

О НЕСТАЦИОНАРНОМ СТРУЙНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. ВУЛИС, А. Л. ГЕНКИН, Н. П. МУРАХВЕР, Л. П. ЯРИН

(Ленинград)

В рамках теории пограничного слоя получено решение задачи о нестационарном течении, созданном плоской струей — источником при заданном законе изменения во времени потока импульса. Рассмотрены частные случаи аperiodического и периодического изменения импульса. Для последнего указана качественная аналогия с турбулентным движением.

1. Исследованию нестационарного ламинарного пограничного слоя посвящено сравнительно малое число работ [1, 2]. Известны, в частности, попытки построения автомодельных течений [3] и наиболее полно развиты интегральные методы [1, 4]. Эти работы относятся к течению возле твердой стенки. Практически отсутствуют решения нестационарных задач теории свободной (струйной) пограничного слоя. Между тем исследование струйных течений наряду с очевидным прикладным значением представляет известный самостоятельный интерес. Как будет показано в дальнейшем, существует несомненная качественная связь между закономерностями нестационарного квазиколебательного движения и развитого турбулентного течения.

Укажем основные ограничения, общие для всего изложенного ниже. Во-первых, решение строится на основе уравнений Прандтля. Это означает, что оно справедливо в области, в которой выполняются известные допущения теории пограничного слоя. Во-вторых, речь идет о движении, инициированном струей-источником. Иначе говоря, полученные решения справедливы на достаточно большом удалении от среза сопла. В третьих, давление во всем поле течения принимается постоянным. Такому допущению отвечает предположение о равенстве нулю продольной компоненты скорости на эффективных границах струи; оно накладывает также некоторое ограничение на амплитуду и частоту колебаний. Сделанные допущения — обычные для теории стационарных струй, по-видимому, не являются чрезмерно жесткими.

2. Систему уравнений, описывающую течение вязкой жидкости в плоской струе при указанных допущениях, запишем в безразмерном виде

$$S \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad S = \frac{L}{\tau V}, \quad R = \frac{VL}{\nu} \quad (2.1)$$

В этих уравнениях S и R — числа Струхалия и Рейнольдса, L , V , τ — соответственно масштабные значения для координат, компонент скорости и времени.

Граничные условия задачи имеют вид

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.1) для потока импульса I (в проекции на ось x) и расхода

$$I_x = \int_0^{\infty} \rho u^2 dy, \quad G = \int_0^{\infty} \rho u dy$$

можно получить следующее интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u^2 dy = -S \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} u dy \quad (2.3)$$

В качестве дополнительного условия, определяющего характер нестационарного движения, выберем закон изменения во времени потока импульса в устье струи в виде $I_x \propto f^2(t)$.

Введем, аналогично работе [4] (см. также [2]), новые независимые переменные

$$\xi = \frac{x}{f(t)}, \quad \eta = y \quad (2.4)$$

и положим

$$u(x, y, t) = f(t)u(\xi, \eta), \quad v(x, y, t) = v(\xi, \eta) \quad (2.5)$$

После перехода к новым переменным получим

$$S'f(t) \left(u - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + f(t) \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{R} f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (2.6)$$

Решение системы уравнений (2.6) с аналогичными равенствам (2.2) граничными условиями будем искать в виде рядов по малому параметру — числу Струхала S , имея в виду движение, в котором характерное время течения $\propto L/V$ меньше временного масштаба изменения импульса τ . Это означает, очевидно, ограничение низкочастотными колебаниями скорости. В соответствии с этим

$$u(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n u_n(\xi, \eta), \quad v(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n v_n(\xi, \eta) \quad (2.7)$$

Подставим разложения (2.7) в систему уравнений (2.6) и интегральное соотношение (2.3). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях числа Струхала, получим систему дифференциальных уравнений

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = 0 \quad (2.8)$$

$$f'(t) \left(u_0 - \xi \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) + f(t) \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} u_1 + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) = \frac{f(t)}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.9)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f'(t) \left(u_{n-1} - \xi \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ f(t) \sum_n \left(u_{n-1} \frac{\partial u_{m-n}}{\partial \xi} + v_{n-1} \frac{\partial u_{m-n}}{\partial \eta} \right) = \frac{f(t)}{R} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}$$

$$(m = n + 1) \quad \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0 \quad (2.10)$$

а также интегральные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} u_0^2 d\eta = 0, \quad 2f(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} u_0 u_1 d\eta = f'(t) \int_0^{\infty} \left(\xi \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - u_0 \right) d\eta \quad (2.11)$$

Характерная особенность системы уравнений (2.8) — (2.10) состоит в отсутствии в ней производных от искомых функций по времени, которое играет тем самым роль параметра.

