[2] и соотношение (1.13), находим выражение для дебита первой скважины

$$Q_1 = 2\pi \sqrt{k(x_1, y_1)}\, \frac{(\varphi_1^{(0)} - \varphi^{(1)})\sqrt{k(x_1, y_1)}\, a_{22} - (\varphi_2^{(0)} - \varphi^{(1)})\sqrt{k(x_2, y_2)}\, a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3.2}$$

Здесь

$$a_{11} = K_0(\lambda r_0^{(1)}) - K_0(\lambda h_1), \qquad a_{22} = K_0(\lambda r_0^{(2)}) - K_0(\lambda h_2)$$

$$a_{12} = a_{21} = K_0(\lambda \rho) - K_0(\lambda \delta)$$

Дебит второй скважины получим, заменив в (3.2) индекс 1 индексом 2.

Поступило 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949.
2. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ С ЗАДАННЫМ ДЕБИТОМ

В. А. БЕРКУН

(Харьков)

Рассматривается упругий однородный бесконечный пласт, характеризуемый постоянным коэффициентом пьезопроводности $\varkappa$.

Давление на бесконечности принимается постоянным и равным начальному. Пласт дренируется круговой цилиндрической скважиной, дебит которой задан степенной функцией времени. Для этих условий получено общее решение задачи при любом показателе степени, вещественная часть которого более —1.

Давление в пласте для рассматриваемой задачи есть функция расстояния от оси скважины (т. е. оси симметрии) r и времени t. Кроме того, давление однозначно характеризуется радиусом скважины a и показателем α.

Обозначим эту функцию через $p(r, t; a, \alpha)$. Задача приводит к интегрированию уравнения

$$\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (r \geqslant a,\ \varkappa = \mathrm{const} > 0,\ t > 0) \tag{1}$$

при краевых условиях

$$p(r, 0; a, \alpha) = p_0, \qquad p(\infty, t; a, \alpha) = p_0 \qquad (p_0 = \mathrm{const})$$

$$\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=a} = bt^\alpha \tag{2}$$

где коэффициент b приводит размерность правой части последнего равенства к размерности левой части. В дальнейшем для удобства полагаем $b = 1$.

Положим далее $\operatorname{Re}\alpha > -1$. При этом условии существует изображение Лапласа степенной функции.

Воспользовавшись теоремой Дюамеля [1], решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$p_0 - p(r, t; a, \alpha) = \Delta p(r, t; a, \alpha) = \int_0^t (t-\tau)^\alpha g(r, \tau; a, 0)\, d\tau, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1$$

$$g(r, t; a, 0) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta p(r, t; a, 0) \tag{3}$$

Здесь $\Delta p(r,\ t;\ a,\ 0)$ — решение задачи (1), (2) для случая $\alpha = 0$ (постоянного дебита).

Известно [1], что

$$\Delta p(r, t; a, 0) = -\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty y_{0,1}(u; r, a)\exp(-u^2\varkappa\tau)\,du\,d\tau \tag{4}$$

Изменяя порядок интегрирования, имеем

$$\Delta p(r, t; a, 0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u^{-2}y_{0,1}(u; r, a)[1-\exp(-u^2\varkappa t)]\,du \tag{5}$$

При этом введено обозначение

$$y_{0,1}(u;\ r,\ a) = a^{-1}[J_1^2(au)+N_1^2(au)]^{-1}[J_0(ru)N_1(au) - J_1(au)N_0(r,\ u)]$$

$$y_{0,1}(u;\ a,\ a) = -2\pi^{-1}a^{-2}u^{-2}[J_1^2(au)+N_1^2(au)]^{-1}$$

Здесь $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ — функции Бесселя и Неймана, $J_\nu^2(x)$ и $N_\nu^2(x)$ — квадраты этих функций.

Согласно (3) и (4)

$$g(r, t; a, 0) = -\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^\infty y_{0,1}(u; r, a)\exp(-u^2\varkappa t)\,du \tag{6}$$

причем

$$g(r,\ t;\ a,\ 0) = -\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^\infty y_{0,1}(u;\ r,\ a)\,du = 0, \qquad r > a \tag{7}$$

Из (3) и (6) следует:

$$\Delta p(r, t; a, \alpha) = -\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^t (t-\tau)^\alpha \int_0^\infty y_{0,1}(u; r, a)\exp(-u^2\varkappa\tau)\,du\,d\tau \tag{8}$$

