

Необходимость в знании поля давления, вызванного пуском в работу скважины, возникает при исследовании взаимодействия скважин друг с другом, при количественном изучении перетока жидкости из трещин в блоки, и обратно и т. п.

Поступило 12 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., Гостехиздат, 1956.
2. Медведский Р. И. Об изменении давления и расхода в скважинах пористо-трещиноватого коллектора. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Warren J. E., Root P. J. The behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Petr. Eng. J., 1963, No. 3.
4. Авакян Э. А. Некоторые приближенные решения задач фильтрации в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.

ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРЫВА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТ ГРАНИЦЫ СЛОЕВ

С. В. ВАСИЛЬЕВ, Н. Н. ВЕРИГИН

(Москва)

1. Постановка задачи. Рассмотрим фильтрацию из канала или удлиненного водохранилища в неоднородно-слоистой толще грунтов (фиг. 1, 2, 3). Будем считать, что слоистая толща состоит из чередующихся друг с другом более мощных сильнопроницаемых слоев грунта 1, 3 и менее мощных слабопроницаемых слоев 2 и 4. Допустим также, что грунтовые воды залегают глубоко (в основании слоистой толщи). Горизонт воды в канале будем считать неизменным.

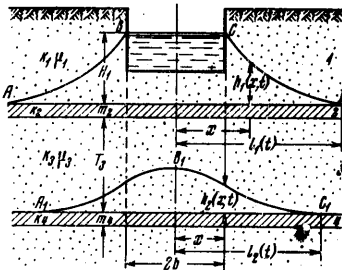
Рассмотрим два основных случая.

1. Предположим, что канал (водохранилище) размещается в пределах сильнопроницаемого слоя (фиг. 1). При таких условиях после наполнения канала верхний хорошо проницаемый слой промачивается весьма быстро. Время промачивания этого слоя без учета бокового растекания может быть определено по известным зависимостям (боковое растекание в этом случае невелико и приближенно может быть оценено по В. В. Ведерникову [1]). При промачивании второго (слабопроницаемого) слоя сразу же начинается растекание фильтрационных вод в первом слое, которое будет тем больше, чем меньше проницаемость второго слоя. В третьем слое будет происходить фильтрация при неполном насыщении пор грунта водой (инфильтрация). После того как вода пройдет через третий слой, начинается растекание ее по кровле четвертого малопроницаемого слоя, сопровождающееся одновременным его насыщением.

Ввиду относительно малой мощности (толщины) и обычно высокой влажности слабопроницаемых слоев, их водонасыщение происходит сравнительно быстро. Поэтому можно считать, что растекание фильтрационных вод в первом и третьем слоях начинается только после полного промачивания соответственно второго и четвертого слоев. В первом слое это растекание будет происходить в условиях подпора от канала и фильтрации из первого слоя в третий через малопроницаемый второй (фиг. 1, область растекания $ABCD$). В третьем слое это растекание будет происходить при наличии инфильтрации воды, просачивающейся сверху из второго слоя и фильтрации из третьего слоя в пятый через малопроницаемый четвертый (фиг. 1, область растекания $A_1B_1C_1$).

Длина областей растекания фильтрационных вод $ABCD$ и $A_1B_1C_1$ при полном промачивании подстилающих малопроницаемых слоев всегда больше, чем при частичном их промачивании. Принимая полное промачивание малопроницаемых слоев, до начала растекания воды в хорошо проницаемых слоях, находим длину растекания с завышением (т. е. с запасом).

Длительность промачивания второго слабопроницаемого слоя может быть определена таким же образом, как и в первом слое.

