$$\Delta_4 = -96x_0^3(x_0^2-1)^2\left(\ln\frac{x_0-1}{x_0-1}\right)^5 + (189x_0^8 - 156x_0^6 - 378x_0^4 + 486x_0^2 - 59)\times$$

$$\times\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^4 - (1944x_0^7 - 3432x_0^5 + 2184x_0^3 + 200x_0)\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^3 +$$

$$+(7128x_0^6 - 8304x_0^4 + 6648x_0^2 - 672)\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^2 -$$

$$-(1123x_0^5 - 4704x_0^3 + 4224x_0)\ln\frac{x_0+1}{x_0-1} + 6480x_0^4 + 1920x_0^2 - 768$$

$$\Delta_5 = -\frac{1}{2}\ln\frac{x_0+1}{x_0-1} + \frac{x_0}{x_0^2-1}$$

Например, для эллипсоида $x_0 = \sqrt{2}(b : a \approx 1.4)$ $M = -\mu a^2 v_0(1 + 0.000869R^2)31.44$.

Если в формуле (3.1) совершим предельный переход при $a \to b$, $c \to 0$, то придем к полученному ранее результату для сферы (1.15).

Сравнивая значения моментов сопротивления круглого диска, сплюснутого эллипсоида, сферы, вытянутого эллипсоида при одинаковом экваториальном радиусе, замечаем, что при изменении формы тела от круглой пастинки к вытянутому эллипсоиду наряду с возрастанием момента сопротивления, что и должно быть в связи с ростом поверхности соприкосновения тела с жидкостью, увеличивается та его часть, которая происходит от учета инерционных членов в уравнениях движения.

Поступило 10 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ieffery G. B. On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. Proc. Math. Soc., London, 1915, Ser. 2, vol. 14, pt. 1.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися эллипсоидами. Аннотации докл. 2-го Всес. съезда по теорет. и прикл. механике, М., 1964.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПЕРЕГРУЗКАХ

С. С. ГРИГОРЯН, Л. И. ЖИГАЧЕВ, Б. С. КОГАРКО, Ю. Л. ЯКИМОВ

(*Москва*)

Изучено поведение вязкой жидкости в сообщающихся сосудах при переменных вертикальных перегрузках. Экспериментально доказано возникновение резонансной раскачки столба жидкости в сообщающихся сосудах при вертикальных колебаниях системы в целом. Выведено приближенное уравнение колебаний вязкой жидкости при переменной перегрузке, позволяющее определить зависимость критической величины перегрузки, при которой начинается раскачивание жидкости, от величины вязкости жидкости и параметров системы. Полученные теоретические и экспериментальные результаты находятся в удовлетворительном согласии.

Исследуемые жидкости помещались в бак прямоугольной формы из оргстекла размером $130 \times 150 \times 400$ *мм*, внутри которого была вертикально закреплена стеклянная трубка с внутренним диаметром 17 *мм*, открытая с обоих концов. При вертикальных колебаниях бака наблюдается следующее явление. С приближением частоты колебаний к величине, приблизительно вдвое превышающей частоту собственных колебаний столба жидкости в трубке, последняя начинает интенсивно раскачиваться в вертикальном направлении, в то время как жидкость в баке остается в покое относительно стенок. Возникновение колебаний в трубке происходит, если амплитуда колебаний бака превосходит некоторую величину, зависящую от вязкости жидкости. Будем рассматривать движение жидкости в трубке в гидравлическом приближении, но с учетом возникновения пограничного слоя вблизи стенок трубки. Выберем систему координат, связанную с баком (ось OZ направлена вертикально вниз). Если бак совершает гармонические колебания вдоль вертикальной оси относительно неподвижной системы координат по закону $\xi = A \cos \omega t$, то ускорение силы тяжести в связанной системе координат имеет вид

$$g(t) = g_0 - A\omega^2 \cos \omega t \tag{1}$$

где g_0 — ускорение силы тяжести при отсутствии колебаний.

