УСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СПУТНОМ ПОТОКЕ ГАЗА (НАКЛОННЫЙ КАНАЛ)

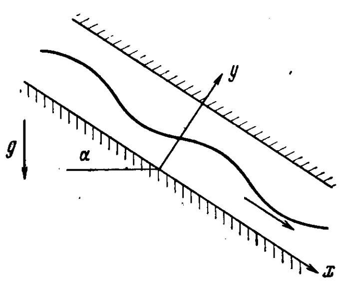
Ю. И. ПЕТУХОВ

(*Новосибирск*)

В [1, 2] методы теории узких полос [3] применены к исследованию установившихся ламинарных волновых течений по наклонному дну пленок вязкой жидкости в гравитационном поле. В первой из указанных работ рассмотрен случай свободного стекания жидкости, т. е. на поверхности жидкости предполагается отсутствие касательных и нормальных напряжений; во второй работе решается задача с заданным постоянным касательным напряжением по поверхности.

1. В данной работе теми же методами рассмотрены волны на поверхности жидкой пленки, обдуваемой потоком несжимаемого газа с малыми плотностью и вязкостью. Схема течения представлена на фигуре.

Здесь волнистая линия изображает границу раздела между жидкостью и газом. Движение той и другой среды происходит в направлении оси x, сила веса направлена вертикально вниз, угол дна канала с горизонтальным направлением обозначен через α. Будем исследовать установившиеся волновые движения.



Пусть в системе координат, связанной с неподвижным дном, скорость волны U, средний расход жидкости Q_1, средний расход газа — Q_2, неизвестная средняя глубина жидкости h. Для упрощения всех дальнейших выкладок и выражений предполагается, что полная ширина канала равна $2h$, т. е. средние глубины жидкости и газа одинаковы.

Параметры и выражения, относящиеся к жидкости, будем помечать индексом 1, а параметры, относящиеся к газу, пометим индексом 2. Примем за масштаб расхода Q_1, масштаб длины h, масштаб скорости Q_1 / h. Характеристики установившегося течения зависят от угла наклона α и от параметров $R_1 = Q_1 / \nu_1$, $R_2 = Q_2 / \nu_2$, $c = Uh / Q_1$, $F^2 = gh^3 / Q_1^2$. Здесь c — безразмерная скорость волны. Весом газа пренебрегаем.

В движущейся системе координат, скорость которой совпадает со скоростью волны, движение в каждой из двух сред удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}=-\frac{\partial p_i}{\partial x}+F_i^2\sin\alpha+\frac{1}{R_i}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi_i \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial p_i}{\partial y}+F_i^2\cos\alpha+\frac{1}{R_i}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi_i$$

или

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_i}{\partial x}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_i}{\partial y}=\frac{1}{R_i}\Delta^2\psi_i \tag{1.2}$$

$$(i = 1, 2)$$

Здесь ψ_i означает или функцию тока жидкости ψ_1, или функцию тока газа ψ_2. Кроме того, для газа $F_i^2 = F_2^2 = 0$.

Пусть уравнение границы раздела имеет вид $y = f(x)$. Тогда две функции тока удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{array}{lll} \psi_1 = -q, & \partial\psi_1 / \partial y = -c & \text{при} \quad y = 0 \\ \psi_1 = 0, & \psi_2 = 0 & \text{при} \quad y = f(x) \\ \psi_2 = \sigma, & \partial\psi_2 / \partial y = -c & \text{при} \quad y = 2 \end{array} \tag{1.3}$$

Величины q, c, σ неизвестны, однако между ними легко установить [1] следующую связь:

$$q = 1 - c, \qquad \sigma = Q_2 / Q_1 - c \tag{1.4}$$

Кроме условий (1.3) на поверхности раздела должно выполняться требование равенства скоростей той и другой сред, а требование равенства нормальных и касательных напряжений приводит к условиям

$$\mu_1 M_1 = \mu_2 M_2, \qquad N_1 = N_2 \quad \text{при} \quad y = f(x) \tag{1.5}$$

