

К РАСЧЕТУ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДРЕНАЖА ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ ДРЕНИРУЕМОГО ПЛАСТА И СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ВОДОУПORA

С. Т. РЫБАКОВА

(Новосибирск)

Верхний безнапорный пласт с коэффициентом фильтрации k граничит со слабопроницаемым водоупором мощности λ , коэффициент фильтрации которого κ значительно меньше k (фиг. 1).

Горизонтальные дрены расположены в безнапорном пласте на расстоянии $2l$ друг от друга. Напор в нижележащем горизонте считаем постоянным и равным H . На фиг. 1 v есть скорость равномерной инфильтрации.

Начальные градиенты дренируемого и слабопроницаемого пластов обозначим соответственно через J_0 и J_1 .

Задачу будем решать в гидравлической постановке Мятлева — Гириного, т. е. считаем, что фильтрация в верхнем пласте происходит в горизонтальном направлении со скоростью фильтрации $v = -k(J_0 + dh/dx)$, а в слабопроницаемом — в вертикальном направлении со скоростью $w = \kappa[(H-h)/\lambda - J_1]$.

С учетом сказанного дифференциальное уравнение для напора $h(x)$ исследуемого пласта примет вид

$$k \frac{d}{dx} \left[h \left(\frac{dh}{dx} + J_0 \right) \right] + \kappa \left(\frac{H-h}{\lambda} - J_1 \right) + \varepsilon = 0 \quad (1)$$

Решение уравнения (1) будем искать при условиях

$$h = h_0, \quad \frac{dh}{dx} = -J_0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2)$$

Второе из условий (2) есть результат того, что скорость в точке $x = 0$ равна нулю.

Таким образом, предполагается, что переток через слабопроницаемый водоупор происходит по всей длине междреннего пространства, т. е. для всех $0 \leq x \leq l$ выполняется неравенство

$$(H-h)/\lambda > J_1$$

и, кроме того, при $0 < x < l$ справедливо другое неравенство

$$-dh/dx > J_0$$

т. е. в исследуемой области нет застойных зон.

В противном случае область фильтрации разбивается на отдельные части и определение ординаты свободной поверхности $h(x)$ сводится к решению системы уравнений, каждое из которых справедливо в определенных пределах изменения координаты x .

Введем безразмерные переменные

$$y = \frac{h}{H_1}, \quad y_0 = \frac{h_0}{H_1}, \quad \xi = \omega x, \quad J_0^* = \frac{J_0}{H_1 \omega} \quad (3)$$

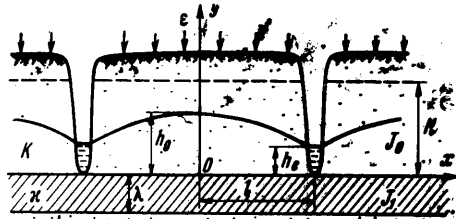
Здесь

$$H_1 = H + \varepsilon \lambda / \kappa - \lambda J_1, \quad \omega^2 = \kappa / k \lambda H_1$$

Принимая во внимание (3), переписываем задачу (1), (2) следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left[y \left(\frac{dy}{d\xi} + J_0^* \right) \right] - (y-1) = 0 \quad (4)$$

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{d\xi} = -J_0^* \quad \text{при } \xi = 0 \quad (5)$$



Фиг. 1

Решение задачи (4), (5) в конечном виде не получено, поэтому оно может быть найдено либо численными методами с использованием ЭЦВМ, либо приближенными, которые состоят в линеаризации уравнения (4).

Целью данной работы является выяснение влияния действия начальных градиентов на работу дренажа, а также сравнение решения задачи (4), (5), полученного численным интегрированием, с решениями уравнений, полученных путем линеаризации уравнения (4) двумя различными способами.

