

3. Абелишвили Г. В. Результаты экспериментальных исследований нижней границы применимости закона Дарси. Тр. Груз. н.-и. ин-та гидротехн. и мелиор., 1963, вып. 22.
4. Абелишвили Г. В., Кацарава Т. Е., Терлецкая М. Н. О роли фильтрационных параметров грунтов в расчете прогноза режима грунтовых вод. Тр. корр. совещ. по гидротехн., 1967, вып. 35.
5. Бондаренко Н. Ф. Учет следов сдвиговой прочности воды при расчете горизонтального дренажа. Докл. Всес. Акад. с./х. н. им. Ленина, 1966, № 9.

### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТОМ ПЛАСТЕ

Р. И. МЕДВЕДСКИЙ (Баку)

Известные приближенные методы, разработанные для исследования упругого режима фильтрации жидкости в пористых пластах, оказываются, как правило, малоэффективными при решении соответствующих задач для пористо-трещиноватых пластов. Большим недостатком упомянутых методов является и то, что погрешность получаемых с их помощью приближений не может быть найдена иначе, как сравнением с точным решением. Данные обстоятельства побуждают к поиску более эффективных приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации жидкости в пористо-трещиноватом пласте. Излагается метод последовательных приближений для исследования некоторых явлений при упругом режиме фильтрации в пористо-трещиноватом коллекторе, проницаемость пористых блоков которого пренебрежимо мала. Этот метод позволяет в ряде случаев находить пущие приближения с заранее заданной погрешностью.

1. Об одном методе последовательных приближений положительных интегральных операторов, основанном на неравенствах Йенсена. Пусть  $j(x)$  — некоторая функция, определенная в промежутке  $[a, b]$ ,  $0 \leq a < b \leq \infty$ , а  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  — некоторый конечный набор точек из этого промежутка. Определим оператор  $T$  равенством:

$$Tf(x) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n)$$

где  $t_i$  — система положительных чисел.

Если  $f(x)$  — какая-либо выпуклая вниз функция в  $[a, b]$ , то имеет место следующее неравенство Йенсена [1]:

$$Tf(x) > |T|f(X), \quad X = Tx / |T| \quad (1.1)$$

где  $|T| = t_1 + t_2 + \dots + t_n$  — норма оператора  $T$ .

Пусть теперь оператор  $T$  разложен на сумму двух положительных операторов  $T_1$  и  $T_2$ , т. е.  $T = T_1 + T_2$ .

Тогда, применяя к каждому из выражений  $T_i f(x)$  неравенство Йенсена (1.1), получаем

$$Tf(x) = T_1f(x) + T_2f(x) > |T_1|f(X_1) + |T_2|f(X_2), \quad X_i = T_i x / |T_i| \quad (1.2)$$

Рассматривая  $|T_1|$  и  $|T_2|$  как два положительных числа,  $X_1$  и  $X_2$  — как две точки из промежутка  $[a, b]$ , согласно неравенству Йенсена будем иметь

$$|T_1|f(X_1) + |T_2|f(X_2) > (|T_1| + |T_2|)f\left(\frac{|T_1|X_1 + |T_2|X_2}{|T_1| + |T_2|}\right) > |T|f(X) \quad (1.3)$$

Методом полной индукции легко доказывается, что (1.3) справедливо и в том случае, если оператор  $T$  разложен в сумму не двух, а любого числа положительных операторов. Таким образом, пусть  $T = \Sigma T_i$ . Тогда, объединяя (1.1) — (1.3), получаем

$$Tf(x) > \Sigma |T_i|f(X_i) > |T|f(X) \quad (1.4)$$

Неравенство вида (1.4) можно получить и тогда, когда  $f(x)$  уже не является выпуклой вниз, однако можно найти функцию  $y(x)$  такую, что суперпозиция  $f_s(x) = f[y(x)]$  будет выпуклой вниз. Тогда для функции  $f_s(x)$  уже справедливо (1.4)

$$Tf_s(x) > \Sigma |T_i|f_s(X_i) > |T|f_s(X)$$

Производя здесь замену переменных, находим

$$Tf(x) > \sum |T_i|f(X_{is}) > |T|f(X_s), \quad X_{is} = y[T_i y_1(x) / |T_i|] \quad (1.5)$$

Здесь  $y_1(x)$  — обратная к  $y(x)$  функция.

