ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Hutton R. E. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillation of fluid in a cylindrical container. AIAA Fifth Palm Spring, Calif., April 1—3, 1964.
4. Столбецов В. И. О немалых колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
5. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., Изд-во АН СССР, 1953, № 32 (74), вып. 1.
6. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.

УТОЧНЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ И КРУГЛОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩИХСЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Г. ОВСЕЕНКО (*Новочеркасск*)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся движение вязкой жидкости, вызванное вращением сжатого или вытянутого эллипсоида вращения. Решение задачи ищется в виде рядов по положительным степеням числа Рейнольдса, коэффициенты которых представляются в виде многочленов по присоединенным функциям Лежандра первого рода. Определяется момент сопротивления с точностью до числа Рейнольдса в квадрате. Как частные случаи получаются значения моментов сопротивления круглого диска и сферы.

1. Вращение сплюснутого эллипсоида. Рассмотрим осесимметричное стационарное движение неограниченной несжимаемой вязкой жидкости, вызванное вращением вокруг оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω сплюснутого эллипсоида вращения

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

В эллипсоидальных «сплюснутых» координатах α, φ, θ, связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$x_1 = c \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi \sin \theta, \qquad y_1 = c \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi \sin \theta, \qquad z_1 = c \operatorname{ch} \alpha \cos \theta$$

уравнение эллипсоида

$$\alpha = \alpha_0$$

где α_0 определяется из условий

$$a = c \operatorname{ch} \alpha_0, \qquad a^2 - b^2 = c^2$$

Запишем в этих координатах точные уравнения движения в безразмерных величинах

$$(1-\tau^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\tau\frac{\partial v}{\partial \tau} + 2x\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{1-\tau^2} + \frac{v}{1+x^2} =$$

$$= R\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial x} - v\left(\frac{x}{1+x^2}\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\tau}{1-\tau^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$D\psi = \operatorname{Re}\left\{(1-\tau^2)\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\Phi}{1-\tau^2}\right) - (1+x^2)\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi}{1+x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2v}{1+x_0^2}\left[\tau(1+x^2)\frac{\partial v}{\partial x} + x(1-\tau^2)\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]\right\} \qquad (1.1)$$

$$D\psi = (x^2 + \tau^2)\Phi, \qquad D = (1-\tau^2)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$x = \operatorname{sh} \alpha, \qquad x_0 = \operatorname{sh} \alpha_0, \qquad \tau = \cos \theta, \qquad v_\varphi = v_0 v(x, \tau)$$

$$v_0 ac\psi(x, \tau) \qquad (R = av_0 / \vartheta) \qquad v_0 = \omega a$$

Здесь v — функция тока, $\varphi(x, \tau)$ — вспомогательная функция, R — число Рейнольдса.

Граничные условия:

1) на поверхности эллипсоида

$$v_\varphi = \omega c \operatorname{ch} \alpha_0 \sin\theta, \qquad v_\alpha = v_\theta = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

или

$$v = \sqrt{1-\tau^2}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = x_0 \tag{1.2}$$

на бесконечности

$$v_\varphi \to 0, \qquad v_\alpha \to 0, \qquad v^\theta \to 0 \qquad \text{при } \alpha \to \infty$$

или

$$v \to 0, \qquad \frac{1}{x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \to 0, \qquad \frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} \to 0 \qquad \text{при } x \to \infty$$

Задача (1.1), (1.2) в линейной постановке рассмотрена в работе [1], где предложена формула для стоксовского момента сопротивления. Ниже излагается попытка получить более точную формулу для момента сопротивления.

Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$v(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2} \sum_{i=1}^{2k-1} u_{2k-1,i}(x) P_{2i-1}^{1}(\tau)$$

$$\Phi(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1} \sum_{i=1}^{2k-1} \Phi_{2k-1,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}\, P_{2i}^{1}(\tau) \tag{1.3}$$

$$\psi(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1} \sum_{i=1}^{2k} \psi_{2k,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}\, P_{2i}^{1}(\tau)$$

где $P_n^1(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

Выясним, какие члены рядов (1.3) надо найти, чтобы получить выражение для момента сопротивления с точностью до R^2 включительно.