Первый способ линеаризации состоит в следующем. Если уравнение (4) переписать так:

$$\frac{d}{d\xi} \left(y \frac{dy}{d\xi} \right) + J_0^* \frac{dy}{d\xi} - (y-1) = 0$$

то множитель y при производной $dy/d\xi$ заменяется некоторой средней величиной y^* . Тогда будем иметь

$$y^* \frac{d^2y}{d\xi^2} + J_0^* \frac{dy}{d\xi} - (y-1) = 0 \quad (6)$$

В качестве постоянной y^* возьмем такую:

$$y^* = y_0 \quad (7)$$

Учитывая равенство (7), решение уравнения (6) при условиях (5) находим в виде

$$y = 1 + \frac{(1-y_0)p_2 - J_0^*}{p_1 - p_2} e^{p_1\xi} - \frac{(1-y_0)p_1 - J_0^*}{p_1 - p_2} e^{p_2\xi} \quad (8)$$

Здесь

$$p_{1,2} = -\frac{J_0^*}{2y_0} \pm \left(\left(\frac{J_0^*}{2y_0} \right)^2 + \frac{1}{y_0} \right)^{1/2} \quad (9)$$

При втором способе линеаризации уравнение (4) преобразуем следующим образом:

$$\frac{d^2y^2}{d\xi^2} - 2J_0^* \frac{dy}{d\xi} - 2(y-1) = 0 \quad (10)$$

Умножим и разделим второе и третье слагаемые в уравнении (10) соответственно на множители y и $(y+1)$.

Получим

$$\frac{d^2y^2}{d\xi^2} + \frac{J_0^*}{y} \frac{dy^2}{d\xi} - \frac{2(y^2-1)}{y+1} = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) становится линейным, если переменную y , которая входит в состав знаменателя второго и третьего слагаемых, заменить некоторым средним ее значением y^{**} , которое аналогично предыдущему, положим, равным y_0 .

В результате этого уравнение (11) примет вид

$$\frac{d^2y^2}{d\xi^2} + \frac{J_0^*}{y_0} \frac{dy^2}{d\xi} - \frac{y^2-1}{y^0} = 0 \quad \left(y^0 = \frac{1+y_0}{2} \right) \quad (12)$$

Выпишем решение уравнения (12) при условиях (5)

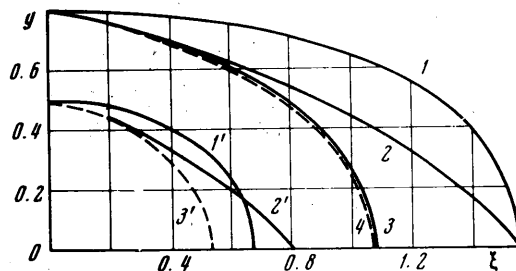
$$y^2 = 1 + \frac{(1-y_0^2)s_2 - 2y_0J_0^*}{s_1 - s_2} e^{s_1\xi} - \frac{(1-y_0^2)s_1 - 2y_0J_0^*}{s_1 - s_2} e^{s_2\xi} \quad (13)$$

Здесь

$$s_{1,2} = -\frac{J_0^*}{2y_0} \pm \left(\left(\frac{J_0^*}{2y_0} \right)^2 + \frac{1}{y^0} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Для сравнения взаимного расположения кривых свободной поверхности, являющихся решениями нелинейного уравнения (4) и уравнений, полученных путем его линеаризации по y и y^2 при одних и тех же граничных условиях (5), были проведены некоторые вычисления по формулам (8), (13) и численное интегрирование задачи (4), (5) методом Рунге — Кутты на ЭЦВМ М-20.

Прежде чем перейти к анализу полученных результатов, заметим здесь следующее. В работе [1] рассматриваемая задача решена для случая, когда $J_0 = J_1 = 0$, т. е. действие начальных градиентов не учитывается. Однако задача в безразмерных переменных имеет вид (4), (5), если положить $J_0^* = 0$. Как



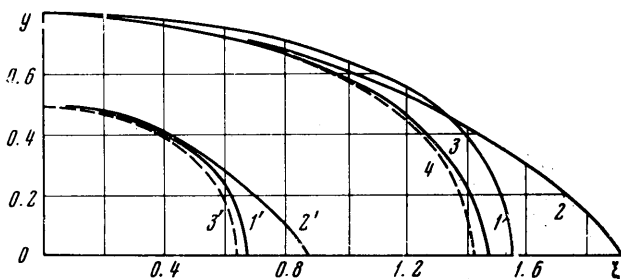
Фиг. 2

видно из записи задачи (4), (5), величина J_1 не входит туда явно. Таким образом, результаты, полученные в указанной статье, можно использовать и для случая, если учитывается только начальный градиент слабопроницаемого водоупора, т. е. J_1 .

