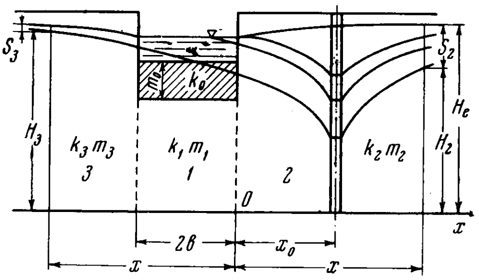
РАСЧЕТ ПРИТОКА ПОДЗЕМНЫХ ВОД К СКВАЖИНАМ В ДОЛИНАХ РЕК С УЧЕТОМ ЗАИЛЕННОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ РУСЛОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ

Ф. М. БОЧЕВЕР, Н. Н. ЛАПШИН, Э. М. ХОХЛАТОВ

(*Москва*)

Фильтрационные расчеты скважин, располагающихся вблизи рек, существенно осложняются несовершенством речных русел, т. е. неполной врезкой русел в водоносный пласт, а также заиленностью русловых отложений и наличием в их составе слабопроницаемых глинистых прослоев, затрудняющих фильтрацию поверхностных вод из реки в водоносный пласт.



Фиг. 1

Будем считать, как это принято в работах [1–4], что заиленность и неоднородность русловых отложений в фильтрационном отношении проявляется одинаково и может оцениваться обобщенно.

Всю область фильтрации к скважине в этом случае можно разделить на три зоны (фиг. 1): *1* — русловую, в которой происходит фильтрация речных вод через экранирующий слабопроницаемый заиленный глинистый слой мощностью m_0 и средним коэффициентом фильтрации k_0 в лежащие ниже песчаные отложения мощностью m_1 и коэффициентом фильтрации k_1, *2* и *3* — береговые зоны со средней мощностью m_2 и m_3 и коэффициентами фильтрации k_2 и k_3.

В обеих береговых зонах существует бытовой поток подземных вод, направленный к реке или от реки, а в зоне *2* в точке с координатами $(x_0, 0)$ располагается скважина.

Учитывая, что водопроводимость заиленного и глинистого слоя в русле сравнительно мала $(k_0 \ll k_1)$, пренебрежем в нем горизонтальными составляющими скорости фильтрации.

Учитывая, что при длительной откачке из скважины в условиях постоянной фильтрации воды из реки движение подземных вод довольно быстро приобретает установившийся характер, исходное уравнение для русловой части можно принять в таком виде

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \alpha^2 S_1 = 0 \qquad \left(S_1 = H_{e1} - H_1(x),\ \alpha^2 = \frac{k_0}{k_1 m_1 m_0}\right) \tag{1}$$

Здесь H_{e1} и $H_1(x)$ — напоры до начала откачки из скважины и в процессе откачки соответственно.

Граничные условия здесь следующие:

$$x = 0, \quad S_1 = S_1(0); \qquad x = -2b, \quad S_1 = S_1(-2b) \tag{2}$$

Решением уравнения (1) при указанных условиях будет

$$S_1 = S_1(0)\frac{\operatorname{sh}[\alpha(2b + x)]}{\operatorname{sh}(2b\alpha)} - S_1(-2b)\frac{\operatorname{sh}(\alpha x)}{\operatorname{sh}(2b\alpha)} \tag{3}$$

Для береговых зон *2* и *3* дифференциальные уравнения могут быть сведены к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = 0 \qquad (S_i = H_{ei} - H_i(x, y)) \quad (i = 2, 3) \tag{4}$$

Здесь S_i — понижение напора в береговых зонах.

