

О СЛОИСТОМ ТЕЧЕНИИ СУСПЕНЗИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ф. АФАНАСЬЕВ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

(Москва)

На основе системы уравнений [1] динамики малоцентрированной суспензии твердых вращающихся частиц сферической формы в вязкой жидкости предлагается решение задачи о развитии течения вблизи внезапно приведенной в движение плоской стенки, а также задачи о разгонном течении Куэтта. Решения этих задач для случая чисто вязкой жидкости приведены в монографии [2].

1. Система уравнений [1] состоит из уравнения импульса фаз (1.1), уравнения для момента локального вращения твердой частицы (1.2) уравнений баланса масс, фаз (1.3), определяющих уравнений для тензоров фазовых напряжений (1.4), выражения для силы межфазового взаимодействия (1.5)

$$m\rho_1 \frac{d_1 \mathbf{v}_1}{dt} = p\nabla m + \nabla \cdot (m\sigma_1) - m\mathbf{R}$$

$$(1-m)\rho_2 \frac{d_2 \mathbf{v}_2}{dt} = -p\nabla m + \nabla \cdot [(1-m)\sigma_2] + m\mathbf{R} \quad (1.1)$$

$$\frac{d_2 \boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{1}{\tau_\omega} \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_1 \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial m\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (m\rho_1 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial (1-m)\rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-m)\rho_2 \mathbf{v}_2] = 0$$

$$\sigma_1 = -p\mathbf{I} + \tau + \sigma^a, \quad \sigma_2 = -p\mathbf{I} \quad (1.4)$$

$$m\tau = -\frac{2}{3}\mu_e \mathbf{I} (\nabla \mathbf{v}_1) + \mu_e [-\mathbf{I} \times (\nabla \times \mathbf{v}_1) + 2(\mathbf{v}_1 \nabla)]$$

$$\sigma^a = \frac{3\mu(1-m)}{2m} \mathbf{I} \times \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_1 \right)$$

$$\rho_1 = \rho_1(p), \quad \rho_2 = \rho_2(p), \quad \mathbf{R} = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (1.5)$$

Здесь m — удельное объемное содержание жидкости, p — давление, $m\mathbf{R}$ — вектор силы межфазового взаимодействия, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости локального вращения твердых частиц, ρ_k — плотность, \mathbf{v}_k — вектор скорости, σ_k — диада напряжений, индекс 1 относится к жидкой фазе, а индекс 2 — к твердой, σ^a — антисимметричная часть диады напряжений в жидкости, $\mu_e = \mu[1 + 2.5(1-m)]$ — коэффициент вязкости [3], μ — коэффициент вязкости чистой жидкости, $a = \frac{1}{2}r^{-2}\mu(1-m)$, $\tau_\omega = \frac{1}{15}r^2\mu^{-1}\rho_2$, r — радиус твердых частиц — шариков. Векторно-диадная символика дана согласно книге [4], а именно: ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, \mathbf{I} — единичная диада, оператор $d_k/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_k \nabla$.

В уравнении (1.2) предполагается коллинеарность векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\nabla \times \mathbf{v}_1$.

Подчеркнем, что сила и момент межфазового взаимодействия соответствуют условию о микростационарности потока жидкости в окрестности твердой частицы, причем в соответствующих определяющих уравнениях для простоты пренебрежено малыми нелинейными добавками. Наличие объемно распределенного момента, возникающего из-за различий инерционных свойств жидкости и взвешенных частиц, приводит к появлению антисимметричной составляющей тензора осредненных напряжений (что связано с неравномерным полем вязких микронапряжений из-за возмущающего действия взвешенных инородных частиц).

2. Найдем решение задачи о неустановившемся слоестом разгонном течении нежимаемой вязкой жидкости, содержащей твердые частицы — шарики.

Пусть стенка, лежащая в координатной плоскости xz , внезапно начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью U . Полупространство $y > 0$ занимает суспензия. Имеем

$$v_{k1} = u_k(y, t), \quad v_{kn} = 0 \quad (n = 2, 3; k = 1, 2)$$

$$p = \text{const}, \quad \nabla \times \mathbf{v}_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \omega_3 = \omega(y, t) \quad (2.1)$$

Из условия $p = \text{const}$ следует, что $\rho_1 = \text{const}$ и $\rho_2 = \text{const}$. Учитывая это, из уравнений неразрывности и (2.1) получаем $m = \text{const}$. Тогда система уравнений движения приводится к следующим трем линейным уравнениям:

$$\begin{aligned} \tau_\omega \tau_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\mu_e + \delta}{m\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \tau_\omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\mu_e + \delta}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \\ + \tau_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\mu_e}{m\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\mu_e}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{\tau_0} u_2 = \frac{1}{\tau_0} u_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\omega} \omega = -\frac{1}{2\tau_\omega} \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \tau_\omega = \frac{1}{15} \frac{r^2}{\mu} \rho_2, \quad \tau_a = \frac{2}{9} \frac{r^2}{\mu} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho}, \quad \tau_0 = \frac{\rho}{m\rho_1} \tau_\omega \\ \rho = m\rho_1 + (1-m)\rho_2, \quad \delta = \frac{3}{2}\mu(1-m) \end{aligned}$$

Отметим, что τ_ω — время релаксации, связанное с выравниванием угловых скоростей локального вращения жидкости и твердых частиц, τ_a — время релаксации, связанное с выравниванием поступательных скоростей жидкости и твердых частиц. Величина δ — поправка к равновесной вязкости Эйнштейна μ_e , соответствующая замороженному состоянию при поперечном движении.