Только при переходе к размерным переменным нужно брать H_1 по формуле (3) данной работы. Наличие J_1 улучшает работу дренажа, так как в этом случае уменьшается подпитывание дренируемого пласта через слабопроницаемый водоупор напорными водами нижележащего горизонта.

На фиг. 2, 3 построены кривые свободной поверхности в безразмерных переменных; кривые свободной поверхности, 1, 1' и 4, 3' получены численным интегрированием задачи (4), (5) соответственно при значениях $J_0^* = 0, 0.22$ (фиг. 2) и $J_0^* = 0, 0.044$ (фиг. 3) и при $y_0 = 0.5, 0.8$; кривые свободной поверхности 2, 2' и 3, 3' рассчитаны по формулам (8) и (13) соответственно для тех же y_0 и J_0^* , что и решение нелинейного уравнения (4).

Анализ кривых на фиг. 2, 3 показывает, что пренебрежение величиной J_0 ведет к сильному завышению уровней в дренах при заданной ординате свободной поверхности в середине междренья и расстоянии между дренами, и это завышение тем больше, чем больше величина начального градиента J_0 . Рассмотрим, например, случай $y_0 = 0.8, J_0^* = 0.22$. Если безразмерное расстояние $\xi_l = l\omega$ (фиг. 1) равно 0.7, то уро-



Фиг. 3

вень в дрене $J_e = h_e / H_1$ получается равным 0.544 и 0.732 при значениях начального градиента $J_0^* = 0.22$ и $J_0^* = 0$ соответственно. Естественно, что с уменьшением расстояния между дренами при заданных y_0 и J_0^* эта разница уменьшается, с увеличением — возрастает (фиг. 2—3).

С другой стороны, задаваясь значениями y_0 и y_l , по фиг. 2, 3 можно определить расстояние между дренами с учетом действия J_0^* и без него. Пусть $y_0 = 0.8, y_l = 0.5, J_0^* = 0.22$ (фиг. 2). Для этого случая ξ_l получается равным 0.765 и 1.285 соответственно для $J_0^* = 0.22$ и $J_0^* = 0$. Таким образом, если наличие J_0 не принимать во внимание, то расстояние между дренами получается завышенным почти в 1.7 раза.

Поэтому при расчете работы дренажа важно кроме таких параметров, как коэффициенты фильтрации, знать также значения начальных градиентов. Однако вопросу определения последних посвящено немного работ [2—5].

Как уже отмечалось, решение задачи (4), (5) в конечном виде получить не удается, поэтому в тех случаях, когда и численное интегрирование затруднительно, можно прибегнуть к одному из указанных способов линеаризации.

Сравнение взаимного расположения интегральных кривых нелинейного уравнения (4) и линеаризованных (6), (12) при одинаковых условиях (5) показывает, что при этих условиях интегральные кривые уравнения (6) лежат всегда выше соответствующих кривых уравнения (12), а последние, в свою очередь, лежат выше соответствующих кривых нелинейного уравнения при условии, что

$$\frac{y_0(1 - y_0)}{1 - y_0} > (J_0^*)^2$$

т. е. для малых начальных градиентов J_0^* .

При этом, если уровни в дренах не сильно отличаются от значения y_0 , то обе линеаризации дают хорошее приближение к решению нелинейного уравнения. Но в общем случае линеаризация по y^2 оказывается лучшей (фиг. 2, 3).

Благодарю П. Я. Кочину и В. И. Пеньковского за обсуждение и советы по работе.