где

$$M_i = \left(-\frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\right)\frac{1-f_x^2}{1+f_x^2} + 4\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\,\partial y}\frac{f_x}{1+f_x^2} \tag{1.6}$$

$$N_i = -p_i - \frac{2}{R_i}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\,\partial y}\frac{1-f_x^2}{1+f_x^2} + \frac{2}{R_i}\left(-\frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\right)\frac{f_x}{1+f_x^2}$$

$$(i = 1, 2;\ f_x = df/dx)$$

(μ_1 и μ_2 — коэффициенты вязкости жидкости и газа.)

2. В соответствии с общей схемой метода узких полос [1–3], будем рассматривать длинные волны, так что параметр $\varepsilon = h/\lambda$ мал (λ — длина волны). Вместо координаты x введем координату $z = x/\varepsilon$. При этом в уравнениях (1.2) и в граничных условиях (1.5), (1.6) появится малый параметр. Решение ищется в виде ряда по степеням этого параметра (ограничимся первой степенью)

$$\psi_1 = \psi_1^\circ + \varepsilon\psi_1^1 + \ldots, \qquad \psi_2 = \psi_2^\circ + \varepsilon\psi_2^1 + \ldots \tag{2.1}$$

Для ψ_1° из (1.2) получается уравнение $\partial^4\psi_1^\circ/\partial y^4 = 0$ и из (1.3) граничные условия

$$\psi_1^\circ = -q, \quad \partial\psi_1^\circ/\partial y = -c \quad \text{при } y = 0$$
$$\psi_1^\circ = 0 \quad \text{при } y = f(\varepsilon z) = \eta(z)$$

Решение этой задачи дает

$$\psi_1^\circ = -q - cy + [(q + c\eta)/\eta^2 - a\eta]y^2 + ay^3 \tag{2.2}$$

где a — произвольная функция z, которая будет найдена из условий сопряжения на границе раздела.

Для ψ_2° имеем

$$\frac{\partial^4\psi_2^\circ}{\partial y^4} = 0, \quad \psi_2^\circ = \sigma, \quad \frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial y} = -c \quad \text{при } y = 2$$

$$\psi_2^\circ = 0 \quad \text{при } y = \eta$$

Решение имеет вид

$$\psi_2^\circ = \sigma + c(2-y) - \left[\frac{\sigma + c(2-\eta)}{(2-\eta)^2} + b(2-\eta)\right](2-y)^2 + b(2-y)^3 \tag{2.3}$$

Здесь b — произвольная функция z.

Условия сопряжения ψ_1° и ψ_2° на границе раздела, которые можно удовлетворить выбором функций a и b, имеет вид

$$\frac{\partial\psi_1^\circ}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_1^\circ}{\partial x} = \frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial x}, \quad \mu_1\frac{\partial^2\psi_1^\circ}{\partial y^2} = \mu_2\frac{\partial^2\psi_2^\circ}{\partial y^2} \tag{2.4}$$

Первые два соотношения (2.4) отвечают в нулевом приближении за равенство двух компонент скорости, последнее соотношение вытекает из (1.5). Нетрудно убедиться, что первые два требования (2.4) удовлетворяются одновременно, если на функции a и b наложить только одну связь. Второе соотношение между этими функциями вытекает из третьего условия (2.4). Предполагается, что амплитуда искомой волны много меньше средней глубины жидкости, т. е. $\eta = 1 + \delta$, где δ — малая в сравнении с единицей функция.

В результате имеем

$$a = \left(\frac{3\sigma}{2k} - \frac{c}{2} - \frac{q}{2}\right) + \delta\left(\frac{3\sigma}{2} + \frac{3q}{2} + c\right) + \delta^2\left(\frac{3\sigma}{k} - 3q - \frac{3c}{2}\right)$$

$$b = \left(2\sigma - \frac{3}{2}q + \frac{c}{2}\right) + \delta\left(6\sigma - \frac{3}{2}q + c\right) + \delta^2\left(12\sigma - 3q + \frac{3c}{2}\right)$$

где $k = \mu_1/\mu_2$ — большая величина.

