tau_{ia} / (1-g_1) m_i m_a$$

Значения g_1, t_1 приведены ниже (3.18). Величину E_*, имеющую размерность напряженности электрического поля, представим в виде

$$E_* = \frac{AkT}{e_i(l_i l_i^*)^{1/2}}, \qquad A^2 = \frac{3\Delta\Delta_1(1-g_1)M}{8b_1(1-g_1^*)m_a}$$

Здесь $l_i = v_i\tau_i$, $l_i^* = v_i\tau_i^*$, $v_i = (kT/m_i)^{1/2}$. Можно показать, что величины v_i, τ_i имеют соответственно порядок тепловой скорости и времени свободного пробега ионов ($\tau_i^* \sim \tau_i$). Поэтому $(l_i l_i^*)^{1/2}$ порядка длины свободного пробега l заряженных частиц. Коэффициент $A \sim 1$. Взяв E, равное по величине E_*, будем иметь $e_iEl/kT \sim 1$. Так как e_iEl — суть энергия, получаемая ионом заряда e_i от электрического поля на длине свободного пробега l, то электрическое поле напряженности E_* изменяет энергию иона на длине свободного пробега на величину порядка тепловой энергии. Если рассматриваемые электрические поля по величине порядка E_*, то, как видно из (3.16) и (3.17), коэффициенты диффузии вдоль поля отличаются от коэффициентов диффузии поперек поля, например обобщенные коэффициенты подвижности вдоль и поперек поля

$$b_\parallel = b(1+E^2/E_*^2)^{-1}, \qquad b_\perp = b(1+3E^2/4E_*^2)^{-1}$$

Видно, что с увеличением E диффузионные коэффициенты уменьшаются. Подставляя соотношения для плотности электрического тока (3.16) и (3.17) в выражения (3.13) — (3.15) для тензора напряжений и тепловых потоков и вычисляя коэффициенты перед девиатором тензора скоростей деформаций W и градиентом температуры, можно видеть, что коэффициенты вязкости и теплопроводности также зависят от электрического поля и эти зависимости различны для переноса импульса и тепла вдоль и поперек электрического поля. Сравнивая в уравнениях (3.13) — (3.17) члены с электрическим полем вида E_kW_{kr}, E_kJ_r с остальными, можно показать, что их величина имеет порядок E/E_* по отношению к другим членам. Таким образом, эти члены существенны лишь в сильных электрических полях.

Если рассматриваемые электрические поля удовлетворяют неравенству $E / E_* \ll 1$, то анизотропией коэффициентов переноса и дополнительными членами вида $E_k W_{kr}$, $E_k j_r$ в выражениях для тензоров вязких напряжений, тепловых потоков и плотности тока можно пренебречь.

Ниже выписывается сводка всех обозначений, использованных в выражениях для коэффициентов переноса