Соответствующим предельным переходом можно доказать, что неравенства (1.4) или (1.5) справедливы не только для дискретных, но и для любых положительных операторов  $T$ , ставящих в соответствие любой положительной функции  $f(x) \geq 0$  положительную же функцию  $Tf(x) \geq 0$ .

В дальнейшем при ссылках на (1.4) или (1.5) предполагается, что  $T$  и  $T_i$  — положительные операторы.

Неравенства (1.4) имеют следующее значение.

Очень часто случается, что выражение  $Tf(x)$  при выпуклой вниз функции  $f(X)$  труднодоступно вычислению, в то время как величину  $|T|f(X)$  удается вычислить без особого труда. Согласно (1.4) эта последняя величина дает нижнюю оценку для исходной. Во многих случаях эта нижняя оценка является довольно хорошим приближением для  $Tf(x)$ . Когда же первая оценка дает грубое приближение, то лучшее, согласно (2.4), можно получить, расщепляя оператор  $T$  на сумму нескольких положительных операторов. Еще лучшее приближение будет получено, если каждый из этих последних операторов или некоторые из них разложить на сумму нескольких других положительных операторов и т. д.

Таким образом, может быть построена монотонно возрастающая последовательность приближений снизу для выражения  $Tf(x)$ , если только  $f(x)$  выпукла вниз и  $T$  — положительный оператор.

Согласно (1.5) возрастающая цепь последовательных приближений снизу для  $Tf(x)$  может быть построена и тогда, когда выпукла вниз некоторая суперпозиция  $f[y(x)]$ , хотя сама она может и не быть выпуклой.

Напротив, если  $f(x)$  выпукла вверх или выпукла вверх некоторая суперпозиция от нее, то знаки в неравенствах (2.4), (2.5) следует заменить на обратные и тот же алгоритм позволяет построить цепь улучшающихся приближений  $Tf(x)$  сверху.

Нередко бывает возможным подобрать две такие суперпозиции функции  $f(x)$ , что одна из них выпукла снизу, другая выпукла сверху, так что пользуясь описанным выше алгоритмом можно построить две цепи последовательных приближений  $Tf(x)$  сверху и снизу, идущие навстречу друг другу, причем в некоторых случаях уже первые приближения расходятся друг с другом значительно, как, например, в [2].

Таким образом, соотношения (1.4), (1.5) могут быть положены в основу метода последовательных приближений выражения с положительным оператором  $T$ .

Эффективность описанного метода последовательных приближений показана ниже на одном частном примере.

**2. Некоторые приближения функции непрерывно действующего линейного источника в бесконечном пористо-трещиноватом пласте.** Тем же способом, как в статье [2], просто доказываемся, что функция непрерывно-действующего линейного источника в бесконечном пористо-трещиноватом пласте, проницаемость пористых блоков и упругость трещин которого пренебрежимо малы, представляется интегралом

$$\Phi(\xi, \lambda) = \int_0^{\infty} P(\lambda, \mu) \Phi_0(\xi, \mu) d\mu \quad (2.1)$$

$$P(\lambda, \mu) = e^{-\lambda - \mu I_0(2\sqrt{\lambda\mu})}, \quad \Phi_0(\xi, \lambda) = -1/2 \text{Ei}(-1/4 \xi^2 / \lambda) \quad (2.2)$$

Очевидно, (2.2) есть функция цилиндрического источника в бесконечном плоско-радиальном пористом пласте.