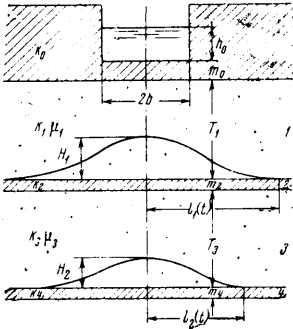


Фиг. 1

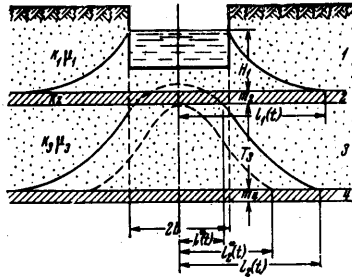
2. Допустим далее, что канал (водохранилище) находится в пределах верхнего малопроницаемого слоя или имеет одежду из малопроницаемого материала (фиг. 2).

При таких условиях после наполнения канала верхний малопроницаемый слой или материал одежды насыщается водой, хотя и медленнее, чем в предыдущем случае, но все же довольно быстро.

При промачивании нижележащего сильнопроницаемого слоя (фиг. 2, слой 1) имеет место фильтрация с неполным насыщением. После того как вода пройдет через этот слой и достигнет подстилающего малопроницаемого слоя (фиг. 2, слой 2), начнется растекание ее в первом слое, сопровождающееся промачиванием второго слоя. Время этого промачивания мало и потому, как и ранее, можно принять, что растекание воды в первом слое начинается после полного промачивания второго слоя.



Фиг. 2



Фиг. 3

Растекание в первом слое будет происходить при наличии инфильтрации воды, просачивающейся сверху из канала, и фильтрации ее вниз из первого слоя в третий (через малопроницаемый второй). Иначе говоря, здесь растекание в первом слое происходит так же, как в третьем слое на фиг. 1. Отличие состоит лишь в том, что инфильтрация сверху в данном случае не зависит от x и t и равна постоянному расходу через верхний малопроницаемый слой. Кроме того, ширина полосы инфильтрации здесь постоянна и равна ширине канала $2b$. Длина потока в первом слое l_1 здесь также будет определяться с **завышением**.

Фильтрация в третьем слое здесь будет происходить так же, как и в первом случае.

Примем, что в сильнопроницаемых слоях горизонтальные составляющие скорости постоянны по высоте, а в слабопроницаемых слоях равны нулю (гипотеза Н. К. Гириного [2]). Тогда фильтрация в первом слое после полного промачивания подстилающего малопроницаемого слоя описывается уравнениями

$$K_1 \frac{\partial^2(0.5h_1^2)}{\partial x^2} - K_2 \left(\frac{h_1 + m_2 + h_k'}{m_2} - J_1 \right) + \varepsilon = \mu_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (b \leq x \leq l_1, 0 \leq t \leq \infty) \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$h_1(b, t) = H_1, \quad h_1(l_1, t) = 0, \quad \mu_1 \frac{dl_1}{dt} = -K_1 \frac{\partial h_1(l_1, t)}{\partial x} \quad (1.2)$$

2) второй случай

зона $0 \leq x \leq b$

$$K_1 \frac{\partial^2(0.5h_+^2)}{\partial x^2} - K_2 \left(\frac{h_+ + m_2 + h_k'}{m_2} - J_1 \right) - K_0 \left(\frac{h_0 + m_0}{m_0} \right) = \mu_1 \frac{\partial h_+}{\partial t} \quad (1.3)$$

зона $b \leq x \leq l_1$

$$K_1 \frac{\partial^2(0.5h_-^2)}{\partial x^2} - K_2 \left(\frac{h_- + m_2 + h_k'}{m_2} - J_1 \right) = \mu_1 \frac{\partial h_-}{\partial t} \quad (1.4)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial h_+(0, t)}{\partial x} = 0, \quad h_+(b, t) = h_-(b, t), \quad \frac{\partial h_+(b, t)}{\partial x} = \frac{\partial h_-(b, t)}{\partial x}, \quad h_-(l_1, t) = 0 \quad (1.5)$$

$$\mu_1 \frac{dl_1}{dt} = -k_1 \frac{\partial h_-(l_1, t)}{\partial x} \quad (1.6)$$