Линеаризованное уравнение колебаний столба жидкости в трубке запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right)\left(\frac{g_0}{l} - A\omega^2 \cos \omega t\right)Z = 0 \tag{2}$$

Здесь S_1, S_2 — соответственно площади сечений трубки и бака, l — высота столба жидкости в трубке, Z — отклонение уровня жидкости в трубке от равновесного.

Это — уравнение Матье, для которого, как известно [1], имеется сложный набор решений, зависящих от значений параметров уравнения. Особый интерес для изучаемого явления представляет решение в области неустойчивости, где оно имеет вид $z = Se^{\alpha t}$. Здесь S — гармоническая функция, $\alpha > 0$. В общем случае существует целый набор зон неустойчивости, в каждой из которых при любом начальном отклонении от равновесного состояния решение может неограниченно расти. Очевидно, применительно к рассматриваемой задаче это уравнение годится только для описания начальной стадии колебаний, поэтому на основе анализа уравнения Матье можно судить лишь о возможности возникновения резонансных колебаний.

Для учета влияния вязкости на возбуждение колебаний введем в уравнение (2) дополнительный член, вид которого определим, воспользовавшись известным решением задачи о гармонических колебаниях бесконечной пластины в вязкой жидкости [2].

При гармонических колебаниях пластины в собственной плоскости, когда скорость пластины меняется по закону

$$u_1 = u_0 \cos \Omega t \qquad (\Omega = \sqrt{g_0 / l}) \tag{3}$$

движение вязкой жидкости определяется следующим образом:

$$u = u_0 e^{-\beta y} \cos (\Omega t - \beta y), \qquad \beta = \sqrt{{}^1/{}_2\Omega / \nu} \tag{4}$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости, y — расстояние от пластины.

Сила трения, действующая на единицу площади пластины, равна

$$f_1 = -\mu(\partial u / \partial y)_{y=0} = \rho u_0 \sqrt{{}^1/{}_2\Omega\nu}\,(\cos \Omega t - \sin \Omega t) \tag{5}$$

или с учетом (3)

$$f_1 = \rho \sqrt{{}^1/{}_2\, \Omega\nu}\left(u_1 + \frac{1}{\Omega}\frac{du_1}{dt}\right) \tag{6}$$

Величина $1/\beta$ характеризует толщину пограничного слоя. При достаточно больших β затухание скорости по мере удаления от стенки происходит весьма быстро. Поэтому воспользуемся формулой (6) для приближенного подсчета силы трения, действующей со стороны колеблющейся жидкости на стенки трубки не слишком малого диаметра, как это сделано, например, в работе [3]. Распределение скорости по радиусу от оси трубки до ее стенки считаем таким же, как и вблизи пластинки в бесконечной жидкости. С учетом этого предположения для средней скорости жидкости $\langle u \rangle$ в трубке радиуса R получим

$$\langle u \rangle = \left(1 - \frac{1}{2\beta R}\right)u_1 \tag{7}$$

В формуле (7) не учтены величины порядка $1/\beta R\Omega$ ввиду их малости. Из (6) и (7), принимая во внимание, что $\langle u \rangle = dz/dt$, получим демпфирующий член в уравнении колебаний столба жидкости в трубке в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{2\Omega\nu}}{R(1-\vartheta)}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\Omega}\frac{d^2z}{dt^2}\right), \qquad \vartheta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}$$

Считая, что частота собственных колебаний жидкости в трубке в первом приближении не зависит от вязкости, после несложных преобразований получим окончательно уравнение колебаний столба вязкой жидкости в трубке в виде

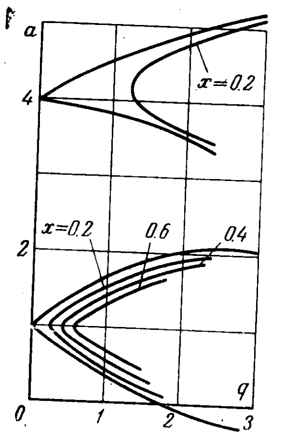
$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + 2\varkappa\frac{dz}{d\tau} + (a - 2q \cos 2\tau)z = 0 \tag{8}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2\Omega\nu}}{R\omega(1+\vartheta)} \qquad a = \frac{4g_0}{l\omega^2}\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}, \qquad q = \frac{2A}{l}\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \tag{9}$$

Зоны устойчивости и неустойчивости на плоскости (q, a) для уравнения (8) показаны на фигуре, заимствованной из [1].

