близости от реки, так как именно в этой области величина R_2 максимальна, и, следовательно, эти скважины в наибольшей степени испытывают влияние несовершенства русла.

Наблюдательные скважины следует размещать симметрично относительно середины реки. В этом случае, как видно из выражений (18), $\xi_2^{\pm} = \xi_3^{\pm}$ и, следовательно, $I_2^{+} = I_3^{+}$, $I_2^{-} = I_3^{-}$. Учитывая это обстоятельство, можно, складывая и вычитая понижения уровней S_2 и S_3 в соответствующих скважинах, определить $I_2^{\pm}$.

По известным значениям $I_i^{\pm}$, пользуясь таблицей, далее находятся $\xi_2^{\pm}$ и $\xi_3^{\pm}$, а из них показатель — λ, и из формул (19) — величина α.

Поступило 11 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. К вопросу о расчете подземных водозаборов в условиях плоского движения грунтовых вод. Докл. АН СССР, 1949, т. 14, № 2.
2. Григорьев В. М. Теоретические основы расчета инфильтрационных водозаборов с учетом заиления речных русел. Водоснабжение и санитарная техника, 1960, № 6,
3. Шестаков В. М. Оценка сопротивления ложа водоемов при гидрогеологических расчетах. Разведка и охрана недр, 1964, № 5.
4. Бочевер Ф. М. Оценка производительности береговых водозаборов с учетом несовершенства речных русел. Тр. ВНИИ ВОДГЕО, 1966, вып. 13.
5. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехтеоретиздат, 1951.
6. Альтшулер Л. М. Температурное поле труб в массиве. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, вып. 7.
7. Альтшулер Л. М. О методе «дополнительного слоя» в задачах Форхгеймера. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 2.
8. Hantush M. S. Wells near streams with semipervious beds. J. Geoph. Res., 1965, vol. 70, No. 12.

К ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СКВАЖИН В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

С. Д. ОСЯТИНСКИЙ

(*Москва*)

Рассматривается задача о нахождении потенциала скорости и дебита скважины, эксцентрично расположенной в круглом неоднородном пласте, при известных значениях потенциала на контуре питания и контуре скважины.

Решение этой же задачи получено для нескольких скважин, расположенных в круглом и полубесконечном неоднородных пластах. Размеры скважин предполагаются малыми сравнительно с их взаимным удалением и размерами пласта.

1. Пусть в круговом неоднородном пласте радиуса R_1, проницаемость которого удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{k} - \lambda^2\sqrt{k} = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

и ни в одной точке рассматриваемой области не обращается в нуль, имеется эксцентрично расположенная совершенная скважина радиуса r_0. Необходимо определить потенциал скорости и дебит скважины Q, если заданы значения потенциала на границах рассматриваемой области

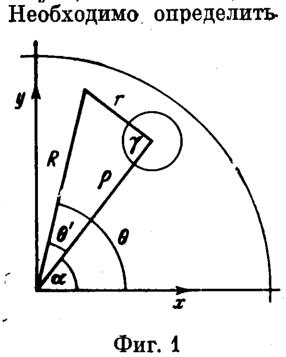
$$\varphi = \varphi^{(1)}, \qquad \varphi = \varphi^{(0)} = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

на контуре питания и контуре скважины соответственно. Движение несжимаемой жидкости в плоском неоднородном слое постоянной мощности описывается уравнением

$$\operatorname{div} k \operatorname{grad} \varphi = 0 \tag{1.3}$$

Дебит определяется формулой

$$Q = \oint k \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \tag{1.4}$$



Фиг. 1

где контур интегрирования охватывает скважину [1]. Введем функцию $\Phi = \sqrt{k}\varphi$, называемую приведенным потенциалом, тогда условие (1.2) и выражения (1.3) и (1.4) примут вид

$$\Phi^{(1)} = \sqrt{k}\varphi^{(1)}(x, y), \qquad \Phi^{(0)} = \sqrt{k}\,\mathrm{const}, \qquad \Delta\Phi - x^2\Phi = 0 \tag{1.6}$$

$$Q = \oint \left(\sqrt{k}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial n}\right) ds \tag{1.7}$$

Рассмотрим функцию

$$F = CK_0(\lambda r) + \sum_0^\infty (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) I_n(\lambda R) \tag{1.8}$$

Здесь r и R — радиусы-векторы, исходящие из центра скважины и центра пласта соответственно, I_n — модифицированная функция Бесселя, K_0 — функция Макдональда, C, A_n, B_n — пока неопределенные коэффициенты.

Из фиг. 1 видно, что

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha), \qquad R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma$$

Здесь ρ — удаление центра скважины от центра пласта, θ — угол между R и осью x, γ — угол между ρ и r, α — угол между ρ и осью x.

