СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ ПАРАМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. ЗАЙЦЕВ, М. И. ШЛИОМИС

(*Пермь*)

Рассмотрено распространение малых возмущений в парамагнитной проводящей жидкости, находящейся в однородном постоянном магнитном поле. Из-за связи механических и магнитных движений возникают в определенной (резонансной) области частот связанные магнитозвуковые колебания, имеющие волновой характер. Вдали от резонанса имеют место обычные магнитогидродинамические волны и однородные колебания намагниченности. Учтено влияние диссипативных процессов.

В работе [1] были получены уравнения движения проводящей парамагнитной жидкости, в которых феноменологическим путем учтено взаимодействие гидродинамической скорости с намагниченностью и магнитным полем. Одно из следствий этого взаимодействия — распространение связанных магнитоупругих волн в такой среде — рассмотрено в данной работе.

1. Рассмотрим распространение малых возмущений в однородной парамагнитной проводящей жидкости, находящейся в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$. Уравнения движения такой жидкости получены в [1]

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla\left[p+\frac{\mathbf{M}}{\varkappa}\quad-\quad\varkappa\mathbf{B})+\frac{\mathbf{BH}}{8\pi}\right]+$$

$$+\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{H}+\eta\nabla^2\mathbf{v}+\frac{1}{2\gamma\tau}\operatorname{rot}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{M}=\gamma(\mathbf{M}\times\mathbf{B})-\mathbf{M}\operatorname{div}\mathbf{v}-\frac{1}{\tau}\qquad(1.1)$$

$$-D_1\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})+D_2\nabla\operatorname{div}\mathbf{M}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H},\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0\qquad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$$

Здесь $\varkappa$ — магнитная восприимчивость, γ — гиромагнитное отношение, D_1 и D_2 — коэффициенты магнитной диффузии, τ — время релаксации намагниченности. В уравнениях (1.1) локальная релаксация магнитного момента взята в упрощенном (блоховском) виде, что типично для жидких парамагнетиков [2].

Невозмущенное состояние среды характеризуется постоянными равновесными значениями $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{M}_0=\varkappa\mathbf{B}_0$, ρ_0, p_0. Обозначим через $\mathbf{m}$, $\mathbf{b}$, ρ' и p' малые отклонения намагниченности, магнитной индукции, плотности и давления от равновесных значений; малой того же порядка является и скорость $\mathbf{v}$. Опуская все диссипативные члены в системе (1.1) запишем линеаризованные по малым возмущениям уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' - \nabla \left[\frac{\mathbf{B}_0\mathbf{m}}{2} + \frac{\mathbf{B}_0\mathbf{b}}{4\pi}(1-6\pi\varkappa)\right] + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0\nabla)(\mathbf{b}-4\pi\mathbf{m})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0), \qquad \operatorname{div}\mathbf{b} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{m} - \varkappa\mathbf{b}) - \varkappa\mathbf{B}_0 \operatorname{div}\mathbf{v} \tag{1.3}$$

Если пренебречь взаимодействием намагниченности с гидродинамическим движением, положив $\mathbf{m} = \varkappa = 0$ в уравнениях (1.2) и $\mathbf{v} = 0$ в уравнении (1.3), то выписанная выше система распадается так, что (1.2) описывают обычные магнитогидродинамические волны (см. [3]), а (1.3) — однородные колебания намагниченности с частотой $\omega_B = \gamma B_0$. В этом приближении для правильного описания пространственно неоднородных изменений намагниченности необходимо сохранить в уравнениях (1.1) диссипативные члены, что приводит к решениям диффузионного типа.

Наличие связи $\mathbf{m}$ с $\mathbf{v}$ в уравнениях (1.2)—(1.3) делает возможным распространение волн намагниченности, по крайней мере, в некотором интервале частот.