Выражение (5) функции $\Delta p(r,\ t;\ a,\ 0)$ получено из (4) путем изменения порядка интегрирования. Предположим, что в общем случае $\operatorname{Re}\alpha > -1$ изменение порядка интегрирования в (8) возможно. Тогда

$$\Delta p(r, t; a, \alpha) = -\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^\infty y_{0,1}(u; r, a)\int_0^t (t-\tau)^\alpha\exp(-u^2\varkappa\tau)\,d\tau\,du, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1 \tag{9}$$

Рассмотрим первый интеграл в (9)

$$\int_0^t (t-\tau)^\alpha\exp(-u^2\varkappa\tau)\,d\tau = t^{\alpha+1}\int_0^1 (1-v)^\alpha\exp(-u^2\varkappa tv)\,dv, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1 \tag{10}$$

Правый интеграл (10) есть частный случай интеграла [2]

$$\int_0^1 v^{\nu-1}(1-v)^{\mu-\nu-1}e^{xv}\,dv = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu)}\Phi(\nu, \mu; x) \tag{11}$$

$$(\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > 0)$$

при $\nu = 1$, $\mu = \alpha + 2$ и $x = -u^2\varkappa t$, причем $\operatorname{Re}(\alpha+2) > \operatorname{Re}\nu = 1$, если $\operatorname{Re}\alpha > -1$.

Здесь $\Phi(\nu,\ \mu;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Следовательно

$$\int_0^t (t-\tau)^\alpha\exp(-u^2\varkappa\tau)\,d\tau = (\alpha+1)^{-1}t^{\alpha+1}\Phi(1,\ \alpha+2;\ -u^2\varkappa t) \tag{12}$$

Воспользуемся соотношением [2]

$$(\mu-1)^{-1}x\Phi(\nu,\ \mu;\ x) = \Phi(\nu,\ \mu-1;\ x) - \Phi(\nu-1,\ \mu-1;\ x)$$
$$(\mu \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots) \tag{13}$$

Полагая $\nu = 1$, $\mu = \alpha + 2$, имеем

$$\Phi(1,\ \alpha+2;\ -x) = (\alpha+1)x^{-1}[\Phi(0,\ \alpha+1;\ -x) - \Phi(1,\ \alpha+1;\ -x)] \tag{14}$$

причем $\operatorname{Re}\alpha + 2 > 1$, если $\operatorname{Re}\alpha > -1$.

Согласно разложению вырожденной гипергеометрической функции [2]

$$\Phi(\nu, \mu; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+n)\Gamma(\nu)} x^n \qquad (\mu \neq 0, -1, -2, \ldots) \tag{15}$$

при $\nu = 0$

$$\Phi(0,\ \mu;\ x) \equiv 1 \tag{16}$$

Воспользовавшись (16) и (14), где положим $x = u^2\varkappa t$, из (12) и (9) имеем

$$\Delta p(r, t; a, \alpha) = -\frac{2}{\pi} t^{\alpha} \int_0^{\infty} u^{-2} y_{0,1}(u; r, a)[1 - \Phi(1, \alpha+1; -u^2\varkappa t)]\, du \tag{17}$$

При $\alpha = 0$ из (17) следует (5), так как $\Phi(\nu,\ \nu;\ -x) = e^{-x}$.

Воспользовавшись правилами дифференцирования вырожденной гипергеометрической и цилиндрической функций, а также соответствующими свойствами этих функций можно проверить, что найденное решение (17) удовлетворяет всем условиям задачи (1), (2). Для дальнейшего воспользуемся правилом дифференцирования цилиндрической функции $Z_0(x)$

$$\frac{d}{dx} Z_0(bx) = -bZ_1(bx)$$

Имеем из (17)

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta p(r, t; a, \alpha) = \frac{2}{\pi} t^{\alpha} \int_0^{\infty} u^{-1} y_{1,1}(u; r, a)[1 - \Phi(1, \alpha+1; -u^2\varkappa t)]\, du \tag{18}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > -1$$

$$y_{1,1}(u; r, a) = -u^{-1} \frac{d}{dr} y_{0,1}(u; r, a) = a^{-1}[J_1^2(au) + N_1^2(au)]^{-1} \times$$
$$\times [J_1(ru)N_1(au) - J_1(au)N_1(ru)]$$