Начальные и граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = \omega = 0 \quad \text{для всех } y (t \leq 0) \\ u_1 = U \quad \text{для } y = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{для } y = \infty \quad (t > 0) \quad (2.3) \end{aligned}$$

Точное решение уравнений (2.2) при условиях (2.3) может быть представлено в форме интегралов Римана — Меллина

$$u_1(\eta, t) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\eta f(t, \lambda) + \lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (2.4)$$

$$u_2(\eta, t) = \frac{tU}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\eta f(t, \lambda) + \lambda} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda\tau_0 + t)} \quad (2.5)$$

$$\omega(\eta, t) = \frac{\sqrt{t}U}{4\pi i \sqrt{v_\infty}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\eta f(t, \lambda) + \lambda} \frac{f(t, \lambda) d\lambda}{\lambda(\lambda\tau_\omega + t)} \quad (2.6)$$

Здесь $\alpha > 0$ такое, что все особенности подынтегральных функций лежат в полуплоскости $\text{Re}\lambda < \alpha$

$$f(t, \lambda) = 2 \left[\frac{\lambda(\lambda\tau_a + t)(\lambda\tau_\omega + t)}{(\lambda\tau_a + tk_a)(\lambda\tau_\omega + tk_\omega)} \right], \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{v_\infty t}}$$

где постоянные v_∞ , k_a и k_ω равны

$$v_\infty = \frac{\mu_e + \delta}{m\rho_1}, \quad k_a = \frac{m\rho_1}{\rho} \leq 1, \quad k_\omega = \frac{\mu_e}{\mu_e + \delta} \leq 1 \quad (2.7)$$

Полагая в (2.4) $m = 1$, получим решение задачи в случае чистой жидкости

$$u_1 = U [1 - \Phi(\eta)] \quad \left(\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}, \quad v = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (2.8)$$

совпадающее с решением в [2]. Здесь $\Phi(\eta)$ — интеграл вероятности.

Из (2.4) следует, что асимптотика решения для u_1 при малых и больших t выражается формулой (2.8) с $v = v_\infty$ и $v_0 = \mu_e / \rho$ соответственно.

Поскольку кинематическая вязкость суспензии $\nu_\infty > \nu$, то при всех t кривая зависимости u_1 от t (2.4) лежит ниже, чем кривая (2.8); качественный вид решения для u_1 приведен на фиг. 1 (пунктирная кривая).

Из (2.5) следует, что скорость твердых частиц при $y = 0$ равна

$$u_2(0, t) = U(1 - e^{-t/\tau_0})$$

и при $t > \tau_0$ практически совпадает со скоростью стенки.

Из (2.5) и (2.6) следует важный результат, заключающийся в том, что собственное вращение ω_0 твердых частиц отсутствует

$$\omega_0 = \left| \omega - \frac{1}{2} \nabla \times v_2 \right| = \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

только в частном случае, когда $\tau_\omega = \tau_0$. В общем случае $\tau_\omega \neq \tau_0$ и собственное вращение твердых частиц имеет место.

Контурные интегралы (2.4) — (2.6) могут быть сведены к квадратурам. Например, решения для функции $u_1(\eta, t)$ в зависимости от характеристик параметров течения будут иметь вид

$$\frac{u_1}{U} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{tk_a \tau_a^{-1}} + \int_{tk_\omega \tau_\omega^{-1}}^{\tau t_\omega^{-1}} + \int_{t\tau_a^{-1}}^\infty \right) e^{-\xi} \sin [2\eta f(t, -\xi)] \frac{d\xi}{\xi}$$

$$(0 \leq k_a \tau_a^{-1} \leq k_\omega \tau_\omega^{-1} \leq \tau_\omega^{-1} \leq \tau_a^{-1})$$

$$\frac{u_1}{U} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{tk_\omega \tau_\omega^{-1}} + \int_{tk_a \tau_a^{-1}}^{t\tau_\omega^{-1}} + \int_{t\tau_a^{-1}}^\infty \right) e^{-\xi} \sin [2\eta f(t, -\xi)] \frac{d\xi}{\xi}$$

$$(0 \leq k_\omega \tau_\omega^{-1} \geq k_a \tau_a^{-1} \leq \tau_\omega^{-1} \leq \tau_a^{-1})$$

$$\frac{u_1}{U} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{tk_\omega \tau_\omega^{-1}} + \int_{t\tau_\omega^{-1}}^{tk_a \tau_a^{-1}} + \int_{t\tau_a^{-1}}^\infty \right) e^{-\xi} \sin [2\eta f(t, -\xi)] \frac{d\xi}{\xi}$$

$$(0 \leq k_\omega \tau_\omega^{-1} \leq \tau_\omega^{-1} \leq k_a \tau_a^{-1} \leq \tau_a^{-1})$$

Для числовых расчетов квадратуры могут быть представлены в виде рядов, здесь они не приводятся из-за громоздкости.