Выражение (2.1) можно представить в виде

$$\Phi(\xi, \lambda) = T\Phi_0(\xi, \lambda) \quad (2.3)$$

где интегральный оператор  $T$ , порождаемый функцией  $P(\lambda, \mu)$ , очевидно, положителен.

Как легко проверить, функция  $\Phi_0(\xi, e^\lambda)$  выпукла вниз. Следовательно, если  $T$  и  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  — положительные операторы, причем  $T = \sum T_i$ , то на основании (1.5) должно быть

$$T\Phi_0(\xi, \lambda) > \sum |T_i| \Phi_0(\xi, \lambda_{is}) > |T| \Phi_0(\xi, \lambda_s), \quad \lambda_{is} = \exp T_i \ln \lambda / |T_i| \quad (2.4)$$

Для единообразия дальнейших рассуждений оператор  $T$  обозначается иногда символом  $R_1$ .

Первая нижняя оценка. Вычисляя нужные интегралы по образцу работы [2], имеем

$$|R_1| = 1, \quad R_1 \ln \lambda = \ln \lambda - \text{Ei}(-\lambda)$$

Согласно (2.4) первая нижняя оценка функции (2.1) такая:

$$\Phi_1(\xi, \lambda) = \Phi_0(\xi, \lambda_1), \quad \lambda_1 = \exp[\ln \lambda - \text{Ei}(-\lambda)] \quad (2.5)$$

Приближение (2.5) впервые было получено Ворреном и Рутон [3] на основании других соображений. Можно доказать, что для малых  $\xi \leq 0.1$  (это соответствует окрестности скважины) погрешность  $\Phi_1(\xi, \lambda)$  не превышает 0.35%.

Первая нижняя оценка позволяет обнаружить интересную особенность  $\Phi(\xi, \lambda)$ . Именно из (2.5) следует, что  $\lambda_1 > \lambda$ . Так как  $\Phi_0(\xi, \lambda)$  есть возрастающая функция переменного, то  $\Phi(\xi, \lambda) > \Phi_1(\xi, \lambda) = \Phi_0(\xi, \lambda_1) > \Phi_0(\xi, \lambda)$ .

Таким образом, функция цилиндрического источника в пористо-трещиноватом пласте в случае пренебрежимо малой проницаемости пористых блоков всегда больше функции для пористого пласта.

*Вторая нижняя оценка.* Для получения второй и последующих оценок снизу функции  $R_1\Phi_0(\xi, \lambda)$  заметим, что

$$I_0(2\sqrt{\lambda\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} (\lambda\mu)^n$$

Пусть

$$T_n\Phi_0(\xi, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda\mu)^n}{(n!)^2} \Phi_0(\xi, \mu) d\mu$$

Тогда

$$R_1\Phi(\xi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\Phi_0(\xi, \lambda), \quad R_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$$

Таким образом, оператор  $R_1 = T$  естественным образом разбивается на сумму более простых положительных операторов

Положим  $R_2 = R_1 - T_0 = T_1 + T_2 + T_3 \dots$ , где  $R_2$  — положительный оператор

$$\Phi(\xi, \lambda) = T_0\Phi_0(\xi, \lambda) + R_2\Phi_0(\xi, \lambda) > T_0\Phi_0(\xi, \lambda) + |R_2|\Phi_0(\xi, \lambda_2) = \Phi_2(\xi, \lambda)$$

$$\lambda_2 = \exp \frac{R_2 \ln \lambda}{|R_2|}$$

Находим

$$|R_2| = 1 - e^{-\lambda}, \quad R_2 \ln \lambda = \ln \lambda - \text{Ei}(-\lambda) + Ce^{-\lambda}$$

$$T_0\Phi_0(\xi, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda-\mu} \Phi_0(\xi, \mu) d\mu = e^{-\lambda} K_0(\xi)$$

Здесь  $C = 0.5772 = \ln \gamma$  — постоянная Эйлера — Маскерони.