Так как

$$y_{1,1}(u;\ r,\ a) = 0 \tag{19}$$

то формула (18) имеет смысл только при $r > a$. Согласно [3]

$$\int_0^{\infty} u^{-1} y_{\nu,\nu}(u; r, a)\, du = a^{-1} \int_0^{\infty} u^{-1} \frac{J_\nu(ru)N_\nu(au) - J_\nu(au)N_\nu(ru)}{J_\nu^2(au) + N_\nu^2(au)}\, du = -\frac{\pi}{2} \frac{a^{\nu-1}}{r^\nu}$$
$$(0 < a < r)$$

В частности

$$\int_0^{\infty} u^{-1} y_{1,1}(u; r, a)\, du = -\frac{\pi}{2r} \qquad \text{при } \nu = 1 \tag{20}$$

Следовательно, из (20) и (18) имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta p(r, t; a, \alpha) = -t^{\alpha} \left[r^{-1} + 2/\pi \int_0^{\infty} u^{-1} y_{1,1}(u; r, a) \Phi(1, \alpha+1; -u^2\varkappa t)\, du \right] \tag{21}$$
$$\operatorname{Re}\alpha > -1$$

Отсюда, в частности, следует второе граничное условие (2). Проинтегрируем (21) по r от a до R $(R < \infty)$. Учитывая выражение функции $\Delta p(r, t;\ a, \alpha)$ (см. (3)), имеем

$$p(R, t;\ a, \alpha) - p(r, t;\ a, \alpha) = t^\alpha \left[\ln\frac{R}{a} + \frac{2}{\pi} \int\limits_a^R \int\limits_0^\infty u^{-1} y_{1,1}(u;\ r, a) \Phi(1, \alpha+1;\ -u^2 \varkappa t)\, du\, dr \right] \tag{22}$$

Введем обозначение дебита, согласно второму граничному условию (2) при $b = 1$

$$q(t;\ a, \alpha) = \frac{2\pi k}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{2\pi k}{\mu} t^\alpha \tag{23}$$

Здесь k и μ — соответственно проницаемость пласта и вязкость жидкости.

Изменив в (22) порядок интегрирования и воспользовавшись выражением $y_{1,1}(u;\ r, a)$ (см. (18)), имеем для любого $R (a \leqslant R < \infty)$

$$p(R, t;\ a, \alpha) - p(a, t;\ a, \alpha) = \frac{\mu}{2\pi k} q(t;\ a, \alpha) \left[\ln\frac{R}{a} + U(R, t;\ a, \alpha) \right] \tag{24}$$

Здесь

$$U(R, t;\ a, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty [y_{0,1}(u;\ R, a) - y_{0,1}(u;\ a, a)]\, u^{-2} \Phi(1, \alpha+1;\ -u^2 \varkappa t)\, du$$

— дополнительное сопротивление кольцевой зоны пласта $a \leqslant r \leqslant R$ $(R < \infty)$ при неустановившейся фильтрации жидкости в бесконечном пласте, возмущенном скважиной, дебит которой — степенная функция времени.

Так как согласно [2] для больших значений t

$$t^\alpha \Phi(1,\ \alpha+1;\ -u^2 \varkappa t) = \alpha(-u^2 \varkappa)^{-1} t^{\alpha-1} [1 + O(|t|^{-1})] \quad \operatorname{Re} \alpha > -1 \tag{25}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \Phi(1,\ \alpha+1;\ -u^2 \varkappa t) = 0$$

$$(-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1)$$

Следовательно, для любого конечного значения $r = R$ и при больших значениях t имеем

$$t^\alpha U(R,\ t;\ a,\ \alpha) = 0, \qquad |\operatorname{Re} \alpha| < 1 \tag{26}$$

и далее, из (24) — приближенную формулу

$$p(R, t;\ a, \alpha) - p(a, t;\ a, \alpha) = \frac{\mu}{2\pi k} q(t;\ a, \alpha) \ln\frac{R}{a}$$

которая является аналогом формулы притока при установившейся осесимметричной фильтрации жидкости в конечном круговом пласте радиуса R (формулы Дюпюи) [4]

$$p(R) - p(a) = \frac{\mu}{2\pi k} q \ln\frac{R}{a} \qquad (q = \mathrm{const})$$

В остальных случаях при $\operatorname{Re} \alpha > 1$ формула (26) не имеет места, так как согласно (25) функция $t^\alpha U(R,\ t;\ a,\ \alpha)$ должна стремиться к бесконечности вместе с t. В особом случае $\alpha = 1$ согласно (25) $tU(R,\ t;\ a,\ 1)$ стремится к постоянной по t величине и, следовательно, в формуле (26) появляется дополнительный член.

Поступило 7 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие гипергеометрические функции. М., «Наука», 1966.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.