Потребуем, чтобы $F(R_1) = \Phi^{(1)}$ при $R = R_1$. Предполагая, что на контуре питания функция $\Phi^{(1)}$ удовлетворяет условию Дирихле, воспользуемся теоремой сложения [2] для определения коэффициентов A_n, B_n, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= CI_0(\lambda\rho)K_0(\lambda R_1) + A_0 I_0(\lambda R_1) \\ a_n &= 2CI_n(\lambda\rho)K_n(\lambda R_1)\cos n\alpha + A_n I(\lambda R_1) \\ b_n &= 2CI_n(\lambda\rho)K_n(\lambda R_1)\sin n\alpha + B_n I_n(\lambda R_1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь a_n, b_n — коэффициенты Фурье разложения функции Φ на контуре питания.

При $r \ll R_1$ линии уровня функции F близки к окружностям. Примем одну из них за контур скважины. Подберем в (1.8) коэффициент C так, чтобы на контуре скважины функция F как можно меньше отличалась от Φ. Очевидно, это условие будет выполнено наилучшим образом, если их средние значения на контуре скважины совпадают, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^{(0)}\, d\gamma = a^{(0)} = CK_0(\lambda r_0) + \sum_0^\infty I_0(\lambda r_0) I_n(\lambda\rho)(A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha) \tag{1.10}$$

Вследствие сказанного выше, приведенный потенциал выразится формулой (1.8), где коэффициенты C, A_n, B_n определятся из (1.9) и (1.10).

Пусть имеет место разложение

$$\sqrt{k} = \sum_0^\infty (D_n \cos n\gamma + E_n \sin n\gamma) I_n(\lambda r) \tag{1.11}$$

или в другой форме

$$\sqrt{k} = \sum_0^\infty (D_n^* \cos n\theta' + E_n \sin n\theta') I_n(\lambda R) \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11) и (1.8) в (1.7), используя теорему сложения [2] и соотношение

$$K_n(\lambda r) I_{n-1}(\lambda r) + K_{n-1}(\lambda r) I_n(\lambda r) = (\lambda r)^{-1} \tag{1.13}$$

найдем, что

$$O = 2\pi \frac{D_0[a^{(0)} - I_0(\lambda r_0) S_1]}{K_0(\lambda r_0) - I_0(\lambda r_0) S_2} \tag{1.14}$$

где

$$S_1 = \sum_0^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)\frac{I_n(\lambda\rho)}{I_n(\lambda R_1)}, \qquad S_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{I_n^2(\lambda\rho) K_n(\lambda R_1)}{I_n(\lambda R_1)}$$

Если потенциал на контуре питания имеет постоянную величину, то, подставляя a_n, b_n и используя (1.12), найдем

$$Q = 2\pi \frac{I_0(\lambda r_0) D_0^2 (\varphi^{(0)} - \varphi^{(1)})}{K_0(\lambda r_0) - I_0(\lambda r_0) S_2} \tag{1.15}$$

При $R_1 \to \infty$, $\rho \to \infty$ и выполнении условия $R_1 - \rho = h = \text{const}$, где h — удаление скважины от контура питания, формула (1.15) может быть использована для вычисления дебита скважины в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания. Действительно, полагая $\lambda h \gg 1$ и используя асимптотическое представление, для бесселевых функций [2], получим

$$Q = 2\pi \frac{I_0(\lambda r_0) D_0^2 (\varphi^{(0)} - \varphi^{(1)})}{K_0(\lambda r_0) - I_0(\lambda r_0) K_0(2\lambda h)} \tag{1.16}$$

В частности, из (1.16) следует, что дебит такой скважины зависит не от направления контура питания, а лишь от разности потенциалов на контуре питания и контуре скважины, их взаимного удаления и значения проницаемости в месте бурения.

2. Пусть в рассматриваемом пласте имеются две совершенные скважины радиусов $r_0^{(1)}$ и $r_0^{(2)}$, удаленные одна от другой на расстояние ρ_{12}, с постоянными значениями потенциала на их контурах $\varphi_1^{(0)}$ и $\varphi_2^{(0)}$.

Найдем потенциал скорости течения и дебит каждой из скважин. Вместо (1.8) введем функцию

$$f = C_1 K_0(\lambda r_1) + C_2 K_0(\lambda r_2) + \sum_0^\infty (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) I_n(\lambda R) \tag{2.1}$$

Здесь r_1 и r_2 — радиусы-векторы, исходящие из центров первой и второй скважины.

Удовлетворим граничному условию на контуре питания и, полагая размеры скважин достаточно малыми по сравнению с размерами пласта и расстоянием между ними, потребуем выполнения граничных условий на контурах скважин.