По причинам, изложенным ранее,  $\Phi_2 > \Phi_1$  и, следовательно,  $\Phi_2(\xi, \lambda)$  является лучшим приближением  $\Phi(\xi, \lambda)$ . Если  $\Phi_1(\xi, \lambda)$  является удовлетворительным приближением  $\Phi(\xi, \lambda)$  только для малых значений  $\xi \leq 0.1$ , то  $\Phi_2(\xi, \lambda)$  удалена от  $\Phi(\xi, \lambda)$  не более чем на 3% уже во всем промежутке  $0 \leq \xi \leq 1$ , как будет показано ниже.

*Третья оценка снизу.* Разлагая  $R_2$  на два других положительных оператора  $R_2 = T_1 + R_3$ , получим лучшую оценку снизу

$$\Phi_3(\xi, \lambda) = T_0\Phi_0(\xi, \lambda) + T_1\Phi_0(\xi, \lambda) + |R_3|\Phi_0(\xi, \lambda_3), \quad \lambda_3 = \exp \frac{R_3 \ln \lambda}{|R_3|}$$

Имеем

$$|R_3| = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}, \quad R_3 \ln \lambda = \ln \lambda - \text{Ei}(-\lambda) + C(1 + \lambda)e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

$$T_1\Phi_0(\xi, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda-\mu} \lambda \mu \Phi_0(\xi, \mu) d\mu = \lambda e^{-\lambda} \left[ K_0(\xi) + \frac{1}{2} \xi K_1(\xi) \right]$$

Собирая результаты, имеем

$$\Phi_3(\xi, \lambda) = (1 + \lambda)e^{-\lambda} K_0(\xi) + 1/2 \lambda \xi e^{-\lambda} K_1(\xi) + [1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}] \Phi_0(\xi, \lambda_3)$$

*Четвертая оценка снизу.* Разлагая  $R_3$  в сумму двух других положительных операторов, получим, не приводя вычислений, вполне идентичных предшествующим

$$\Phi_4(\xi, \lambda) = (1 + \lambda + 1/2 \lambda^2) e^{-\lambda} K_0(\xi) + 1/2 \lambda \xi (1 + 3/4 \lambda) K_1(\xi) + 1/16 \lambda^2 \xi^2 e^{-\lambda} K_0(\xi) + [1 - (1 + \lambda + 1/2 \lambda^2) e^{-\lambda}] \Phi_0(\xi, \lambda_4)$$

$$\ln \lambda_4 = \ln \lambda - \text{Ei}(-\lambda) + C(1 + \lambda + 1/2 \lambda^2) e^{-\lambda} - (1 + 3/4 \lambda) e^{-\lambda}$$

Четвертая нижняя оценка является достаточно хорошим приближением  $\Phi(\xi, \lambda)$  в широком диапазоне  $\xi$ , как видно из табл. 1.

3. Верхние приближения функции постоянно-действующего источника в пористо-трещиноватом пласте и сходимост предложенного метода последовательных приближений. Пусть положительный оператор  $R$  такой, что выражение  $R\lambda^{-1}$  имеет смысл. Тогда представляется возможность оценить  $R\Phi_0(\xi, \lambda)$  сверху.

Справедливо разложение

$$\Phi_0(\xi, \lambda) = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left( -\frac{1}{4} \frac{\xi^2}{\lambda} \right) = \ln \frac{4\lambda}{\gamma \xi^2} + F \left( \frac{\xi^2}{4\lambda} \right), \quad F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu} d\mu$$

Здесь  $F(x)$  — выпуклая вверх функция переменного  $x$ .