В соответствии со сказанным, будем искать решение уравнений в виде плоской волны $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$. Исключая p' с помощью соотношения $p' = u_0^2\rho'$, где u_0 — скорость звука в отсутствии поля, получим

$$\rho\left[\omega^2\mathbf{v} - u_0^2\mathbf{k}(\mathbf{kv})\right] = \omega\mathbf{k}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{Bm}) + \frac{\mathbf{Bb}}{4\pi}(1-6\pi\varkappa)\right] - \frac{\omega}{4\pi}(\mathbf{kB})(\mathbf{b}-4\pi\mathbf{m})$$

$$\omega\mathbf{b} = \mathbf{k}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{v}), \qquad (\mathbf{kb}) = 0$$

$$i\omega\mathbf{m} = \gamma\mathbf{B}\times(\mathbf{m}-\varkappa\mathbf{b}) + i\varkappa\mathbf{B}(\mathbf{kv}) \tag{1.4}$$

Здесь и ниже для упрощения обозначений опущен индекс 0 у равновесных значений плотности и магнитной индукции. Направим волновой вектор $\mathbf{k}$ вдоль оси z; приложенное поле лежит в плоскости (xz) и образует с осью z угол ϑ.

Так как намагниченность жидкости всегда мала ($\varkappa \ll 1$), то в дисперсионном соотношении, получающемся из (1.4), достаточно сохранить только линейные по $\varkappa$ члены

$$(\omega^2-\omega_B^2)(\omega^2-\omega_z^2)\left[(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_z^2)-\omega^2\omega_x^2\right] = \\ = 4\pi\varkappa[P(\omega)+Q(\omega)+R(\omega)] \tag{1.5}$$

Здесь

$$\omega_0 = u_0 k, \qquad \omega_B = \gamma B, \qquad \omega_x = \frac{kB_x}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \omega_z = \frac{kB_z}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$P(\omega) = \omega^4\omega_B^2\omega_z^2\sin^2\vartheta$$

$$Q(\omega) = \omega_B^2\omega_z^2(1+\cos^2\vartheta)\left[(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_z^2)-\omega^2\omega_x^2\right]$$

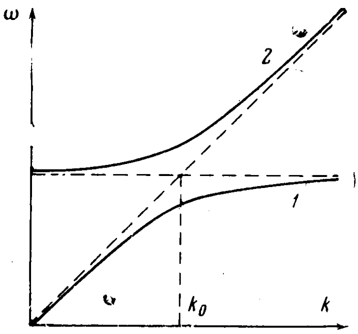
$$R(\omega) = {}^1/_2(\omega^2-\omega_B^2)(\omega^2-\omega_z^2)\left[\omega^2(3\omega_z^2+\omega_x^2)-3\omega_z^2(\omega_x^2+\omega_z^2)\right]$$

В отсутствие взаимодействия намагниченности с механическим движением (чему формально соответствует $\varkappa = 0$) дисперсионное уравнение расцепляется и описывает однородные колебания намагниченности с частотой ω_B, альфвеновские волны с частотой ω_z и связанные магнитогидродинамические волны, частоты которых определяются из уравнения

$$(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_z^2) = \omega^2\omega_x^2$$

2. Четыре колебательные ветви, описываемые уравнением (1.5), связаны между собой в меру $\varkappa$, так что связь эта слаба. Поэтому наибольшего эффекта следует ожидать в условиях резонанса, когда частоты каких-либо двух ветвей совпадают; при этом связь будет порядка $\sqrt{\varkappa}$. Формально можно было бы рассмотреть резонанс колебаний намагниченности как со звуковыми, так и с альфвеновскими волнами. В последнем случае резонансное условие $\omega_B = \omega_z$ приводит к следующему значению для волнового числа:

$$k = \gamma\sqrt{4\pi\rho} / \cos\vartheta \tag{2.1}$$



Фиг. 1

Гиромагнитное отношение γ порядка 10^4 для ядерного магнетизма и 10^7 для электронного (в системе CGS). Для плотных жидкостей из (2.1) получаются слишком большие значения k, которые не могут быть реализованы из-за сильного затухания альфвеновских волн. Рассмотрение же ионизованных газов (плазма) не представляет интереса из-за малости объемной восприимчивости $\varkappa$. Поэтому следует рассмотреть только резонанс звуковых и блоховских колебаний ($\omega_0 \approx \omega_B$), причем $\omega_0, \omega_B \gg \omega_x, \omega_z$.