Это, а также возможность последовательного интегрирования уравнений существенно упрощает задачу. Что касается уравнений нулевого приближения, то хотя они и нелинейны, однако по виду тождественны уравнениям соответствующей стационарной задачи. Решение их для многих случаев известно [5]. Отметим, что все остальные уравнения ($n \geq 1$) линейны. Переход от системы уравнений (2.1) к системе (2.10) в переменных ξ, η целесообразен для получения приближенного аналитического решения, и прижде всего, в нулевом приближении. При численном расчете с помощью ЭЦВМ можно исходить непосредственно из уравнений (2.1) с соответствующими граничными условиями.

3. Применим аналогичные преобразования к уравнению распространения тепла (без учета теплоты трения)

$$S \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

и интегральным условием

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u T dy = -S \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty T dy \quad (3.3)$$

Полагая $T(x, y, t) = T(\xi, \eta)$ и вводя число Прандтля $P = \nu / a$, получим

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + v \frac{\partial T_0}{\partial \eta} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \eta^2} \quad (3.4)$$

$$-f'(t) \xi \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \xi} + f(t) \sum_1^m \left(u_{n-1} \frac{\partial T_{m-n}}{\partial \xi} + v_{n-1} \frac{\partial T_{m-n}}{\partial \eta} \right) = \frac{f(t)}{P} \frac{\partial^2 T_n}{\partial \eta^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\infty u_0 T_0 d\eta = 0, \quad f'(t) \xi \int_0^\infty \frac{\partial T_0}{\partial \xi} d\eta = -f(t) \int_0^\infty (u_1 T_0 + T_1 u_0) d\eta \quad (3.6)$$

Как и всегда для несжимаемой жидкости, уравнения распространения тепла решаются после решения соответствующих динамических уравнений. Особенность тепловой задачи для истечения жидкости постоянной температуры — отличие законов изменения во времени потоков избыточного теплосодержания и импульса: $Q_x \propto f(t)$, $I_x \propto f^2(t)$. Это приводит к различной при числе $P = 1$ интенсивности изменения скорости и температуры вдоль оси и в поперечных сечениях струи¹.

Обратимся к частным случаям.

4. В качестве первого конкретного примера рассмотрим задачу о разгоне или затухании струи.

Положим, что

$$f^2(t) = \exp(\pm 2t) \quad (4.1)$$

Соответственно этому $f'(t) = \pm f(t)$ и системы уравнений (2.8)–(2.10) не содержат в явном виде времени.

Приведем решение для нулевого приближения, преобразовав предварительно уравнения к автономному виду

$$F''' + 2(FF')' = 0 \quad (4.2)$$

¹ Заметим, что полагая $T = F(t)T(\xi, \eta)$, приходим к аналогичному уравнению для нулевого приближения $T_0(\xi, \eta)$ с другим интегральным равенством для потока теплосодержания: $Q \propto f(t)F(t)$. Этот случай интересен для независимого задания граничных значений для тепловой задачи.

причем

$$F(0) = 0, \quad F''(0) = 0, \quad F'(0) = 1 \quad (4.3)$$

Здесь

$$u_0 = u_{0m} F'(\varphi), \quad u_{0m} = A \xi^\alpha, \quad \varphi = B \xi^\beta \eta.$$