Таблица 1

$\xi$	$\lambda = 0.1$		$\lambda = 1$		$\lambda = 2$	
	$\Phi_1$	$\Phi_4^\circ$	$\Phi_1$	$\Phi_4^\circ$	$\Phi_1$	$\Phi_4^\circ$
0.1	2.475	2.475	2.820	2.820	3.080	3.080
0.2	1.799	1.799	2.136	2.136	2.391	2.391
0.5	0.965	0.965	1.266	1.266	1.496	1.497
0.8	0.599	0.599	0.855	0.856	1.066	1.068
1	0.451	0.451	0.679	0.679	0.871	0.873
2	0.128	0.128	0.246	0.249	0.359	0.364
3	0.041	0.041	0.096	0.100	0.151	0.164

На основании (1.5) имеет место неравенство

$$RF(\xi^2/4\lambda) < |R|F(\xi^2/4\lambda^\circ)$$

Введем величину

$$\lambda_0 = \exp \frac{R \ln \lambda}{|R|} \quad \text{или} \quad |R| \ln \lambda_0 = R \ln \lambda$$

Принимая во внимание равенство

$$R \ln \frac{4}{\gamma \xi^2} = |R| \ln \frac{4}{\gamma \xi^2}$$

и остальные только что указанные соотношения, получаем

$$R\Phi_0(\xi, \lambda) < \frac{1}{2} |R| \left[ \ln \frac{4\lambda_0}{\gamma \xi^2} + F \left( \frac{\xi^2}{4\lambda^\circ} \right) \right] = |R| \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_0}{\lambda^\circ} + \Phi_0(\xi, \lambda^\circ) \right]$$

Пользуясь этим неравенством, получим оценку сверху второго приближения снизу  $\Phi_2(\xi, \lambda)$ . Поскольку

$$R_2\lambda^{-1} = \int_0^{\infty} [P(\lambda, \mu) - e^{-\lambda-\mu}] \frac{d\mu}{\mu}$$

имеет смысл, то

$$\Phi(\xi, \lambda) < T_0\Phi(\xi, \lambda) + |R_2| \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_2^\circ} + \Phi_0(\xi, \lambda_2^\circ) \right] = \Phi_2^\circ(\xi, \lambda)$$

или более подробно

$$\Phi_2^\circ(\xi, \lambda) = e^{-\lambda} K_0(\xi) + (1 - e^{-\lambda}) \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_2^\circ} + \Phi_0(\xi, \lambda_2^\circ) \right]$$

$$\lambda_2^\circ = (e^\lambda - 1) \left[ \int_0^\lambda (e^\mu - 1) \frac{d\mu}{\mu} \right]^{-1}$$

Тем же самым способом могут быть получены третья, четвертая и последующие оценки сверху, которые будут отличаться от соответствующих оценок снизу только последним слагаемым. В табл. 1 произведено сравнение четвертых приближений снизу и сверху. Сопоставимость их в пределах таблицы достаточно высока. Из табл. 1 следует, что значения  $\Phi(\xi, \lambda)$  при  $\xi = 2, \lambda = 2$  показаны в работе [4] неточно.

Докажем теперь, что последовательность нижних и верхних приближений стремится к  $\Phi(\xi, \lambda)$  равномерно относительно переменного  $\xi$  в каждом конечном интервале его изменения. Пусть

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} T_i, \quad \lambda_n = \exp \frac{R_n \ln \lambda}{|R_n|}, \quad \lambda_n^{\circ} = \frac{|R_n|}{R_n \lambda^{-1}}$$

Тогда  $n$ -я оценка снизу будет

$$\Phi_n |\xi, \lambda| = \sum_{i=1}^n T_i \Phi_0(\xi, \lambda) + |R_i| \Phi_0(\xi, \lambda_n)$$

а  $n$ -я оценка сверху

$$\Phi_n^{\circ}(\xi, \lambda) = \sum_{i=0}^n T_i \Phi_0(\xi, \lambda) + |R_n| \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{\circ}} + \Phi_0(\xi, \lambda_n^{\circ}) \right]$$