Постоянные C_1, C_2, A_n, B_n найдутся из уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= C_1 I_0(\lambda\rho_1) K_0(\lambda R_1) + C_2 I_0(\lambda\rho_2) K_0(\lambda R_1) + A_0 I_0(\lambda R_1) \\ a_n &= 2K_n(\lambda R_1)[C_1 I_n(\lambda\rho_1)\cos n\alpha_1 + C_2 I_n(\lambda\rho_2)\cos n\alpha_2] + A_n I_n(\lambda R_1) \\ b_n &= 2K_n(\lambda R_1)[C_1 I_n(\lambda\rho_1)\sin n\alpha_1 + C_2 I_n(\lambda\rho_2)\sin n\alpha_2] + B_n I_n(\lambda R_1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= C_1 K_0(\lambda r_0^{(1)}) + C_2 I_0(\lambda r_0^{(1)}) K_0(\lambda\rho_{12}) + \\ &+ \sum_0^\infty [A_n \cos n\alpha_1 + B_n \sin n\alpha_1] I_0(\lambda r_0^{(1)}) I_n(\lambda\rho_1) \\ a^{(2)} &= C_2 K_0(\lambda r_0^{(2)}) + C_1 I_0(\lambda r_0^{(2)}) K_0(\lambda\rho_{12}) + \\ &+ \sum_0^\infty [A_n \cos n\alpha_2 + B_n \sin n\alpha_2] I_0(\lambda r_0^{(2)}) I_n(\lambda\rho_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь a_0, a_n, b_n — коэффициенты фурье-разложения приведенного потенциала на контуре питания; $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ — его средние значения на контурах скважин; ρ_1, α_1 и ρ_2, α_2 — полярные координаты скважин относительно центра пласта.

Используя (1.7), (2.1), (2.2), (2.3), найдем значение дебита

$$Q_1 = 2\pi \sqrt{k(\rho_1, \alpha_1)} \frac{[a^{(1)} - S_1]\delta_{22} - [a^{(2)} - S_2]\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \tag{2.4}$$

$$Q_2 = 2\pi \sqrt{k(\rho_2, \alpha_2)} \frac{[a^{(2)} - S_2]\delta_{11} - [a^{(1)} - S_1]\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \tag{2.5}$$

Здесь

$$S_1 = \sum_0^\infty \frac{(a_n \cos n\alpha_1 + b_n \sin n\alpha_1) I_0(\lambda r_0^{(1)}) I_n(\lambda\rho_1)}{I_n(\lambda R_1)},$$

$$S_2 = \sum_{0}^{\infty} \frac{(a_n \cos n\alpha_2 + b_n \sin n\alpha_2) I_0(\lambda r_0^{(2)}) I_n(\lambda\rho_2)}{I_n(\lambda R_1)}$$

$$\delta_{11} = K_0(\lambda r_0^{(1)}) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\lambda R_1) I_0(\lambda r_0^{(1)}) I_n^2(\lambda\rho_1)}{I_n(\lambda R_1)}$$

$$\delta_{22} = K_0(\lambda r_0^{(2)}) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\lambda R_1) I_0(\lambda r_0^{(2)}) I_n^2(\lambda\rho_2)}{I_n(\lambda R_1)}$$

$$\delta_{21} = K_0(\lambda\rho_{21}) I_0(\lambda r_0^{(2)}) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\lambda R_1) I_n(\lambda\rho_1) I_n(\lambda\rho_2) I_0(\lambda r_0^{(2)}) \cos n(\alpha_2 - \alpha_1)}{I_n(\lambda R_1)}$$

$$\delta_{12} = \frac{I_0(\lambda r_0^{(1)})}{I_0(\lambda r_0^{2})} \delta_{21}$$

При постоянном значении потенциала на контуре питания формулы (2.4) и (2.5) примут вид

$$Q_1 = 2\pi \sqrt{k(\rho_1, \alpha_1)} \frac{(\varphi_1^{(0)} - \varphi^{(1)}) \sqrt{k(\rho_1, \alpha_1)}\, \delta_{22} - (\varphi_2^{(0)} - \varphi^{(1)}) \sqrt{k(\rho_2, \alpha_2)}\, \delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \tag{2.6}$$

$$Q_2 = 2\pi \sqrt{k(\rho_2, \alpha_2)} \frac{(\varphi_2^{(0)} - \varphi^{(1)}) \sqrt{k(\rho_2, \alpha_2)}\, \delta_{11} - (\varphi_1^{(0)} - \varphi^{(1)}) \sqrt{k(\rho_1, \alpha_1)}\, \delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \tag{2.7}$$

Полученные результаты нетрудно обобщить на случай N скважин.

3. Рассматривается полубесконечный неоднородный пласт постоянной мощности. Сохраняются условия (1.1), (1.12) и постановка задачи.