Из уравнений (2.8) следует постоянство интеграла:

$$I_{0x} = \int_0^\infty \rho u_0^2 d\eta = \text{const}$$

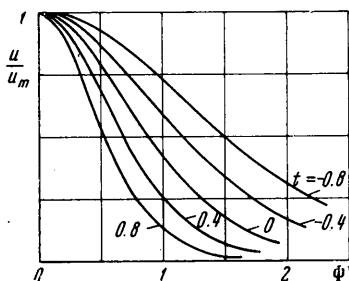
Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{2}{3}, \quad A = \frac{1}{2} \left(\frac{3I^2}{4\rho^2\nu} \right)^{1/3}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{6\rho\nu^2} \right)^{1/3} \quad (4.4)$$

и решение уравнения (4.2) имеет вид [5]

$$u_0 = A \xi^{-1/3} \text{ch}^{-2}(\varphi), \\ v_0 = \frac{1}{3} \frac{A}{B} \varepsilon^{-2/3} [2\varphi \text{ch}^{-2}(\varphi) - \text{th} \varphi] \quad (4.5)$$

Заметим, что в принятом нулевом приближении при возвращении к физическим переменным по формулам (2.4) и (2.5) будет иметь место интегральное равенство



Фиг. 1

$$\int_0^\infty \rho u^2 dy = I f^2(t), \quad \text{или} \quad I_{0x} \equiv I = \text{const}$$

Это учтено в приведенных выше выражениях для постоянных A и B . Окончательное выражение для предельной компоненты скорости запишем в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \\ = A \exp(4/3t) x^{-1/3} \text{ch}^{-2}[\Phi \exp(2/3t)] \\ \Phi = B y x^{-2/3} \quad (4.6)$$

На фиг. 1 показано изменение во времени относительного профиля скорости

$$\frac{u}{u_m} = \frac{u(x, y, t)}{A \exp(4/3t) x^{-1/3}} = f_1(\Phi) \quad (4.7)$$

в поперечном сечении струи.

При разгоне струя сужается (в соответствии с ростом импульса), а при снижении потока импульса соответственно расширяется. Значению $t = 0$ отвечает, очевидно, кривая стационарного распределения скорости. Заметим, и это видно из равенства (21), что введя эффективную координату $\Phi^* = \Phi \exp(2/3t)$, получим универсальный профиль

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{\text{ch}^2(\Phi^*)}$$

5. В качестве второго примера рассмотрим движение жидкости в пульсирующей струе, для которой

$$f^2(t) = \cos^2 k(t) \quad (5.1)$$

где показатель степени $k \geq 0$ играет роль своеобразного коэффициента формы колебаний потока импульса (фиг. 2), на котором все кривые нормированы по среднему импульсу

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(t) dt = 1$$

Нулевое приближение в этом случае, как и в предыдущем будет иметь вид равенств (4.5). Сохраняются в силе также и соотношения (4.4).

Окончательные выражения для компонент скорости и избыточной температуры будут иметь вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= Ax^{-1/3} \cos^{1/3} kt \operatorname{ch}^{-2} [\Phi \cos^{2/3} kt] \\ v(x, y, t) &= \frac{1}{3} \frac{A}{B} x^{-2/3} \cos^{2/3} kt \{ 2\Phi \cos^{2/3} kt \operatorname{ch}^{-2} (\Phi \cos^{2/3} kt) - \operatorname{th} (\Phi \cos^{2/3} kt) \} \\ T(x, y, t) &= \Gamma x^{-1/3} \cos^{1/3} kt \operatorname{ch}^{-2P} (\Phi \cos^{2/3} kt) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Постоянная Γ определяется из интегрального условия (3.3).

Результаты численного расчета представлены на фиг. 3. На этом рисунке для значения $k = 1$ в формуле (5.1) изображена зависимость компонент актуальной скорости u и v от приведенной координаты $\Phi = B y x^{-1/3}$ и времени t . Как видно, со временем (значение $t = 0$ отвечает стационарной автомодельной ламинарной струе) происходит непрерывная перестройка течения. В отдельные моменты времени поперечная компонента скорости во всем поле течения направлена от оси струи.