Фильтрация в третьем слое после полного промачивания подстилающего малопроницаемого слоя описывается уравнением

$$K_3 \frac{\partial^2 (0.5h_2^2)}{\partial x^2} - K_4 \left(\frac{h_2 + m_4 + h_k''}{m_4} - J_2 \right) + K_2 \left(\frac{h_1 + m_2}{m_2} \right) = \mu_3 \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (1.7)$$

(0 ≤ x ≤ l₂, t₃ ≤ t ≤ ∞)

при граничных условиях

$$\frac{\partial h_2(0, t)}{\partial x} = 0, \quad h_2(l_2, t) = 0; \quad \mu_3 \frac{dl_2}{dt} = -K_3 \frac{\partial h_2(l_2, t)}{\partial x} \quad (1.8)$$

В уравнениях (1.1)–(1.8) принято: k_{1-4} — коэффициенты фильтрации соответствующих слоев; ε — интенсивность инфильтрации ($\varepsilon > 0$) или испарения ($\varepsilon < 0$); $h_{1,2}(x, t)$ — глубины потоков в первом и третьем слоях в сечении с абсциссой x в момент времени t ; $h_{+,-}$ — глубина потока в первом слое в зонах $0 \leq x \leq b$ и $b \leq x \leq l_1$; $l_{1,2}(t)$ — длины потоков фильтрационных вод в сильно проницаемых слоях первом и третьем; h_k', h_k'' — высоты капиллярного поднятия в слабопроницаемых слоях (втором и четвертом); $J_{1,2}$ — начальные градиенты фильтрации для слабопроницаемых слоев.

Ниже рассматривается случай, когда $J_{1,2} \leq 1$.

Линеаризируем исходные дифференциальные уравнения по способу Буассинеска и допустим, что $\partial h_{1,2} / \partial t \approx 0$; тогда вместо (1.1), (1.3), (1.4) и (1.7) будет

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \alpha_1^2 (h_1 + a_1) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 h_+}{\partial x^2} - \alpha_1^2 (h_+ + a - a_0) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 h_-}{\partial x^2} - \alpha_1^2 (h_- + a) = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 (h_2 + a_2) + \alpha_3^2 (h_1 + m_2) = 0 \quad (1.12)$$

Здесь

$$\alpha_0^2 = \frac{k_0}{k_1 \langle h_1 \rangle m_0}, \quad \alpha_1^2 = \frac{k_2}{k_1 \langle h_1 \rangle m_2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{k_4}{k_3 \langle h_2 \rangle m_4}$$

$$\alpha_3^2 = \frac{k_2}{k_3 \langle h_2 \rangle m_2}, \quad \beta_0 = \alpha_0^2 / \alpha_1^2, \quad a_0 = \beta_0 (h_0 + m_0)$$

$$a_1 = m_2 (1 - J_1 + h_k' / m_2 + \varepsilon / k_2)$$

$$a = m_2 (1 - J_2 + h_k' / m_2), \quad a_2 = m_4 (1 - J_2 + h_k'' / m_4)$$

где $\langle h_1 \rangle$ и $\langle h_2 \rangle$ — средние глубины потока в первом и третьем слоях (принимаются равными глубинам на оси симметрии канала, т. е. $\langle h_1 \rangle = H_1$ и $\langle h_2 \rangle = h_2(0, t) = H_2(t)$).

Рассмотрим отдельно фильтрацию в первом и третьем сильнопроницаемых слоях.
2. Фильтрация в первом слое. Решение уравнения (1.11) при первых двух условиях (1.2) будет

$$\frac{h_1}{\langle h_1 \rangle} = \frac{(1 + r_1) \operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - x) + r_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (x - b)}{\operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - b)} - r_1, \quad r_1 = \frac{a_1}{\langle h_1 \rangle} \quad (2.1)$$