Разность соответствующих оценок сверху и снизу

$$\Delta_n(\xi, \lambda) = |R_n| \left[ \frac{1}{2} \ln \lambda_n / \lambda_n^{\circ} + \Phi_0(\xi, \lambda_n^{\circ}) - \Phi_0(\xi, \lambda_n) \right]$$

Просто доказывается

$$\lambda_n^{\circ} = \left( \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \left( \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i \cdot i!} \right)^{-1} > n+1$$

Таким образом,  $\lambda_n^{\circ} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $\lambda_n > \lambda_n^{\circ}$  согласно неравенству о гесметрическом и гармоническом средних

$$\lambda_n = \exp \frac{R_n \ln \lambda}{|R_n|} > \frac{|R_n|}{R_n \lambda^{-1}} = \lambda_n^{\circ}$$

то и  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С увеличением  $\lambda_n$  и  $\lambda_n^{\circ}$  выражение в квадратных скобках в формуле  $\Delta_n(\xi, \lambda)$  стремится к нулю, так как при больших  $\lambda$

$$\Phi_0(\xi, \lambda) \sim \frac{1}{2} \ln \frac{4\lambda}{\gamma \xi^2}, \quad |R_n| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно,  $\Delta_n(\xi, \lambda) \rightarrow 0$ .

Отсюда вытекает, что последовательность  $\Phi_n(\xi, \lambda)$ , монотонно возрастая, стремится к  $\Phi(\xi, \lambda)$ . Это позволяет вычислить  $\Phi(\xi, \lambda)$  со сколь угодно большой точностью по соответствующему нижнему приближению. Верхняя оценка даст возможность оценить результат приближенных вычислений.

Воспользуемся вторым приближением сверху, чтобы оценить погрешность  $\Phi_2(\xi, \lambda)$  в диапазоне изменения  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Относительная ошибка второго приближения снизу будет не больше величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta_2(\xi, \lambda)}{\Phi_2(\xi, \lambda)}$$

Так как  $\Delta_2(\xi, \lambda)$  с возрастанием  $\xi$  увеличивается,  $\Phi_2(\xi, \lambda)$ , напротив, уменьшается, то  $\varepsilon$  будет возрастающей функцией  $\xi$  и, следовательно, в промежутке  $0 \leq \xi \leq 1$  наибольшая относительная ошибка достигается при  $\xi = 1$ .

Таблица 2

$\lambda$	0	1	2	3	4	5
$\lambda_2$	1.526	1.976	2.580	3.320	4.166	5.129
$\lambda_2^{\circ}$	1	1.300	1.734	2.311	3.034	3.879
$\Phi_2(1, \lambda)$	0.421	0.665	0.860	0.974	1.105	1.213
$\Delta_2(1, \lambda)$	0	0.019	0.019	0.012	0.010	0.004
$\varepsilon \%$	0	2.86	2.22	1.23	0.91	0.33

Эта величина указана в табл. 2, из которой видно, что погрешность приближения  $\Phi_2(\xi, \lambda)$  в промежутке  $0 \leq \xi \leq 1$  не превосходит 3%. В той же табл. 2 для сравнения указаны  $\lambda_2$  и  $\lambda_2^{\circ}$ .

4. Об одном приближении функции цилиндрического источника в бесконечном пористо-трещиноватом пласте. Как следует из п. 3, для  $0 \leq \xi \leq 1$  вторые оценки снизу и сверху являются хорошим приближением  $\Phi(\xi, \lambda)$ . Однако для  $\xi > 1$  нижняя и верхняя оценка расходятся друг с другом. Это вызвано тем, что

$$\Phi_2^\circ(\xi, \lambda) \rightarrow 1/2(1 - e^{-\lambda}) \ln \lambda_2^\circ$$

при  $\xi \rightarrow \infty$ , в то время как  $\Phi_2(\xi, \lambda) \rightarrow 0$  с возрастанием  $\xi$ .