Из (1.2) видно, что

$$\frac{\partial^4\psi_1^1}{\partial y^4} = R_1\left(\frac{\partial\psi_1^\circ}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_1^\circ}{\partial z\,\partial y^2} - \frac{\partial\psi_1^\circ}{\partial z}\frac{\partial^3\psi_1^\circ}{\partial y^3}\right)$$

Функция ψ_1^1 должна удовлетворять следующим условиям:

$$\psi_1^1 = 0 \quad \text{при } y = 0,\ y = \eta; \qquad \partial\psi_1^1/\partial y = 0 \quad \text{при } y = 0$$

Это дает

$$\psi_1^1 = R_1\eta'\left[\frac{1}{24}Ay^4 + \frac{1}{120}By^5 + \frac{1}{360}Cy^6 + \frac{1}{840}Dy^7\right] + C_1y^2 + my^3$$

$$C_1 = -R_1\eta'\left[\frac{1}{24}A\eta^2 + \frac{1}{120}B\eta^3 + \frac{1}{360}C\eta^4 + \frac{1}{840}D\eta^5\right] - m\eta$$

$$A = 2c\left(\frac{2q}{\eta^3} + \frac{c}{\eta^2} + a'\eta + a\right), \quad C = 12a'\left[\frac{q + c\eta}{\eta^2} - a\eta\right]$$

$$B = -\left[6ca' + 4\left(\frac{q + c\eta}{\eta^2} - a\eta\right)\left(\frac{2q}{\eta^3} + \frac{c}{\eta^2} + a'\eta + a\right)\right], \quad D = 12aa'$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по z, m — произвольная функция z. Точно так же имеем

$$\frac{\partial^4\psi_2^1}{\partial y^4} = R_2\left(\frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_2^\circ}{\partial z\,\partial y^2} - \frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial z}\frac{\partial^3\psi_2^\circ}{\partial y^3}\right)$$

$$\psi_2^1 = 0 \quad \text{при } y = \eta, \quad y = 2; \qquad \partial\psi_2^1 / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 2$$

Это дает

$$\psi_2^1 = R_2\eta'\left[\frac{1}{24}E(2-y)^4 + \frac{1}{120}F(2-y)^5 + \frac{1}{360}G(2-y)^6 + \frac{1}{840}H(2-y)^7\right] + $$
$$+ C_2(2-y)^2 - d(2-y)^3$$

$$C_2 = -R_2\eta'\left[\frac{1}{24}E(2-\eta)^2 + \frac{1}{120}F(2-\eta)^3 + \frac{1}{360}G(2-\eta)^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{840}H(2-\eta)^5\right] - d(2-\eta)$$

$$E = 2c\left[\frac{2\sigma}{(2-\eta)^3} + \frac{c}{(2-\eta)^2} + b'(2-\eta) - b\right]$$

$$G = 12b'\left[\frac{\sigma + c(2-\eta)}{(2-\eta)^2} + b(2-\eta)\right]$$

$$F = \left[-6b'c - 4\left(\frac{\sigma + c(2-\eta)}{(2-\eta)^2} + b(2-\eta)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2\sigma}{(2-\eta)^3} + \frac{c}{(2-\eta)^2} + b'(2-\eta) - b\right)\right].$$

$$H = -12bb'$$

Здесь d — произвольная функция z.