$$
\begin{gathered}
\tau_a^{-1} = 0.3A_{aa}^*\tau_{aa}^{-1} + (\mu / M)(1 + 0.6A_{ai}^* m_i / m_a)\tau_{ai}^{-1} \\
\frac{1}{\tau_a^*} = \frac{0.4A_{aa}^*}{\tau_{aa}} + \frac{\mu m_i}{M^2\tau_{ai}}\left(3\frac{m_a}{m_i} + 2.5\frac{m_i}{m_a} + 1.6A_{ai}^* - 1.2B_{ai}^*\frac{m_i}{m_a}\right) \\
\tau_i^{-1} = (\mu / M)c_1'\tau_{ia}^{-1}, \qquad \tau_i^{*-1} = (\mu m_a / M^2) f_1'\tau_{ia}^{-1} \\
\xi_a = 1 + (4\mu / M)c_1\tau_i\tau_{ai}^{-1}, \qquad \xi_i = 1 + (4\mu / M)c_1\tau_a\tau_{ia}^{-1} \\
\xi_a^* = 1 + (8\mu m_a / M^2) f_1\tau_i^*\tau_{ai}^{-1}, \qquad \xi_i^* = 1 + (8\mu m_i / M^2) f_1\tau_a^*\tau_{ia}^{-1} \\
\Delta = 1 - \left(4\frac{\mu}{M}\right)^2 c_1^2\frac{\tau_a\tau_i}{\tau_{ai}\tau_{ia}}, \qquad \Delta_1 = 1 - \left(4\frac{\mu}{M}\right)^3 f_1^2\frac{\tau_i^*\tau_a^*}{\tau_{ai}\tau_{ia}} \\
g_1 = \frac{5b_1^2}{\Delta_1}\left[\left(2\frac{m_a}{M}\right)^3\frac{\tau_i^*}{\tau_{ia}} + \left(2\frac{m_i}{M}\right)^3\frac{\tau_a^*}{\tau_{ai}} - 2\left(4\frac{\mu}{M}\right)^3 f_1\frac{\tau_a^*\tau_i^*}{\tau_{ia}\tau_{ai}}\right] \\
g_1^* = 8(m_i / M)^3 f_1\tau_a^*\tau_{ai}^{-1}, \qquad g_1^{**} = 8(m_a / M)^3 f_1\tau_i^*\tau_{ia}^{-1} \\
t_1 = \xi_i^* m_a^2\tau_i^* / \xi_a^* m_i^2\tau_a^*, \qquad \mu = m_i m_a / M, \qquad M = m_i + m_a \\
b_1 = 0.25(1.2C_{ia}^* - 1), \qquad c_1 = 0.25(1 - 0.6A_{ia}^*) \\
c_1' = (1 + 0.6A_{ia}^* m_a / m_i), \qquad f_1 = 0.125(5.5 - 1.6A_{ia}^* - 1.2B_{ia}^*) \\
f_1' = 3(m_i / m_a) + 2.5(m_a / m_i) + 1.6A_{ia}^* - 1.2B_{ia}^*(m_a / m_i)
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Выражения для коэффициентов переноса упрощаются, если степень ионизации $n_i / n_a \lesssim 10^{-5} \div 10^{-6}$. При этом

$$
\begin{gathered}
\Delta_1 = \Delta = 1, \qquad 1 - g_1 \approx 1, \qquad 1 - g_1^* \approx 1 \\
\xi_a = \xi_a^* = 1, \qquad \tau_a^* = \tau_{aa} / 0.4A_{aa}^*, \qquad \tau_a = \tau_{aa} / 0.3A_{aa}^*
\end{gathered}
$$

Отметим, что если плотности заряженных частиц разных знаков одного порядка, то в слабых электрических полях $(E / E_* \ll 1)$ можно использовать коэффициенты переноса, полученные в работах [9–11], положив в них $\mathbf{H} = 0$.

4. Сила трения и обмен энергией между компонентами при столкновениях частиц. Выражения для силы трения $R_{ai}^{(1)}$ и величины $R_\alpha^{(2)}$, характеризующей обмен энергией между компонентами при столкновениях частиц, существенно зависят от вида функций распределения, использующихся при вычислении этих величин. Для функций распределения f_α, близких к локальным максвелловским функциям

$$
f_\alpha^{(0)} = n_\alpha(\gamma_\alpha / 2\pi)^{3/2}\exp\left[-0.5\gamma_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2\right]
$$

построенным по средней массовой скорости смеси, сила трения $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ пропорциональна разности макроскопических скоростей компонент и градиентам температур. Например, для 13-моментного представления f_α, которое использовалось в п. 3 (см. формулу (1.7) работы [12]), сила трения $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ имеет вид левой части уравнения (3.1). Из этого выражения видно, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ при $\mathbf{J}_\beta$ и $\mathbf{h}_\beta$ суть функции температур и плотностей и не зависят от разности макроскопических скоростей компонент. Величина обмена энергией при столкновениях пропорциональна разности температур компонент и имеет вид [10, 12]

$$
R_\alpha^{(2)} = \sum_\beta r_{\alpha\beta}(T_\beta - T_\alpha), \qquad r_{\alpha\beta} = \frac{3\mu_{\alpha\beta} n_\alpha k}{(m_\alpha + m_\beta)\tau_{\alpha\beta}}
$$

Смысл всех обозначений тот же, что и выше. Коэффициент пропорциональности $r_{\alpha\beta}$ также зависит только от плотностей и температур.