Это наводит на мысль подправить верхнюю оценку, введя множителем  $1/2(1 - e^{-\lambda}) \ln \lambda_2 / \lambda_2^\circ$  убывающую с возрастанием  $\xi$  функцию  $\exp - 1/4\xi^2 / \lambda_m$ , где  $\lambda_m$  будет соответствующим образом подобрано.

Подберем неизвестную функцию времени  $\lambda_m$ , удовлетворяя исправленное приближение

$$\Phi_m(\xi, \lambda) = e^{-2}K_0(\xi) + (1 - e^{-\lambda}) [1/2 \ln \lambda_2 / \lambda_2^\circ \exp - \xi^2 / 4\lambda_m + \Phi_0(\xi, \lambda_2^\circ)] \quad (4.1)$$

первому моментному соотношению

$$\int_0^\infty \Phi(\xi, \lambda) \xi d\xi = \lambda + 1$$

Оно легко получается, если в интеграле заменить  $\Phi(\xi, \lambda)$  его выражением (2.1) и, переставив порядок интегрирования, произвести необходимые, довольно простые, выкладки.

Из первого моментного соотношения получим

$$\lambda_m = [1 - \lambda_2^\circ \pm \lambda(1 - e^{-\lambda})^{-1}][\ln \lambda_2 / \lambda_2^\circ]^{-1} \quad (4.2)$$

Найденное приближение (4.1) с  $\lambda_m$  из (4.2) достаточно хорошо, что подтверждается табл. 3. Согласно данным вычислений погрешность приближения (4.1) нигде не превосходит 2-3%.

Таблица 3

$\xi$	$\lambda = 0.1$		$\lambda = 1$		$\lambda = 2$	
	$\Phi_m$	$\Phi$	$\Phi_m$	$\Phi$	$\Phi_m$	$\Phi$
0.1	2.475	2.475	2.822	2.822	3.079	3.080
0.2	1.799	1.799	2.136	2.136	2.389	2.391
0.5	0.964	0.965	1.262	1.263	1.498	1.499
0.8	0.598	0.599	0.853	0.856	1.062	1.066
1	0.450	0.451	0.672	0.679	0.868	0.873
2	0.127	0.128	0.241	0.248	0.355	0.360
3	0.041	0.041	0.099	0.100	0.161	0.164

Конструкция приближения (4.1) такова, что оно является промежуточным между верхним и нижним приближениями, указанными в п. 2-3. Из табл. 3 видно, что (4.1) приближает  $\Phi(\xi, \lambda)$  снизу.

В табл. 4 для сравнения приведены значения  $\lambda_2, \lambda_2^\circ$  и  $\lambda_m$ .

Достоинством приближения (4.1) является то, что оно просто, имеет малую погрешность и может быть обобщено на случай, когда упругоэластичностью трещины пренебрегать нельзя.

В заключение остановимся на практическом значении функции непрерывно действующего источника.

Допустим, что скважина нулевого радиуса, вскрывающая бесконечный пористо-трещиноватый пласт, пускается в работу с постоянным расходом  $q_0$ . Пусть до пуска скважины давление во всех точках пласта было одинаковым и равным  $p_0$ . Тогда, если гидропроводность пласта равна повсюду постоянной величине  $kh/\mu$ , поле давления в нем будет определяться формулой

Таблица 4

$\lambda$	0	0.1	1	2
$\lambda_2^\circ$	1.526	1.562	1.976	2.580
$\lambda_2$	1	1.025	1.303	1.734
$\lambda_m$	2.360	2.435	3.080	3.980

$$p(r, t) = p_0 + \frac{\mu q_0}{2\pi kh} \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{\kappa t}}, \frac{t}{\tau}\right) \quad (4.3)$$

Здесь  $\kappa$  — пьезопроводность пласта,  $\tau$  — время запаздывания [2-4],  $r$  — расстояние по радиусу в глубь пласта,  $t$  — время. Формула (4.3) может служить для приближенного описания поля давлений и в том случае, когда пласт ограничен, однако, для достаточно малых значений времени (первая фаза фильтрации), а также тогда, когда скважина имеет конечный, но малый радиус.