Поступило 14 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбакова С. Т., Эмих В. Н. К задаче о горизонтальном совершенном дренаже при слабопроницаемом водоупоре. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. Пузыревская Т. Н. Просачивание воды через песчаные грунты. Изв. н.-и. ин-та гидротехн., 1931, т. 1.

3. Абелишвили Г. В. Результаты экспериментальных исследований нижней границы применимости закона Дарси. Тр. Груз. н.-и. ин-та гидротехн. и мелиор., 1963, вып. 22.
4. Абелишвили Г. В., Кацарава Т. Е., Терлецкая М. Н. О роли фильтрационных параметров грунтов в расчете прогноза режима грунтовых вод. Тр. корр. совещ. по гидротехн., 1967, вып. 35.
5. Бондаренко Н. Ф. Учет следов сдвиговой прочности воды при расчете горизонтального дренажа. Докл. Всес. Акад. с./х. н. им. Ленина, 1966, № 9.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТОМ ПЛАСТЕ

Р. И. МЕДВЕДСКИЙ (Баку)

Известные приближенные методы, разработанные для исследования упругого режима фильтрации жидкости в пористых пластах, оказываются, как правило, малоэффективными при решении соответствующих задач для пористо-трещиноватых пластов. Большим недостатком упомянутых методов является и то, что погрешность получаемых с их помощью приближений не может быть найдена иначе, как сравнением с точным решением. Данные обстоятельства побуждают к поиску более эффективных приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации жидкости в пористо-трещиноватом пласте. Излагается метод последовательных приближений для исследования некоторых явлений при упругом режиме фильтрации в пористо-трещиноватом коллекторе, проницаемость пористых блоков которого пренебрежимо мала. Этот метод позволяет в ряде случаев находить пущные приближения с заранее заданной погрешностью.

1. Об одном методе последовательных приближений положительных интегральных операторов, основанном на неравенствах Йенсена. Пусть $j(x)$ — некоторая функция, определенная в промежутке $[a, b]$, $0 \leq a < b \leq \infty$, а $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ — некоторый конечный набор точек из этого промежутка. Определим оператор T равенством:

$$Tf(x) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n)$$

где t_i — система положительных чисел.

Если $f(x)$ — какая-либо выпуклая вниз функция в $[a, b]$, то имеет место следующее неравенство Йенсена [1]:

$$Tf(x) > |T|f(X), \quad X = Tx / |T| \quad (1.1)$$

где $|T| = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ — норма оператора T .

Пусть теперь оператор T разложен на сумму двух положительных операторов T_1 и T_2 , т. е. $T = T_1 + T_2$.

Тогда, применяя к каждому из выражений $T_i f(x)$ неравенство Йенсена (1.1), получаем

$$Tf(x) = T_1f(x) + T_2f(x) > |T_1|f(X_1) + |T_2|f(X_2), \quad X_i = T_i x / |T_i| \quad (1.2)$$

Рассматривая $|T_1|$ и $|T_2|$ как два положительных числа, X_1 и X_2 — как две точки из промежутка $[a, b]$, согласно неравенству Йенсена будем иметь

$$|T_1|f(X_1) + |T_2|f(X_2) > (|T_1| + |T_2|)f\left(\frac{|T_1|X_1 + |T_2|X_2}{|T_1| + |T_2|}\right) > |T|f(X) \quad (1.3)$$

Методом полной индукции легко доказывается, что (1.3) справедливо и в том случае, если оператор T разложен в сумму не двух, а любого числа положительных операторов. Таким образом, пусть $T = \sum T_i$. Тогда, объединяя (1.1) — (1.3), получаем

$$Tf(x) > \sum |T_i|f(X_i) > |T|f(X) \quad (1.4)$$

Неравенство вида (1.4) можно получить и тогда, когда $f(x)$ уже не является выпуклой вниз, однако можно найти функцию $y(x)$ такую, что суперпозиция $f_s(x) = f[y(x)]$ будет выпуклой вниз. Тогда для функции $f_s(x)$ уже справедливо (1.4)

$$Tf_s(x) > \sum |T_i|f_s(X_i) > |T|f_s(X)$$