Из последнего условия (1.2) имеем

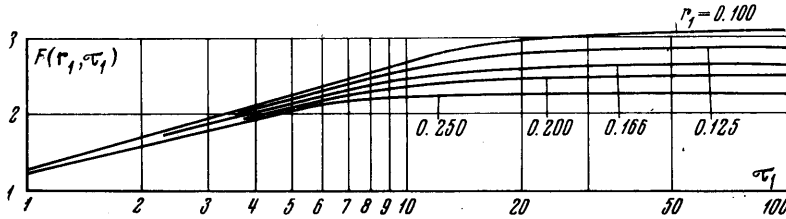
$$\mu_1 \frac{dl_1}{dt} = k_1 \frac{(H_1 + a_1) \alpha_1 - a_1 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (l_1 - b)}{\operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - b)} \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2) в пределах от l_1 до b и от t до 0, находим длину потока l_1

$$l_1 = b + \frac{1}{\alpha_1} F(r_1, \tau_1) \quad (2.3)$$

$$F(r_1, \tau_1) = \text{Arch} \left[\frac{1}{r_1} (1 - e^{-r_1 \tau_1}) + 1 \right], \quad \tau_1 = \frac{k_2 t}{\mu_1 m_2} \quad (2.4)$$

где $2b$ — ширина канала по урезу воды. Функция $F(r_1, \tau_1)$ может определяться из графика (фиг. 4).



Фиг. 4

Для стационарного режима ($t \rightarrow \infty$) получится

$$l_1 = b + \frac{1}{\alpha_1} \text{Arch} \left(\frac{1}{r_1} + 1 \right) \quad (2.5)$$

Решения уравнений (1.10) и (1.11) при условиях (1.5) будут для зоны $0 \leq x \leq b$

$$\frac{h_+}{\langle h_1 \rangle} = \frac{[r - r_0 \text{ch } \alpha_1 (l_1 - b)] \text{ch } \alpha_1 x}{\text{ch } \alpha_1 l_1} + r_0 - r, \quad r_0 = \frac{a_0}{\langle h_1 \rangle} \quad (2.6)$$

для зоны $b \leq x \leq l_1$

$$\frac{h_-}{\langle h_1 \rangle} = \frac{r_0 \text{sh } \alpha_1 b \text{sh } \alpha_1 (l_1 - x) + r \text{ch } \alpha_1 x}{\text{ch } \alpha_1 l_1} - r, \quad r = \frac{a}{\langle h_1 \rangle} \quad (2.7)$$

Длина потока l_1 находится из условия на границе растекания (1.6)

$$l_1 = \frac{1}{\alpha_1} \text{Arsh} \{ \text{sh } \alpha_1 b [p - (p - 1) e^{-r \tau_1}] \}, \quad p = \frac{a_0}{a} \quad (2.8)$$

Интегрирование производилось здесь, как и для первого случая, в пределах от l_1 до b и от t до 0. Для стационарного режима ($t \rightarrow \infty$) имеем

$$l_1 = \frac{1}{\alpha_1} \text{Arsh} (p \text{sh } \alpha_1 b) \quad (2.9)$$

3. Фильтрация в третьем слое. Подставляя в формулу (1.12) значение глубин потока h_1 для первого случая по (2.1) и для второго случая по формулам (2.6), (2.7), будем иметь
1 случай

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 h_2 = f(x)$$

$$f(x) = \alpha_2^2 a_2 - \alpha_3^2 (m_2 - a_1) - \alpha_3^2 (R_1 + R_2) \text{sh } \alpha_1 (l_1 - x) - \alpha_3^2 R_2 \text{sh } \alpha_1 (x - b) \quad (3.1)$$

2 случай
зона $0 \leq x \leq b$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 h_2 = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \alpha_2^2 a_2 - \alpha_3^2 (m_2 + a_0 - a) - \alpha_3^2 [R_3 - R_4 \text{ch } \alpha_1 (l_1 - b)] \text{ch } \alpha_1 x \quad (3.2)$$

зона $l \leq x \leq l_1$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 h_2 = \psi(x)$$

$$\psi(x) = \alpha_2^2 a_2 - \alpha_3^2 (m_2 - a) - \alpha_3^2 [R_3 \operatorname{ch} \alpha_1 x + R_4 \operatorname{sh} \alpha_1 b \operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - x)] \quad (3.3)$$

где $R_1 = H / \operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - b)$, $R_2 = a_1 / \operatorname{sh} \alpha_1 (l_1 - b)$, $R_3 = a / \operatorname{ch} \alpha_1 l_1$, $R_4 = a_0 / \operatorname{ch} \alpha_1 l_1$. Решения неоднородных уравнений (3.1)–(3.3) при первых двух условиях (1.8) выражаются в элементарных функциях. Однако длину потока в третьем слое l_2 приходится находить посредством численного интегрирования последнего уравнения (1.8).