Нетрудно установить, что на границе раздела сред должны удовлетворяться соотношения, подобные (2.4)

$$\frac{\partial\psi_1^1}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2^1}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_1^1}{\partial x} = \frac{\partial\psi_2^1}{\partial x}, \quad \mu_1\frac{\partial^2\psi_1^1}{\partial y^2} = \mu_2\frac{\partial^2\psi_2^1}{\partial y^2} \tag{2.5}$$

Эти требования выполняются, если

$$k^{-1}m = -R_1\eta'[m_0 + \delta m_1], \qquad d = -R_2\eta'[d_0 + \delta d_1]$$

$$m_0 = -\frac{3}{70}\sigma^2 + \frac{37}{140}\sigma c + \frac{9}{36}\sigma q - \frac{1}{35}kqc + \frac{1}{35}kc^2 - \frac{9}{35}kq^2$$

$$m_1 = -\frac{3}{70}\sigma^2 + \frac{24}{35}\sigma c + \frac{18}{35}\sigma q + \frac{2}{35}kcq - \frac{1}{35}kc^2 + \frac{27}{35}kq^2$$

$$d_0 = -\frac{9}{35}\sigma^2 - \frac{\sigma}{140}c - \frac{3}{70}\sigma q + \frac{3}{20}cq + \frac{1}{20}c^2 + \frac{27}{140}q^2$$

$$d_1 = -\frac{27}{35}\sigma^2 - \frac{1}{70}\sigma c + \frac{3}{35}\sigma q - \frac{1}{70}cq + \frac{1}{14} - \frac{9}{35}q^2$$

Таким образом, приближенно построено решение, зависящее от неизвестной функции $\eta = 1 + \delta$, удовлетворяющее уравнениям Навье — Стокса и всем граничным условиям, кроме требования равенства нормальных к поверхности напряжений на границе раздела (1.6).

Из этого условия должен быть найден вид функции δ.

Продифференцировав (1.6) по направлению касательной к границе раздела, подставив p_z и p_y из (1.1), а также полученные выражения функций тока через δ и δ' и возвращаясь к переменной x, получим для δ окончательное уравнение

$$\delta'' + n\delta + A\delta^2 = C\delta\delta' + D\delta' + \Delta \qquad (2.6)$$

$$n = -\frac{2}{3}\frac{15\sigma/k + 3q + 2c}{q + \sigma/k}, \qquad \Delta = -\frac{2}{9}\frac{R_1F^2\sin\alpha + 3(7\sigma/k - c - q)}{q + \sigma/k}$$

$$A = -\frac{4}{3}\frac{15\sigma/k - 3q - 3/2c}{q + \sigma/k}, \qquad C = -\frac{4}{3k}\frac{R_1m_1 + R_2d_1}{q + \sigma/k}$$

$$D = -\frac{2}{9k}\frac{kR_1F^2\cos\alpha + 6R_1m_0 + 6R_2d_0}{q + \sigma/k}$$

Параметры периодических решений уравнений такого вида для малых чисел R_1 и R_2 выражены через коэффициенты уравнения в [1].

Значения коэффициентов, полученные здесь, отвечают специфике рассматриваемой задачи и переходят в значения, соответствующие свободному стеканию при $k \to \infty$.

Как установлено в упомянутых выше статьях, имеется однопараметрическое семейство периодических решений. Параметром можно считать длину волны λ. Например, для скорости волны получается следующее выражение:

$$c = 3 + 15\sigma / k - 6\pi^2 / \lambda^2 (1 + 13\sigma / k)$$

Здесь рассматриваются длинные волны (λ велико); σ / k — величина небольшая. Из этого следует, что c близко к 3. Кроме того, знак влияния спутного потока газа на скорость волны зависит от знака σ (второе слагаемое).

Величина σ положительна, когда средняя расходная скорость газа выше скорости волны (1.4). Газ как бы «подгоняет» волну.

Если средняя расходная скорость газа меньше скорости волны, волна тормозится газом и скорость c уменьшается.

В [1] установлено условие существования периодических решений уравнения (2.6). В обозначениях оно имеет вид

$$\Delta = -2Dn / C$$

и является формулой для определения неизвестной средней толщины пленки жидкости (h входит в Δ).

Поступило 4 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванилов Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, № 6, т. 1, стр. 1061—1076.
2. Пашинина Л. В. Установившиеся течения в тонких пленках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
3. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. Некоторые вопросы математики, Новосибирск, 1961.