Уравнения (4) должны решаться при условиях четвертого рода на контакте береговой и русловой зон

$$x = 0, \quad x = -2b; \qquad k_i m_i \frac{\partial S_i}{\partial x} = k_1 m_1 \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad S_i = S_1 \tag{5}$$

Однако если учесть (2) и (3) для S_1, то вместо (5) можно получить условия третьего рода

$$x=0,\qquad \frac{\partial S_2}{\partial x}=\lambda_2\left[S_2(0)-\frac{S_3(-2b)}{\mathrm{ch}(2b\alpha)}\right];$$

$$x=-2b,\qquad \frac{\partial S_3}{\partial x}=\lambda_3\left[\frac{S_2(0)}{\mathrm{ch}(2b\alpha)}-S_3(-2b)\right] \tag{6}$$

$$\lambda_i=\frac{k_1m_1}{k_im_i}\alpha\,\mathrm{cth}(2b\alpha)\qquad (i=2,\,3)$$

На скважине

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial S_2}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi k_2m_2}=\mathrm{const},\qquad r=[(x-x_0)^2+y^2]^{1/2} \tag{7}$$

В удаленных областях

$$x,\ y\to\pm\infty,\qquad S_i=0 \tag{8}$$

Представим решение для второй зоны в виде суммы двух функций

$$S_2=S_{2.1}+S_{2.2} \tag{9}$$

Здесь $S_{2.1}$ — решение, учитывающее особенность в точке расположения скважины (напор и производная от напора в этой точке равны бесконечности), а $S_{2.2}$ — решение для той же зоны при отсутствии особых точек. Функцию $S_{2.1}$, удовлетворяющую указанному условию, с учетом (7) можно выразить так:

$$S_{2.1}=q\ln r,\qquad q=-Q\,/\,2\pi k_2m_2 \tag{10}$$

Применяя к уравнениям (4) преобразование Фурье, имеем

$$\frac{d^2U_i}{dx^2}-\sigma^2U_i=0,\qquad U_i(x,\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(x,y)e^{-i\sigma y}\,dy \tag{11}$$

Решения этих уравнений при условиях (8) имеют вид

$$U_{2.2}=Ae^{-x\sigma},\qquad U_3=Be^{x\sigma},\qquad \text{где } A,\ B=\mathrm{const}$$

Преобразование Фурье относительно выражения (10) дает

$$U_{2.1}=\frac{qe^{-|x-x_0|\sigma}}{2\sigma} \tag{12}$$

В соответствии с этим общее решение уравнения (4) примет вид

$$U_2=\frac{q}{2\sigma}e^{-|x-x_0|\sigma}+Ae^{-x\sigma},\qquad U_3=Be^{x\sigma} \tag{13}$$

Постоянные A и B определяются из условий (6). В результате получим

$$U_2=\frac{q}{2\sigma}\left(e^{-|x-x_0|\sigma}-Me^{-(x+x_0)\sigma}\right),\qquad U_3=\frac{\lambda_3q(1-M)}{2\sigma(\lambda_3+\sigma)\,\mathrm{ch}(2b\alpha)}e^{-(x_0-x-2b)\sigma} \tag{14}$$

$$M=\frac{(\lambda_3+\sigma)(\lambda_2-\sigma)\mathrm{ch}^2(2b\alpha)-\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_3+\sigma)(\lambda_2+\sigma)\mathrm{ch}^2(2b\alpha)-\lambda_2\lambda_3}$$

Переход от выражения (14) к оригиналам исходных функций приводит к следующим выражениям (для простоты полагаем $\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ или, что то же, $k_2m_2=k_3m_3=km$):

$$S_2=\frac{Q}{2\pi km}(R_1+R_2)\quad (x>0),\qquad S_3=\frac{Q}{2\pi km}R_3\quad (x<-2b) \tag{15}$$

Здесь

$$R_1=\ln\rho\,/\,r,\qquad R_2=I_{2^+}+I_{2^-},\qquad R_3=I_{3^-}-I_{3^+} \tag{16}$$

$$\rho=[(x+x_0)^2+y^2]^{1/2},\qquad I_{i^\pm}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-u\xi_{i\pm}}}{1+u}\cos(u\eta\pm)\,du \tag{17}$$

$$\xi_{2\pm} = \lambda(x + x_0) \left[1 \pm \frac{1}{\operatorname{ch}(2b\alpha)}\right], \qquad \xi_{3\pm} = \lambda(x_0' - x - 2b) \left[1 \pm \frac{1}{\operatorname{ch}(2b\alpha)}\right] \tag{18}$$

$$\eta_\pm = \lambda y \left[1 \pm \frac{1}{\operatorname{ch}(2b\alpha)}\right], \qquad \lambda = \frac{k_1 m_1}{km} \alpha \operatorname{cth}(2b\alpha) \tag{19}$$