Рассмотрим упрощенный метод решения уравнения (1.12). Для этого глубину потока в первом слое осредним по времени и по длине, т. е. примем в (1.12) $h_1(x, t) = \gamma h_1(0, t) = \gamma H_1$.

Здесь γ — коэффициент осреднения. Для первого и второго, случаев этот коэффициент соответственно равен 0.5 и 0.25.

Тогда уравнение (1.12) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 (h_2 - a_2^*) = 0 \quad (3.4)$$

$$a_2^* = \left[\frac{k_2 m_4}{k_4} (\eta + 1) - a_2 \right], \quad \eta = \gamma H_1 / m_2$$

Решение уравнения (3.4) при первых двух условиях (1.8) будет

$$\frac{h_2}{\langle h_2 \rangle} = r_2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x}{\operatorname{ch} \alpha_2 l_2} \right), \quad r_2 = \frac{a_2^*}{\langle h_2 \rangle} \quad (3.5)$$

Длину области растекания l_2 найдем из последнего условия (1.8), т. е.

$$\mu_3 \frac{dl_2}{dt} = k_3 a_2^* \alpha_2 \operatorname{th} \alpha_2 l_2 \quad (3.6)$$

После интегрирования (3.6) в пределах от l_2 до b и от t до t_3 находим

$$l_2 = \frac{1}{\alpha_2} \operatorname{Arsh} (\operatorname{sh} \alpha_2 b e^{\tau_2}), \quad \tau_2 = \frac{k_4 (t - t_3)}{\mu_3 m_4} \quad (3.7)$$

где t_3 — время просачивания через третий слой при неполном его насыщении, равное

$$t_3 = \frac{T_3}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{k_3} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = K_2 \frac{H_1 + m_2}{m_2} \quad (3.8)$$

Средняя глубина потока будет

$$\langle h_2 \rangle = h_2(0, t) = a_2^* (1 - 1 / \operatorname{ch} \alpha_2 l_2) \quad (3.9)$$

Из (3.9) имеем

$$l_2 = \frac{1}{\alpha_2} \operatorname{Arch} \frac{r_2}{r_2 - 1} \quad (3.10)$$

При заданном времени t из совместного решения (3.7) и (3.10) находятся величины $\langle h_2 \rangle$ и l_2 .

В рассмотренной задаче предполагалось, что во всем третьем слое свободная поверхность фильтрационного потока находится ниже подошвы второго слоя.

Однако возможны случаи, когда пьезометрический уровень в третьем слое окажется выше подошвы второго слоя и образуются две зоны (фиг. 3): зона a , где поток в третьем слое подпирается поток в I слое, и зона b , где этот подпор отсутствует.

Тогда исходными линеаризованными уравнениями будут зона a ($0 \leq x \leq l^*$)

$$\frac{\partial^2 h_a}{\partial x^2} - \alpha_4^2 (h_a + a_3) + \alpha_3^2 (h_1 + m_2) = 0 \quad (3.11)$$

зона b ($l^* \leq x \leq l_2$)

$$\frac{\partial^2 h_6}{\partial x^2} - \alpha_2^2 (h_6 + a_2) + \alpha_3^2 (h_1 + m_2) = 0 \quad (3.12)$$

$$\alpha_4^2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad \alpha_3 = \frac{m_4(1 - J_2) - \beta_1 T_3}{1 + \beta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}$$