В некоторых случаях возможны режимы течения, в которых макроскопические скорости компонент значительно отличаются друг от друга, например в результате воздействия на заряженную компоненту сильного электрического поля. Функции распределения компонент в таких течениях, вообще говоря, могут существенно отличаться от f_α. Более точно описывают такие течения, по-видимому, функции распределения, близкие к максвелловским, построенным по макроскопическим скоростям компонент, например, функции распределения вида

$$f_\alpha^* = f_\alpha^{(0)*}\left[1 + \frac{\gamma_\alpha}{2p_\alpha}\pi_{ij}{}^\alpha c_i{}^* c_j{}^* + \frac{\gamma_\alpha}{5p_\alpha}(\gamma_\alpha c^{2*} - 5)\, q_{\alpha i} c_i{}^*\right] \tag{4.1}$$

Здесь

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha, \qquad f_\alpha^{(0)*} = n_\alpha(\gamma_\alpha / 2\pi)^{3/2} \exp(-0.5\gamma_\alpha c^{*2})$$

$f_\alpha^{(0)*}$ — локальная максвелловская функция распределения, построенная по средней массовой скорости компоненты. Результаты вычислений величин $\mathbf{R}^{(1)*}$ и $R_\alpha^{(2)*}$ с использованием интегралов столкновений Больцмана и функций (4.1) дают

$$R_\alpha^{(1)*} = \sum_\beta [a_{\alpha\beta}{}^* \rho_\beta (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) + b_{\alpha\beta}{}^* \mathbf{q}_\beta]$$

$$R_\alpha^{(2)*} = \sum_\beta [r_{\alpha\beta}{}^* (T_\beta - T_\alpha) + t_{\alpha\beta}{}^* (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha)^2]$$

При этом коэффициенты $a_{\alpha\beta}{}^*$, $b_{\alpha\beta}{}^*$, $r_{\alpha\beta}{}^*$, $t_{\alpha\beta}{}^*$ являются весьма громоздкими функциями масс m_ν, плотностей ρ_ν, температур T_ν компонент, и, кроме того, они зависят также от разности скоростей $|\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha|$. Приведем здесь выражения для коэффициентов $a_{\alpha\beta}{}^*$, $r_{\alpha\beta}{}^*$, $t_{\alpha\beta}{}^*$

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}{}^* &= \frac{8\mu_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{\rho_\beta s_{\alpha\beta}{}^2}\psi_{\alpha\beta}{}^{(1)} \exp\left(-\frac{s_{\alpha\beta}{}^2}{2}\right) \\ r_{\alpha\beta}{}^* &= \frac{16\mu_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta k}{m_\alpha + m_\beta}\psi_{\alpha\beta}{}^{(2)} \exp\left(-\frac{s_{\alpha\beta}{}^2}{2}\right) \\ t_{\alpha\beta}{}^* &= \frac{8\mu_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_\alpha s_{\alpha\beta}{}^2}\psi_{\alpha\beta}{}^{(1)} \exp\left(-\frac{s_{\alpha\beta}{}^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $s_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}{}^{1/2}|\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha|$ — безразмерная макроскопическая относительная скорость компонент, причем по порядку величины $s_{\alpha\beta} \sim |\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha| / v_t$, где v_t — максимальная из тепловых скоростей частиц сортов α, β, поскольку $\gamma_{\alpha\beta}{}^{-1} \sim (v_{\alpha t}{}^2 + v_{\beta t}{}^2)$, $v_{\nu t}$ — средняя тепловая скорость частиц ν-сорта. Функции $\psi_{\alpha\beta}{}^{(1)}$, $\psi_{\alpha\beta}{}^{(2)}$ имеют вид

$$\psi_{\alpha\beta}{}^{(1)} = \left(\frac{2\pi}{\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-v^2} v^3 \left[\operatorname{ch}(\sqrt{2}\, sv) - \frac{1}{\sqrt{2}\, sv}\operatorname{sh}(\sqrt{2}\, sv)\right] \sigma_{\alpha\beta}\, dv, \qquad s = s_{\alpha\beta}$$

$$\psi_{\alpha\beta}{}^{(2)} = \left(\frac{2\pi}{\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-v^2} v^5 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\, sv)}{\sqrt{2}\, sv}\sigma_{\alpha\beta}\, dv, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \int (1 - \cos\chi_{\alpha\beta})\, b\, db$$