Функция R_1 в формуле (15) может быть названа основным гидравлическим сопротивлением при действии скважины вблизи реки при условии, что река имеет непосредственную гидравлическую связь с водоносным горизонтом, т. е. без учета несовершенства русла, его заиленности и неоднородности (формула Форхгеймера).

Функция R_2 представляет собой дополнительное гидравлическое сопротивление, обусловленное именно этими факторами, т. е. несовершенством, заиленностью и неоднородностью.

Функция R_3 характеризует гидравлическое сопротивление фильтрационного потока на противоположном (по отношению к скважине) берегу реки.

Значения интеграла (17) представлены в таблице.

$\xi_{i\pm}$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	2	3
$\eta_\pm = 0$	10.9367	8.6339	6.3379	4.0785	2.0146	0.5964	0.3613	0.2621
10^{-4}	8.6288	8.2875	6.3329	4.0785	2.0146	0.5964	0.3613	0.2621
$3\cdot10^{-4}$	8.5345	7.4831	6.2944	4.0781	2.0146	0.5964	0.3613	0.2621
10^{-3}	6.3321	6.3278	5.9917	4.0736	2.0146	0.5964	0.3613	0.2621
$3\cdot10^{-3}$	5.2367	5.2367	5.1892	4.0358	2.0142	0.5963	0.3613	0.2621
10^{-2}	4.0440	4.0531	4.0429	3.7361	2.0101	0.5963	0.3613	0.2621
$3\cdot10^{-2}$	2.9734	2.9707	2.9755	2.9515	1.9751	0.5961	0.3613	0.2621
10^{-1}	1.8679	1.8458	1.8694	1.8798	1.7022	0.5934	0.3608	0.2619

При определении понижения уровня на линии, параллельной оси x и проходящей через скважину, т. е. при $y = 0$, функция R_i выражается следующим образом:

$$R_i = -[e^{\xi_{i-}} Ei(-\xi_{i-}) \pm e^{\xi_{i+}} Ei(-\xi_{i+})] \qquad (i = 2.3) \tag{20}$$

Здесь Ei — символ интегральной показательной функции. Знак плюс принимается при определении R_2, а знак минус при определении R_3.

Полученное решение позволяет сделать ряд интересных выводов об особенностях фильтрации подземных вод вблизи несовершенных русел.

Из рассмотрения таблицы следует, что максимального значения дополнительное сопротивление, обусловленное несовершенством русла, достигает в точке $x = y = 0$, т. е. на урезе реки, в створе, проходящем через опытную скважину. С удалением от этой точки как в направлении, перпендикулярном реке, так и вдоль реки дополнительное сопротивление уменьшается. Таким образом, область, в которой сказывается дополнительное сопротивление, локализуется, и границы ее могут быть выявлены по приведенным выше решениям, если известен основной параметр сопротивления русла λ. За пределами этой области оказывается возможным рассчитывать понижение уровня, не учитывая несовершенства русла реки.

Из приведенных соотношений видно также, что при $B \geqslant (1.5 \div 2)\alpha^{-1}$ можно принимать ширину реки равной бесконечности, т. е. не учитывать влияние противоположного берега на понижение уровня в зоне расположения скважины. В этом случае оба интеграла в выражении (16) имеют одинаковые значения и функция $R_2 = 2I_2$, а $R_3 = 0$. Аналогичная в математическом отношении задача для таких условий рассматривалась в работах [6, 7].

Решение для одной скважины можно путем сложения фильтрационных течений обобщить для расчета системы любым образом расположенных взаимодействующих скважин. В этом случае

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j \tag{21}$$

Здесь S — суммарное понижение уровня в любой точке пласта под влиянием откачки из всех скважин; S_j — понижение, обусловленное действием j-й скважины ($j = 1, 2, \ldots, n$; n — общее число скважин).