3. Используя решение задачи предыдущего пункта, построим решение задачи о разгоне течения Куэтта для суспензии во времени.

Пусть на расстоянии h , где $h \gg r$, от внезапно приведенной в движение стенки находится другая, ей параллельная и неподвижная. Эта задача сводится к решению системы уравнений (2.2) при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_1 = u_2 = \omega = 0 \quad \text{для } 0 \leq y \leq h \quad (t \leq 0)$$

$$u_1 = U \quad \text{для } y = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{для } y = h \quad (t > 0) \quad (3.1)$$

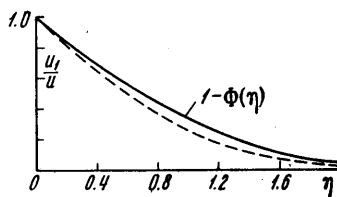
Точное решение поставленной задачи, найденное операционным методом, имеет вид

$$u_1 = \frac{U}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{-\eta f(t, \lambda)} - e^{-(2\eta_1 - \eta) f(t, \lambda)}}{1 - e^{-2\eta_1 f(t, \lambda)}} \frac{e^\lambda}{\lambda} d\lambda \quad (3.2)$$

$$u_2 = \frac{tU}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{-\eta f(t, \lambda)} - e^{-(2\eta_1 - \eta) f(t, \lambda)}}{1 - e^{-2\eta_1 f(t, \lambda)}} \frac{e^\lambda}{\lambda(\lambda\tau_0 + t)} d\lambda \quad (3.3)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{t} \bar{U}}{4\pi i \sqrt{\nu_\infty}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{-\eta f(t, \lambda)} - e^{-(2\eta_1 - \eta) f(t, \lambda)}}{1 - e^{-2\eta_1 f(t, \lambda)}} \frac{e^\lambda f(t, \lambda) d\lambda}{\lambda(\lambda\tau_\omega + t)} \quad (3.4)$$

$$(\alpha > 0, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_1, \quad \eta_1 = h / (2\sqrt{\nu_\infty t}))$$



Нетрудно установить, что при $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$

$$\operatorname{Re} f(t, \lambda) > 0, \quad |e^{-2\eta_1 f(t, \lambda)}| < 1 \quad (3.5)$$

Учитывая (3.5), разложим в ряд функцию

$$\frac{1}{1 - e^{-2\eta_1 f(t, \lambda)}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\eta_1 f(t, \lambda)} \quad (3.6)$$

Обозначим решение предыдущей задачи (2.4) — (2.6) через $U_1(\eta, t)$, $U_2(\eta, t)$ и $\Omega(\eta, t)$ соответственно.

Подставляя разложение (3.6) в (3.2) — (3.4), после несложных преобразований получим

$$u_k = U_k(\eta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [U_k(2n\eta_1 + \eta, t) - U_k(2n\eta_1 - \eta, t)] \quad (k = 1, 2) \quad (3.7)$$

$$\omega = \Omega(\eta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega(2n\eta_1 + \eta, t) - \Omega(2n\eta_1 - \eta, t)]$$

где

$$0 \leq \eta \leq \eta_1, \quad \eta = y / (2\sqrt{v_{\infty} t}), \quad \eta_1 = h / (2\sqrt{v_{\infty} t})$$

Из анализа результатов п. 2 следует, что при больших временах решение будет совпадать с автомодельным решением для чистой жидкости [2], но эффективная вязкость ее будет равна $v_0 = \mu_e / \rho$. Отсюда, характерное время выхода течения Куэтта на стационарный режим можно оценить как $T = h^2 / v_0$. Если $\rho_1 \sim \rho_2$, то $T \gg \tau_{\omega}$, τ_a и релаксация двухфазной среды скажется только в начальные моменты времени разгона течения. Однако если $\rho_2 \gg \rho_1$, то релаксация может быть существенна, несмотря на условие $h \gg r$, и общее решение (3.7) потребует применять на значительных интервалах времени.

Решение (3.7) описывает неустановившееся распределение скоростей в суспензии в плоском вискозиметре. В начальные моменты времени прибор будет измерять вязкость v_{∞} , а при достижении стационарного течения вязкость v_0 .

Поступило 15 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. К построению асимметричной гидродинамики суспензии с вращающимися твердыми частицами. В сб.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред. К 60-летию академика Л. И. Седова», М., «Наука», 1969, стр. 17—24.
2. Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe, 1951. (Рус. перев.: Шlichting Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956, стр. 70—91.)
3. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Ann. Phys., 1906, Bd. 19, S. 286—306 (Рус. перев.: Эйнштейн А. Собрание трудов. М., «Наука», 1966, т. 3, стр. 75—91.)
4. La Vallée M. Vorlesungen über Vektor-Rechnung. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1928. (Рус. перев.: Лагалли М. Векторное исчисление. М.—Л., Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936).