Полученное решение по существу полностью исчерпывает поставленную задачу (в нулевом приближении). В связи с колебательным характером изменения компонент скорости возникает возможность выделения из решения осредненных во времени значений компонент скорости

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u(t) dt, \quad \langle v \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v(t) dt$$

где интервал времени τ равен целому числу периодов колебаний, и отклонений от них — пульсационных составляющих скорости

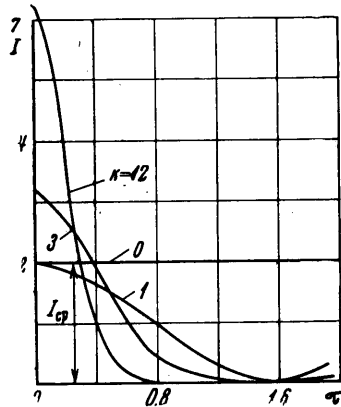
$$u' = u - \langle u \rangle, \quad v' = v - \langle v \rangle \quad (5.4)$$

Очевидно, что значения

$$\langle u' \rangle = 0, \quad \langle v' \rangle = 0$$

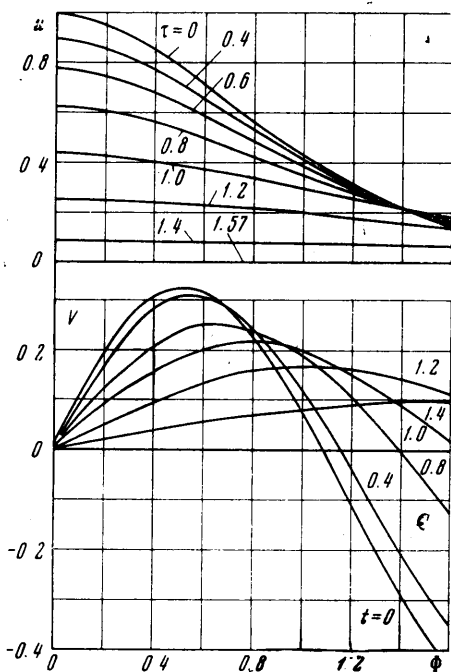
Выражения (5.3) и (5.4) совпадают с обычными формулами осреднения скорости турбулентного движения. Это обстоятельство заслуживает более подробного обсуждения.

6. В рассматриваемом движении, как и в турбулентном, можно вести наблюдение за скоростью течения в некоторой точке струи с помощью достаточно инерционных приборов, которые, не реагируя на отклонения (пульсации u' и v'), измеряли бы осредненные значения скорости, а также температуры. Наряду с этим, с помощью безынерционного датчика можно было бы наблюдать актуальные (мгновенные) значения u , v и T и, следовательно, рассчитать среднеквадратичные во времени значения интенсив-



Фиг. 2

ности пульсаций $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle T'^2 \rangle$. При этом можно связать между собой характеристики осредненного и пульсационного движения, определить величину «пульсационного трения» — $\langle u'v' \rangle$ и его распределение в струе и т. п. Иными словами, для рассматриваемого нестационарного колебательного движения можно построить ряд характеристик, специфичных для структуры турбулентного течения. Представляет интерес проследить за тем, в какой мере установленные в результате решения нестационарной задачи закономерности осредненного и пульсационного движения отвечают известным соотношениям для турбулентной струи. С одной стороны, любое турбулентное движение, сколь бы сложно оно не было, должно описываться решением нестационарной системы уравнений Навье — Стокса при соответствующих граничных и начальных условиях. Поэтому, рассматривая приведенное решение, как простейшую модель своего рода «регулярного» турбулентного движения, можно ожидать сохранения в нем хотя бы части харак-

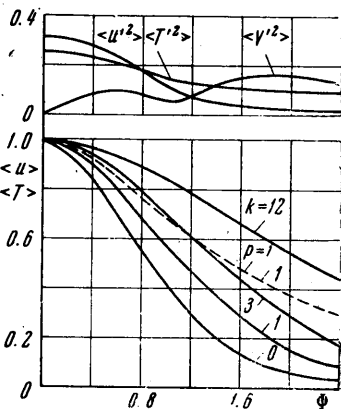


Фиг. 3

терных свойств. С другой стороны, можно указать на ряд важных особенностей турбулентного движения, неучтенных в постановке рассмотренной задачи. В числе их переход к уравнениям Прандтля, пренебрежение пульсациями давления, выравнивающими пульсационную энергию различных компонент скорости, двумерность среднего и вместе с ним пульсационного движения.