Как видно, учет вязкости приводит к тому, что зоны неустойчивости с ростом $\varkappa$ отодвигаются от вертикальной оси. Поэтому для возбуждения колебаний при определенном значении коэффициента вязкости величина перегрузки q должна превышать некоторое значение q_*.

Экспериментальное исследование параметрического резонанса проводилось на специальной установке, в которой вращательное движение вала электромотора преобразовывалось в возвратно-поступательное вертикальное движение при помощи кривошипно-шатунного механизма. Амплитуда колебаний бака могла меняться от 0 до 100 *мм*, частота колебаний — от 0 до 5 *гц*.



В качестве рабочих жидкостей использовались обычная водопроводная вода, денатурат и смесь глицерина с водой. Вязкость жидкости измерялась непосредственно перед проведением эксперимента.

В каждом эксперименте определялась критическая величина амплитуды, ниже которой ни при каких частотах не происходит раскачивания столба жидкости в трубке. Происходило это следующим образом. При значениях амплитуды, бо́льших критической величины, раскачивание жидкости происходит в определенной зоне частот колебаний стенда. При более низких и более высоких частотах колебаний жидкости не наблюдается. Если же они возникали при прохождении системой резонансной зоны частот, то при выходе из нее колебания жидкости затухали. Таким образом, для фиксированного значения амплитуды стенда определялась резонансная полоса частот. Путем постепенного уменьшения амплитуды для каждого случая и находилось критическое значение амплитуды.

Большинство опытов проводилось в диапазоне частот, приблизительно в два раза больших частоты собственных колебаний жидкости в трубке, так как в этой зоне резонанс наступает при более низких амплитудах стенда, чем во всех других зонах. При помощи формул (9) по значениям критической амплитуды определялась величина q_*. Ее теоретическое значение находилось следующим образом. По формуле (8) вычислялось значение $\varkappa$. Используя свойства функций Матье, для каждого значения $\varkappa$ можно найти наименьшую величину q в каждой из зон неустойчивости. Для малых значений $\varkappa (\varkappa < 0.1)$ в рассматриваемой зоне существует простое приближенное соотношение

$$\varkappa = {}^1/_2 q_* \tag{10}$$

Для трех видов жидкостей — воды (а), денатурата (б) и смеси глицерина с водой (в) — приводим величины, определяющие условия опыта, а также найденные экспериментальные и теоретические значения критической перегрузки (l *мм* — высота столба жидкости, A *мм* — амплитуда колебаний стенда, f *гц* — резонансная частота, ν, *сст* — вязкость жидкости, q' и q'' — соответственно теоретическое и экспериментальное значение величины q_*).

	l	A	f	ν	q'	q''
(а)	273	16.5	1.89	1.22	0.074	0.122
(б)	273	25	1.80	2.20	0.102	0.184
(в)	281	80	1.75	14.4	0.224	0.382

Расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями q_* составляет приблизительно 40% во всех случаях. Такое расхождение отчасти можно объяснить тем, что, во-первых, в уравнениях никак не учтены потери на нижнем конце трубки и, во-вторых, колебания стенда отличались от гармонических из-за включения в кинематическую схему кривошипно-шатунного механизма.

Поступило 1 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
3. Karman V., Valensi J. Application de la theorie de la couche limite on probleme des oscillations a un fluide visqueux et pesant dans un tube en U., C. r. Acad. sci., 1948, т. 227, No. 2, p. 105.