Момент сопротивления вращению эллипсоида равен

$$M = \int_0^\pi P_{\alpha\varphi} 2\pi H_\varphi H_\theta H_\varphi d\theta \Big|_{\alpha=\alpha_0} \tag{1.4}$$

$$P_{\alpha\varphi} = \frac{\mu}{c}\frac{1+x^2}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v\varphi}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad H_\varphi = c\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-\tau^2}, \qquad H_\theta = c\sqrt{x^2+\tau^2}$$

Здесь H_φ и H_θ — параметры Ляме.

Подставляя в (1.4) вместо $v(x, \tau)$ значение (1.3) и интегрируя, получим

$$M = -\frac{8\pi\mu a^2 v_0}{3} \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2}\left[(1+x^2)\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{2k-1,1}}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]\Big|_{x=x_0}. \tag{1.5}$$

Итак, первые два члена ряда (1.5) будут известны, если найдем функции $u_{11}(x)$ и $u_{31}(x)$.

Подставим (1.3) в (1.1), (1.2), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях числа Рейнольдса слева и справа, а потом при одинаковых $P_n^1(\tau)$ и выпишем только те уравнения с соответствующими предельными условиями, которые необходимы для нахождения $u_{11}(x)$ и $u_{31}(x)$

$$(1+x^2)\frac{d^2u_{11}}{dx^2} + 2x\frac{du_{11}}{dx} + \left(\frac{1}{1+x^2} - 2\right)u_{11} = 0 \tag{1.6}$$

$$(1+x^2)\frac{d^2u_{31}}{dx^2} + 2x\frac{du_{31}}{dx} + \left(\frac{1}{1+x^2} - 2\right)u_{31} =$$

$$= \frac{6}{5}\left[u_{11}\frac{d\psi_{21}}{dx} + \psi_{21}\left(\frac{x}{1+x^2}u_{11} + \frac{du_{11}}{dx}\right)\right], \tag{1.7}$$

$$(1+x^2)\frac{d^2\psi_{21}}{dx^2}-6\psi_{21}=\frac{1}{7}(7x^2+3)\Phi_{11} \tag{1.8}$$

$$(1+x^2)\frac{d^2\Phi_{11}}{dx^2}-6\Phi_{11}=\frac{2}{3}u_{11}\left[xu_{11}-(1+x^2)\frac{du_{11}}{dx}\right]\frac{1}{1+x_0^2} \tag{1.9}$$

$$u_{11}=-1,\quad u_{31}=0,\quad \psi_{21}=0\quad \frac{d\psi_{21}}{dx}=0\quad \text{при } x=x_0$$

$$\tag{1.10}$$

$$u_{11}\to 0,\quad u_{31}\to 0,\quad \frac{\psi_{21}}{x^2}\to 0,\quad \frac{1}{x}\frac{d\psi_{21}}{dx}\to 0\quad \text{при } x\to\infty$$

Решение уравнения (1.6), удовлетворяющее условиям (1.10), имеет вид [1]

$$u_{11}(x)=u_0\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg}x\right) \tag{1.11}$$

$$u_0=\left(\sqrt{1+x_0^2}\operatorname{arc\,ctg}x_0-\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}\right)^{-1}$$

Далее вычисляем правую часть уравнения (1.9), затем находим его общее решение, наконец, подставляем полученное решение в уравнение (1.8), интегрируем и удовлетворяем условиям (1.10)

$$\psi_{21}(x)=\frac{u_0^2}{1+x_0^2}\{B_{21}H_3(x)+K_{21}[H_5(x)+{}^{49}/_{180}]+$$

$$+{}^{1}/_{42}[-2(x^5-x)(\operatorname{arc\,ctg}x)^2+(4x^4+x^2-3)\operatorname{arc\,ctg}x-(2x^3+x)]\} \tag{1.12}$$

$$H_3(x)={}^{1}/_{6}[-3x(1+x^2)\operatorname{arc\,ctg}x+3x^2+2]$$

$$H_5(x)=-{}^{1}/_{120}[-15x(1+x^2)(7x^2+3)\operatorname{arc\,ctg}x+105x^4+115x^2+16]$$

$$B_{21}=\frac{\Delta_2}{294\Delta_1},\qquad K_{21}=\frac{2\Delta_3}{49\Delta_1}$$