В (1.5) пренебрегаем ω_x, ω_z, по сравнению с ω; вблизи резонанса получим

$$\omega^4(\omega^2 - \omega_s^2)(\omega^2 - \omega_B^2) = 4\pi\varkappa(P + Q + R) \tag{2.2}$$

$$\omega_S = uk, \qquad u^2 = u_0^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho}\sin^2\vartheta$$

Здесь u — скорость звука при наличии магнитного поля. В рассматриваемой (резонансной) области частот $\omega \approx \omega_s \approx \omega_B$, поэтому слагаемые $Q(\omega)$ и $R(\omega)$ в правой части (2.2) малы по сравнению с $P(\omega)$, и могут быть опущены. В результате получим

$$(\omega^2 - \omega_s^2)(\omega^2 - \omega_B^2) = \varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 \equiv (\varkappa / \rho) k^2 B^2 \omega_B^2 \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta. \tag{2.3}$$

Отсюда

$$\omega^2 = {}^1/_2\{\omega_s^2 + \omega_B^2 \pm \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2}\} \tag{2.4}$$

Из последней формулы видно, что в области волновых векторов, при которых $|\omega_s^2 - \omega_Б^2| \gtrsim 2\varepsilon$, звуковая и магнитная ветви слабо деформированы

$$\omega_1^2 = \omega_s^2 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_s^2 - \omega_B^2}, \qquad \omega_2^2 = \omega_B^2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_s^2 - \omega_B^2} \tag{2.5}$$

На фиг. 1 изображен примерный ход ветвей связанных магнитозвуковых волн. При $k < k_0$, где $k_0 = \omega_B / u$, определяется из условия $\omega_s = \omega_B$, ветвь *1* соответствует звуковой, а ветвь *2* — магнитной волне; при $k > k_0$ — наоборот. «Перепутывание» магнитной и звуковой ветвей происходит в узкой области волновых чисел в окрестности k_0, для которых $|\omega_s^2 - \omega_B^2| \lesssim 2\varepsilon$. В самой точке k_0 из (2.4) находим

$$\omega_1 = \omega_B\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\omega_B^2}\right), \qquad \omega_2 = \omega_B\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_B^2}\right) \tag{2.6}$$

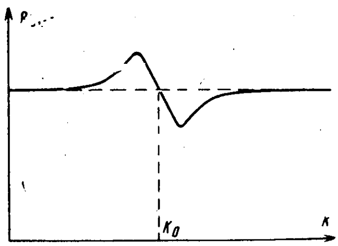
так что $\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = \varepsilon / \omega_B$. Подставляя $k = k_0$ в формулу для ε, получим выражение для относительной ширины области перепутывания

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \sqrt{4\pi\varkappa}\left(\frac{u_A}{u}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad u_A \equiv \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{2.7}$$

В этой области наблюдается заметная дисперсия частоты для обеих ветвей (фиг. 1), так что можно говорить о волновом характере распространения магнитных возмущений (спиновые волны).

Следует указать, что связь магнитных и звуковых колебаний имеет место и в непроводящей жидкости, однако в этом случае она гораздо слабее. Вычисления приводят к дисперсионному уравнению (2.3), но с другой константой связи: в случае непроводящей жидкости правая часть этого уравнения должна быть умножена на малую величину $32\pi^2\varkappa^2$.

3. Исследуем влияние диссипативных процессов на характер распространения связанных магнитозвуковых волн. Вдали от области резонанса, где нет связи звуковых и магнитных колебаний, каждый из этих типов колебаний затухает с собственным инкрементом. Затухание звука обусловлено вязкостью и конечной электропроводностью σ



Фиг. 2

$$\Gamma_1 = \Gamma_\eta + \Gamma_\lambda$$
$$\Gamma_\eta = \frac{\eta k^2}{2\rho}, \qquad \Gamma_\lambda = \frac{\lambda k^2 u_x^2}{u^2 + \lambda^2 k^4} \tag{3.1}$$
$$\left(\lambda \equiv \frac{c^2}{4\pi\sigma},\ u_x \equiv \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)$$