Если $s_{\alpha\beta} \leqslant 1$, то коэффициенты $a_{\alpha\beta}{}^*$, $r_{\alpha\beta}{}^*$, $b_{\alpha\beta}{}^*$ совпадают по величине с коэффициентами $a_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$. Это нетрудно видеть, разложив $a_{\alpha\beta}{}^*$, $r_{\alpha\beta}{}^*$ в ряд по степеням s. В самом деле, для коэффициента $a_{\alpha\beta}{}^*$ при $s \lessapprox 1$ имеем

$$a_{\alpha\beta}{}^* = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta \tau_{\beta\alpha}} e^{-1/2 s^2}\left[1 + \frac{s^2}{5}\Omega_{\alpha\beta}{}^{12*} + \frac{s^4}{70}\Omega_{\alpha\beta}{}^{13*} + \frac{s^6}{30\,240}\Omega^{\alpha\beta 14*} + \ldots\right] \tag{4.3}$$

Для модели частиц в виде твердых упругих шариков $\Omega_{\alpha\beta}{}^{12*} = 3$, $\Omega_{\alpha\beta}{}^{13*} = 12$, $\Omega_{\alpha\beta}{}^{14*} = 60$. Подставляя эти значения в (4.3) и сравнивая $a_{\alpha\beta}{}^*$ с $a_{\alpha\beta}$ при $s = 1$, получим $a_{\alpha\beta}{}^* / a_{\alpha\beta} = 1.07$.

Таким образом, если относительная макроскопическая скорость компонент удовлетворяет условию $|\mathbf{u} X \mathbf{u}_\beta|\gamma_{\alpha\beta}{}^{1/2} \leqslant 1$, то функции распределения f_α и $f^{\alpha*}$ дают близкие результаты для силы трения $R_\alpha^{(1)}$ и обмена энергией между компонентами при столкновениях частиц $R_\alpha^{(2)}$.

Сравним теперь величины $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ и $\mathbf{R}_\alpha^{(1)*}$ при больших $s_{\alpha\beta}$. Очевидно, $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ пропорционально первой степени $s_{\alpha\beta}$, так как коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ не зависят от $s_{\alpha\beta}$. Вычислим функции $\psi_{\alpha\beta}^{(n)}$ для твердых упругих шариков. Имеем

$$\psi_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\pi(r_\alpha + r_\beta)^2}{\gamma_{\alpha\beta}^{1/2}}\left[\frac{s^4+2s^2-1}{2s}\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)e^{0.5s^2} + \frac{1+s^2}{\sqrt{2\pi}}\right], \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$\psi_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{\pi(r_\alpha + r_\beta)^2}{\gamma_{\alpha\beta}^{1/2}}\left[\frac{s^4+6s^2+3}{4s}\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)e^{0.5s^2} + \frac{5+s^2}{2\sqrt{2\pi}}\right] \tag{4.4}$$

Здесь r_α, r_β — радиусы шариков, $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Используя (4.2) и (4.4) нетрудно видеть, что при $s \to \infty$ коэффициент $a_{\alpha\beta}^* \sim s_{\alpha\beta}$, коэффициент $r_{\alpha\beta} \sim s_{\alpha\beta}^3$ для модели частиц в виде твердых упругих шариков. Следовательно, функции распределения вида (4.1) дают более сильную зависимость силы трения и обмена энергией между компонентами от разности макроскопических скоростей при больших $s_{\alpha\beta}$.

Отметим, что (4.1) позволяет, по-видимому, получить лишь качественную зависимость $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ и $R_\alpha^{(2)}$ от $|\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha|$. Для точного вычисления этих величин необходимо решить задачу об определении функций распределения компонент в условиях, когда $s > 1$ из исходной системы кинетических уравнений.