Полученное решение может быть использовано и для определения показателя несовершенства русла реки по данным опытных откачек. Для этого лучше всего использовать показания наблюдательных скважин, расположенных в непосредственной близости от реки, так как именно в этой области величина R_2 максимальна, и, следовательно, эти скважины в наибольшей степени испытывают влияние несовершенства русла.

Наблюдательные скважины следует размещать симметрично относительно середины реки. В этом случае, как видно из выражений (18), $\xi_2^\pm = \xi_3^\pm$ и, следовательно, $I_2^+ = I_3^+$, $I_2^- = I_3^-$. Учитывая это обстоятельство, можно, складывая и вычитая понижения уровней S_2 и S_3 в соответствующих скважинах, определить $I_2^\pm$.

По известным значениям $I_i^\pm$, пользуясь таблицей, далее находятся $\xi_2^\pm$ и $\xi_3^\pm$, а из них показатель — λ, и из формул (19) — величина α.

Поступило 11 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. К вопросу о расчете подземных водозаборов в условиях плоского движения грунтовых вод. Докл. АН СССР, 1949, т. 14, № 2.
2. Григорьев В. М. Теоретические основы расчета инфильтрационных водозаборов с учетом заиления речных русел. Водоснабжение и санитарная техника, 1960, № 6,
3. Шестаков В. М. Оценка сопротивления ложа водоемов при гидрогеологических расчетах. Разведка и охрана недр, 1964, № 5.
4. Бочевер Ф. М. Оценка производительности береговых водозаборов с учетом несовершенства речных русел. Тр. ВНИИ ВОДГЕО, 1966, вып. 13.
5. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехтеоретиздат, 1951.
6. Альтшулер Л. М. Температурное поле труб в массиве. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, вып. 7.
7. Альтшулер Л. М. О методе «дополнительного слоя» в задачах Форхгеймера. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 2.
8. Hantush M. S. Wells near streams with semipervious beds. J. Geoph. Res., 1965, vol. 70, No. 12.

К ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СКВАЖИН В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

С. Д. ОСЯТИНСКИЙ

(*Москва*)

Рассматривается задача о нахождении потенциала скорости и дебита скважины, эксцентрично расположенной в круглом неоднородном пласте, при известных значениях потенциала на контуре питания и контуре скважины.

Решение этой же задачи получено для нескольких скважин, расположенных в круглом и полубесконечном неоднородных пластах. Размеры скважин предполагаются малыми сравнительно с их взаимным удалением и размерами пласта.

1. Пусть в круговом неоднородном пласте радиуса R_1, проницаемость которого удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{k} - \lambda^2\sqrt{k} = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

и ни в одной точке рассматриваемой области не обращается в нуль, имеется эксцентрично расположенная совершенная скважина радиуса r_0. Необходимо определить потенциал скорости и дебит скважины Q, если заданы значения потенциала на границах рассматриваемой области

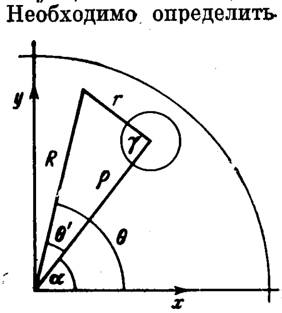
$$\varphi = \varphi^{(1)}, \qquad \varphi = \varphi^{(0)} = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

на контуре питания и контуре скважины соответственно. Движение несжимаемой жидкости в плоском неоднородном слое постоянной мощности описывается уравнением

$$\operatorname{div} k \operatorname{grad} \varphi = 0 \tag{1.3}$$

Дебит определяется формулой

$$Q = \oint k \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds \tag{1.4}$$



Фиг. 1

где контур интегрирования охватывает скважину [1]. Введем функцию $\Phi = \sqrt{k}\varphi$, называемую приведенным потенциалом, тогда условие (1.2) и выражения (1.3) и (1.4)