Очевидно, только численный эксперимент может указать целесообразность такого сопоставления и вероятные границы аналогии. Приведем в связи с этим некоторые результаты численного расчета характеристик нестационарной струи.

7. На фиг. 4 для нескольких значений показателя степени k представлено изменение средних и пульсационных среднеквадратичных значений компонент скорости. Как видно из фигуры, профили скорости в общем напоминают аналогичные профили для развитой турбулентной струи. С ростом показателя степени k (т. е. интенсивности пульсаций) эффективная ширина струи увеличивается. Что касается кривых пульсационных характеристик, то на оси струи $\langle v'^2 \rangle = 0$; тем самым нарушается локальная изотропия пульсаций, свойственная развитой турбулентной струе. Это различие является следствием принятого в расчете предположения об автомодельности и изобарности поля течения.



Фиг. 4

На той же фиг. 4 для значения $k=1$ показан профиль средней температуры (а также профиль $\langle T'^2 \rangle$) для значения физического числа Прандтля $P = 1$. Как видно, взаимное расположение кривых $\langle u \rangle$ и $\langle T \rangle$, как и в эксперименте в турбулентных струях [5], отвечает значению так называемого «турбулентного числа Прандтля» $P_T < 1$.

Аналогичный расчет для $P = 10$ дает значение $P_T \approx 2$. Таким образом, хотя зависимость эффективного значения P_T от физических констант жидкости в данном примере расчета в какой-то мере сохраняется, можно предположить, что при более точном решении отношение между переносом импульса и тепла в осредненном течении практически не будет зависеть от числа P .

На фиг. 5 для тех же значений k изображен ряд кривых зависимости значения $\langle u'v' \rangle$ от приведенной координаты Φ . Эти кривые по характеру аналогичны соответствующим экспериментальным кривым [5, 6]. На краю струи величина $\langle u'v' \rangle$ меняет свой знак, что связано со сравнительно большим значением поперечной компоненты скорости.

В соответствии с этим в этой области течения наблюдается переход энергии от пульсационного движения к осредненному [7].

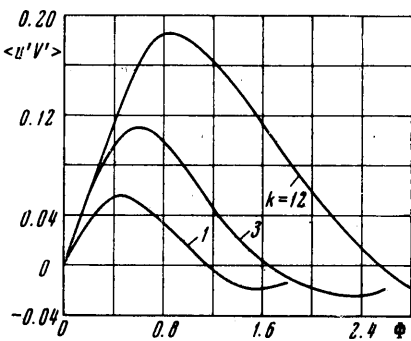
Таким образом, результаты расчета показывают качественную близость осредненного пульсирующего течения с осредненным течением в турбулентной струе. По-видимому, основную роль в этом сыграло сохранение в нестационарных уравнениях нелинейных конвективных членов. Действительно, если обратиться к решению линеаризованной задачи о нестационарной плоской струе [8], то в нем при $\langle u'^2 \rangle \neq 0$ и $\langle v'^2 \rangle \neq 0$ корреляция пульсаций отсутствует: $\langle u'v' \rangle = 0$.

Наряду с этим операция осреднения (частный случай сглаживания [9]) в известной мере стирает индивидуальные черты актуального пульсационного движения. При этом следует иметь в виду, что приведенное решение отражает первое приближение, не учитывает высокочастотных колебаний и влияния числа Струхала. Численное решение задачи на основе уравнений (2.1) будет, очевидно, свободно от этого недостатка.

Поступило 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. Стюартсон К. Теория неустановившихся ламинарных пограничных слоев. Сб. Проблемы механики, М., Изд-во иностр. лит., 1963, вып. 4.
3. Шу Г., О «подобных» решениях уравнения нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемых потоках. В сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи», Госэнергоиздат, 1960.
4. Струминский В. В. Теория нестационарного пограничного слоя. В сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
6. Хинце И. О. Турбулентность, Г. Физматгиз, 1963.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
8. Ярин Л. П., О некоторых закономерностях распространения нестационарных струй. В сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики, Алма-Ата, «Наука», 1967, вып. 4.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, М., Гостехиздат, 1948, т. 2.



Фиг. 5