5. Слабые разрывы в электрогидродинамике. Рассмотрим поверхности слабого разрыва в совершенном невязком нетеплопроводном газе. Эти поверхности являются характеристиками системы уравнении электрогидродинамики.

Пусть на слабом разрыве нарушается непрерывность производных по t и x (ось x направляем по нормали к поверхности разрыва). Записывая систему уравнений электрогидродинамики (1.7), (1.9) — (1.11), по обе стороны от слабого разрыва и вычитая друг из друга получившиеся уравнения, будем иметь

$$\frac{bE_x - a}{q}\left\{\frac{\partial q}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0, \qquad -a\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} + \rho\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0$$

$$-a\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\} = 0, \qquad a\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0 \tag{5.1}$$

$$a\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} = 0, \qquad aa_0^2\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\} = 0$$

$$\left\{\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{\partial E_y}{\partial x}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{\partial E_z}{\partial x}\right\} = 0$$

При этом u, v, w — составляющие скорости среды, $a_0 = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ — газодинамическая скорость звука, a — скорость движения разрыва относительно среды, фигурными скобками обозначена разность производных по обе стороны поверхности разрыва. В первом из уравнений (5.1) (уравнении сохранения заряда) использовано соотношение (2.6) для плотности тока $j_x = q(u + bE_x)$. Приравнивая нулю определитель системы (5.1), получим следующие возможные значения для скорости движения разрыва относительно среды:

$$a_1 = 0, \qquad a_{2,3} = \pm a_0, \qquad a_4 = bE_x$$

На слабом разрыве, который распространяется относительно среды со скоростью a_4, терпят разрыв только производные плотности заряда q и производные составляющих плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Нетрудно показать, что этот разрыв движется вместе с заряженными частицами. Разрывы, распространяющиеся со скоростями $a_{1,2,3}$, такие же, как в обычной гидродинамике. Отметим, что на всех разрывах производные составляющих электрического поля непрерывны.

Поступило 13 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuetzer O. M. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5.
2. Копылов Г. Н. Ламинарное течение заряженной жидкости в плоской трубе под действием внешнего электростатического поля. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 11.
3. Бортников Ю. С., Рубашов И. Б. Некоторые вопросы исследования системы уравнений электрогазодинамики. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.

4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
5. Marks A., Barreto E., Cu C. K. Charged aerosol converter. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1. (Рус. перев.: Преобразователь энергии на заряженных аэрозолях. Ракетная техника и космонавтика, 1964, 1.)
6. Cox A. Colloidal electrohydrodynamic energy converter. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 11. (Рус. перев.: Электрогидродинамический преобразователь энергии на коллоидных частицах. Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 11.)
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Полянский В. А. Об уравнениях движения двухтемпературной частично ионизованной плазмы. Материалы 5-го рижского совещания по магнитной гидродинамике, Рига, 1966, вып. 1.
9. Алиевский М. Я., Жданов В. М., Полянский В. А. Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двухтемпературном частично ионизованном газе. ПМТФ, 1964, № 3.
10. Полянский В. А. Диффузия и проводимость в частично ионизованной многотемпературной газовой смеси. ПМТФ, 1964, № 5.
11. Пекуровский Л. Е. Коэффициенты переноса для частично ионизованной двухтемпературной плазмы с разными массами ионов и нейтральных частиц. ПМТФ, 1967, № 3.
12. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы. ПМТФ, 1963, № 5.
13. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы, М., Госатомиздат, 1963, вып. 1.
14. Corstoiu J. Sur quelques points de l'electrodynamique de milieux continus en mouvement. C. R. Acad. Sc. Paris, 1964, vol. 258, No. 4, p. 1163.
15. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Исследование электрогидродинамических течений при больших электрических числах Рейнольдса. ПМТФ, 1969, № 1.
16. Боярский Г. Н. Электрогидродинамическое ламинарное течение униполярно заряженного диэлектрика в круглой трубе. В сб. «Гидроаэромеханика», Харьков, Изд-во Харьк. ун-та 1967, вып. 5.