Необходимость в знании поля давления, вызванного пуском в работу скважины, возникает при исследовании взаимодействия скважин друг с другом, при количественном изучении перетока жидкости из трещин в блоки, и обратно и т. п.

Поступило 12 VII 1968

### ЛИТЕРАТУРА

1. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., Гостехиздат, 1956.
2. Медведский Р. И. Об изменении давления и расхода в скважинах пористо-трещиноватого коллектора. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Warren J. E., Root P. J. The behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Petr. Eng. J., 1963, No. 3.
4. Авакян Э. А. Некоторые приближенные решения задач фильтрации в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.

## ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРЫВА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТ ГРАНИЦЫ СЛОЕВ

С. В. ВАСИЛЬЕВ, Н. Н. ВЕРИГИН

(Москва)

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим фильтрацию из канала или удлиненного водохранилища в неоднородно-слоистой толще грунтов (фиг. 1, 2, 3). Будем считать, что слоистая толща состоит из чередующихся друг с другом более мощных сильнопроницаемых слоев грунта 1, 3 и менее мощных слабопроницаемых слоев 2 и 4. Допустим также, что грунтовые воды залегают глубоко (в основании слоистой толщи). Горизонт воды в канале будем считать неизменным.

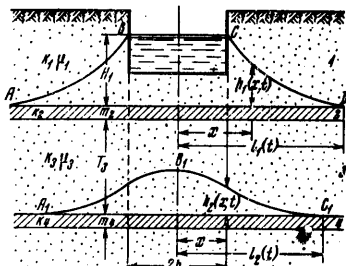
Рассмотрим два основных случая.

1. Предположим, что канал (водохранилище) размещается в пределах сильнопроницаемого слоя (фиг. 1). При таких условиях после наполнения канала верхний хорошо проницаемый слой промачивается весьма быстро. Время промачивания этого слоя без учета бокового растекания может быть определено по известным зависимостям (боковое растекание в этом случае невелико и приближенно может быть оценено по В. В. Ведерникову [1]). При промачивании второго (слабопроницаемого) слоя сразу же начинается растекание фильтрационных вод в первом слое, которое будет тем больше, чем меньше проницаемость второго слоя. В третьем слое будет происходить фильтрация при неполном насыщении пор грунта водой (инфильтрация). После того как вода пройдет через третий слой, начинается растекание ее по кровле четвертого малопроницаемого слоя, сопровождающееся одновременным его насыщением.

Ввиду относительно малой мощности (толщины) и обычно высокой влажности слабопроницаемых слоев, их водонасыщение происходит сравнительно быстро. Поэтому можно считать, что растекание фильтрационных вод в первом и третьем слоях начинается только после полного промачивания соответственно второго и четвертого слоев. В первом слое это растекание будет происходить в условиях подпора от канала и фильтрации из первого слоя в третий через малопроницаемый второй (фиг. 1, область растекания  $ABCD$ ). В третьем слое это растекание будет происходить при наличии инфильтрации воды, просачивающейся сверху из второго слоя и фильтрации из третьего слоя в пятый через малопроницаемый четвертый (фиг. 1, область растекания  $A_1B_1C_1$ ).

Длина областей растекания фильтрационных вод  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1$  при полном промачивании подстилающих малопроницаемых слоев всегда больше, чем при частичном их промачивании. Принимая полное промачивание малопроницаемых слоев, до начала растекания воды в хорошо проницаемых слоях, находим длину растекания с завышением (т. е. с запасом).

Длительность промачивания второго слабопроницаемого слоя может быть определена таким же образом, как и в первом слое.



Фиг. 1