Для магнитных колебаний необходимо учитывать релаксацию и магнитную диффузию

$$\Gamma_2 = \Gamma_\tau + \Gamma_D, \qquad \Gamma_\tau = \tau^{-1}, \qquad \Gamma_D = Dk^2 \tag{3.2}$$

(Последняя формула получается из (1.1), если положить $D_1 = D_2 \equiv D$). В интересующей нас резонансной области дисперсионное соотношение, полученное аналогично (2.4), но с учетом диссипативных членов в уравнениях (1.1), имеет вид

$$\omega^2 = {}^1\!/_2\{(\omega_s - i\Gamma_1)^2 + (\omega_B - i\Gamma_2)^2 \pm \sqrt{[(\omega_s - i\Gamma_1)^2 - (\omega_B - i\Gamma_2)^2]^2 + 4\varepsilon^2}\} \tag{3.3}$$

При $\omega_s = \omega_B$ последняя формула дает

$$\omega^2 = \omega_B^2 - i\omega_B(\Gamma_1 + \Gamma_2) \pm \omega_B\sqrt{\varepsilon^2/\omega_B^2 - (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2} \tag{3.4}$$

Если инкременты Γ_1 и Γ_2 сильно отличаются друг от друга, так что $\omega_B|\Gamma_1 - \Gamma_2| > \varepsilon$, то, как видно из (3.4), где под корнем теперь стоит отрицательная величина, перепутывания звуковой и магнитной ветвей не происходит. Наличие связи ε приводит лишь к изменению инкрементов. Из (3.3) получается в этом случае стандартная резонансная формула для поглощения

$$\Gamma_s = \Gamma_1 - \frac{\varepsilon^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}$$
$$\Gamma_M = \Gamma_2 + \frac{\varepsilon^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2} \tag{3.5}$$

В другом предельном случае $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$, так что

$$\omega_B \Delta\Gamma < \varepsilon \qquad (\Delta\Gamma \equiv |\Gamma_1 - \Gamma_2|) \tag{3.6}$$

сохраняются результаты п. 2, относящиеся к перепутыванию колебательных ветвей.

4. Выясним условия, при выполнении которых возмущения намагниченности имеют волновой характер, а также установим область существования волнового решения. Очевидно, о магнитных волнах можно говорить лишь в том случае, если вещественная часть групповой скорости этих волн гораздо больше мнимой ее части. При выполнении условия (3.6) существует область перепутывания магнитной и звуковой ветвей, ширина которой $\Delta\omega$ порядка ε / ω_B. В этой области волновое решение всегда существует, однако указанное условие является весьма жестким из-за малости ε. Покажем, что при малом коэффициенте магнитной диффузии область существования волнового решения может оказаться более широкой. При $\omega_B \Delta\Gamma > \varepsilon$ формула (3.3) дает для частоты магнитной волны

$$\omega = \omega_B \left\{1 - \frac{\varepsilon^2(\omega_s^2 - \omega_B^2)}{\omega_B^2[\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2]}\right\} - i\left\{\Gamma_2 + \frac{\varepsilon^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}\right\} \tag{4.1}$$

Вещественная часть этого выражения как функция волнового числа показана на фиг. 2. Находя из (4.1) групповую скорость $w = \partial\omega / \partial k$ и учитывая выражение (3.2) для Γ_2, получим условие $\operatorname{Re} w \gg \operatorname{Im} w$ в виде

$$\omega_B \Delta\Gamma \ll \varepsilon \frac{u}{2\sqrt{\omega_B D}} \tag{4.2}$$

Частотная область существования волнового решения в этом случае

$$\Delta\omega \approx \Delta\Gamma.$$

Условие (4.2) является менее жестким, чем указанное ранее (3.6), если $u(\omega_B D)^{-1/2} \gg 1$, что всегда выполняется для ядерных парамагнетиков [2]. Для электронных парамагнетиков это неравенство имеет место при малой концентрации носителей тока [4].

Поступило 24 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапошников И. Г., Шлиомис М. И. Уравнения магнитной гидродинамики парамагнитных сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
2. Абрагам А. Ядерный магнетизм. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1957.
4. Альтшулер С. А., Козырев Б. М. Электронный парамагнитный резонанс. М., Физматгиз, 1961.