Определим граничные условия. Пусть контур питания (фиг. 2) представляет собой прямую, заданную уравнением $y = \alpha x$, контуры скважин — окружности радиусов r_0^i, значение потенциала на контуре питания $\varphi = \varphi^{(1)} = \text{const}$ и на контурах скважин $\varphi = \varphi_i^{(0)} = \text{const}$.

Для простоты рассмотрим случай $N = 2$ (фиг. 2). Пусть имеется функция

$$f = \frac{1}{\sqrt{k(x, y)}} \sum_{1}^{2} A_i [K_0(\lambda r_i) - K_0(\lambda R_i)] + \varphi^{(1)} \tag{3.1}$$

Здесь K_0 — функция Макдональда, A_i — пока неопределенные коэффициенты (постоянные)

$$r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y - y_i)^2}, \qquad R_i = \sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2};$$

x_i, y_i, X_i, Y_i связаны условиями

$$x_i^2 + y_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \qquad y_i - Y_i = -\frac{1}{\alpha}(x_i - X_i)$$

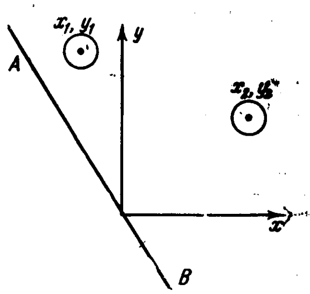
Нетрудно проверить, что функция (3.1) обладает следующими свойствами:

1) удовлетворяет уравнению (1.3);
2) на контуре питания $f = \varphi^{(1)}$;
3) при $\lambda r_i \leqslant 1$

где

$$r_i \leqslant h_i = \sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}$$
$$r_i \leqslant \rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$r_i \leqslant \delta = \sqrt{(x_1 - X_2)^2 + (y_1 - Y_2)^2}$$

линии уровня функции f близки к окружностям. Примем одну из них за контур скважины, тогда в (3.1) можно подобрать коэффициенты A_1, A_2 таким образом, чтобы удовлетворить условию $f = \varphi^{(0)}$ на заданной линии уровня.



Фиг. 2

Дебит определится формулой (1.4), где контур интегрирования охватывает данную скважину, а функция взята в виде (3.1). Подставляя (1.12) и (3.1) в (1.4), используя теорему сложения

[2] и соотношение (1.13), находим выражение для дебита первой скважины

$$Q_1 = 2\pi \sqrt{k(x_1, y_1)}\,\frac{(\varphi_1^{(0)} - \varphi^{(1)})\sqrt{k(x_1, y_1)}\,a_{22} - (\varphi_2^{(0)} - \varphi^{(1)})\sqrt{k(x_2, y_2)}\,a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3.2}$$

Здесь

$$a_{11} = K_0(\lambda r_0^{(1)}) - K_0(\lambda h_1), \qquad a_{22} = K_0(\lambda r_0^{(2)}) - K_0(\lambda h_2)$$

$$a_{12} = a_{21} = K_0(\lambda \rho) - K_0(\lambda \delta)$$

Дебит второй скважины получим, заменив в (3.2) индекс 1 индексом 2.

Поступило 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949.
2. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ С ЗАДАННЫМ ДЕБИТОМ

В. А. БЕРКУН

(*Харьков*)

Рассматривается упругий однородный бесконечный пласт, характеризуемый постоянным коэффициентом пьезопроводности $\varkappa$.

Давление на бесконечности принимается постоянным и равным начальному. Пласт дренируется круговой цилиндрической скважиной, дебит которой задан степенной функцией времени. Для этих условий получено общее решение задачи при любом показателе степени, вещественная часть которого более -1.

Давление в пласте для рассматриваемой задачи есть функция расстояния от оси скважины (т. е. оси симметрии) r и времени t. Кроме того, давление однозначно характеризуется радиусом скважины a и показателем α.

Обозначим эту функцию через $p(r, t; a, \alpha)$. Задача приводит к интегрированию уравнения

$$\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (r \geqslant a, \ \varkappa = \mathrm{const} > 0, \ t > 0) \tag{1}$$

при краевых условиях

$$p(r, 0; a, \alpha) = p_0, \qquad p(\infty, t; a, \alpha) = p_0 \qquad (p_0 = \mathrm{const})$$

$$\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=a} = bt^{\alpha} \tag{2}$$

где коэффициент b приводит размерность правой части последнего равенства к размерности левой части. В дальнейшем для удобства полагаем $b = 1$.

Положим далее $\operatorname{Re}\alpha > -1$. При этом условии существует изображение Лапласа степенной функции.

Воспользовавшись теоремой Дюамеля [1], решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$p_0 - p(r, t; a, \alpha) = \Delta p(r, t; a, \alpha) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} g(r, \tau; a, 0)\,d\tau, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1$$

$$g(r, t; a, 0) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta p(r, t; a, 0) \tag{3}$$