Принимаем при $x = 0$ и $x = l_2$ первые два условия (1.8) и дополнительно на границе между зонами a и b условия четвертого рода, т. е.

$$x = l^*, \quad h_a = h_6 = T_3 = \text{const}, \quad \frac{\partial h_a}{\partial x} = \frac{\partial h_6}{\partial x} \quad (3.13)$$

Осреднив глубину потока в первом сильнопроницаемом слое, как в предыдущем случае ($h_1 = \gamma H_1$), получим решение уравнений (3.11) и (3.12) в виде зона a ($0 \leq x \leq l^*$)

$$h_a = \frac{\alpha_2 \text{ch } \alpha_4 x}{\text{sh } \alpha_4 l^* [\alpha_2 \text{cth } \alpha_4 l^* + \alpha_4 \text{th } \alpha_2 (l_2 - l^*)]} = \left\{ \sigma_1 + a_2^* \left[1 - \frac{1}{\text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*)} \right] \right\} - \sigma_1 \quad (3.14)$$

$$h_6 = \frac{\text{зона } b \ (l^* \leq x \leq l_2)}{-\alpha_4 \text{sh } \alpha_2 (l_2 - x)} \frac{\left\{ \sigma_1 + a_2^* \left[1 - \frac{1}{\text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*)} \right] \right\} + a_2^* \left[1 - \frac{\text{ch } \alpha_2 (x - l^*)}{\text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*)} \right]}{\text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*) [\alpha_2 \text{cth } \alpha_4 l^* + \alpha_4 \text{th } \alpha_2 (l_2 - l^*)]} \quad (3.15)$$

$$\sigma_1 = \frac{\beta_1 m_2 (\eta + 1)}{1 + \beta_1}$$

Граница между зонами a и b размещается на расстоянии l^* от оси симметрии потока. Это расстояние находится из уравнения (3.14) при $x = l^*$ и $h_a = T_3$.

Длина потока l_2 определяется из уравнения

$$\frac{dl_2}{dt} = - \frac{k_3 \alpha_2 a_2^* [1 - T_3/a_2^* - \text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*)]}{\mu_3 \text{sh } \alpha_2 (l_2 - l^*)} \quad (3.16)$$

После интегрирования (3.16) в пределах от l_2 до l_2^* и от t до t^* получим

$$l_2 - l_2^* = \frac{1}{\alpha_2} \text{Arch} \left[1 - \frac{T_3}{a_2^*} + \left(\text{ch } \alpha_2 l^* - 1 + \frac{T_3}{a_2^*} \right) e^{\tau_2 t^*} \right], \quad \tau^* = \frac{k_4 (t - t^*)}{\mu_3 m_4} \quad (3.17)$$

Средняя глубина потока будет

$$\langle h_2 \rangle = h_a(0, t) = \frac{\alpha_2}{\text{sh } \alpha_4 l^* [\alpha_2 \text{cth } \alpha_4 l^* - \alpha_4 \text{th } \alpha_2 (l_2 - l^*)]} \times \left\{ \sigma_1 - a_2^* \left[1 - \frac{1}{\text{ch } \alpha_2 (l_2 - l^*)} \right] \right\} - \sigma_1 \quad (3.18)$$

Здесь t^* — время подъема свободной поверхности в третьем слое до подошвы второго слоя (фиг. 3), l_2^* — длина фильтрационного потока в третьем слое в момент времени t^* . Эти величины определяются по формулам (3.7) и (3.10) для $\langle h_2 \rangle = T_3$.

При проницаемости четвертого слоя значительно меньшей проницаемости второго слоя ($k_4 \ll k_2$) длина зоны растекания в третьем слое может быть больше, чем в первом ($l_2 > l_1$). Этот случай должен рассматриваться отдельно.

Фильтрацию во всех нижележащих слоях (пятом, шестом и т. д.) можно рассматривать аналогично тому, как это принято для 3 и 4 слоев.

Поступило 23 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.—Л., Госстройиздат, 1939.
2. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод. Сб. статей «Гидрогеология и инженерная геология», 1949, № 9.