$$\Delta_1=-9x_0^5(1+x_0^2)^2(\operatorname{arc\,ctg}x_0)^2+(18x_0^6+30x_0^4+18x_0^2+2)\operatorname{arc\,ctg}x_0-$$
$$-(9x_0^5+12x_0^3+10x_0)$$

$$\Delta_2=-360x_0^3(1+x_0^2)^2(\operatorname{arc\,ctg}x_0)^3+(639x_0^6+1331x_0^4+921x_0^2+101)\times$$
$$\times(\operatorname{arc\,ctg}x_0)^2-(198x_0^5+208x_0^3+434x_0)\operatorname{arc\,ctg}x_0-(81x_0^4+403x_0^2-20)$$

$$\Delta_3=-12x_0^3(1+x_0^2)^2(\operatorname{arc\,ctg}x_0)^3+(36x_0^6+53x_0^4+30x_0^2+5)\times$$
$$\times(\operatorname{arc\,ctg}x_0)^2-(36x_0^5+34x_0^3+14x_0)\operatorname{arc\,ctg}x_0+12x_0^4+5x_0^2-4$$

Подставляем (1.11), (1.12) в правую часть уравнения (1.7), потом находим его общее решение и удовлетворяем предельным условиям (1.10)

$$u_{31}(x)=\frac{u_0^3}{1+x_0^2}\left\{N_{31}q_1^1(x)+\sqrt{1+x^2}\left\{\frac{1}{210}\left[(3x^4-6x^2-1)(\operatorname{arc\,ctg}x)^3-\right.\right.\right.$$
$$\left.-(9x^3-15x)(\operatorname{arc\,ctg}x)^2+(9x^2-6)\operatorname{arc\,ctg}x-\frac{3x^3+6x}{1+x^2}\right]+$$
$$+\frac{B_{21}}{10}\left[(3x^2-1)(\operatorname{arc\,ctg}x)^2-6x\operatorname{arc\,ctg}x+\frac{3x^2+4}{1+x^2}\right]+ \tag{1.13}$$
$$\left.\left.+\frac{K_{21}}{240}\left[-(63x^4+54x^2+31)(\operatorname{arc\,ctg}x)^2+(126x^3+102x)\operatorname{arc\,ctg}x-\frac{63x^4-93x^2-124}{1+x^2}\right]\right\}\right\}$$

$$q_1^1(x)=\sqrt{1+x^2}\left(\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arc\,ctg}x\right),\qquad N_{31}=-\frac{\Delta_4}{840\Delta_1\Delta_5}$$

$$\Delta_5 = x_0 / (1 + x_0^2) - \operatorname{arc\,ctg} x_0$$

$$\Delta_4 = 192x_0^3(1 + x_0^2)^2(\operatorname{arc\,ctg} x_0)^5 + (189x_0^8 + 156x_0^6 - 378x_0^4 - \\ - 468x_0^2 - 59)(\operatorname{arc\,ctg} x_0)^4 - (972x_0^7 + 1716x_0^5 + 1092x_0^3 - 100x_0) \times \\ \times (\operatorname{arc\,ctg} x_0)^3 + (1782x_0^6 + 2076x_0^4 + 1662x_0^2 + 168)(\operatorname{arc\,ctg} x_0)^2 - \\ - (1404x_0^5 + 588x_0^3 + 528x_0)\operatorname{arc\,ctg} x_0 + 405x_0^4 - 120x_0^2 - 48$$

Сохраняя в формуле (1.5) только два члена ряда и подставляя вместо $u_{11}(x)$ и $u_{31}(x)$ их значения (1.11) и (1.13), придем к следующему выражению для момента сопротивления:

$$M = -\frac{16\pi\mu a^2 v_0 u_0}{3(1 + x_0^2)}\left[1 - \frac{u_0^2\Delta_4}{840(1 + x_0^2)\Delta_1\Delta_5}R^2\right] \tag{1.14}$$

Чтобы получить представление о порядке величин, входящих в (1.14), приведем результаты вычислений для эллипсоидов

$$x = 0.6\,(a : b \approx 2)$$
$$M = -\mu a^2 v_0(1 + 0.000771\,R^2)\,17.93$$
$$x_0 = 1\ (a : b \approx 1.4)$$
$$M = -\mu a^2 v_0(1 + 0.000796R^2)\,20.76$$

Выполняя в формуле (1.14) предельный переход при $a \to b$, $c \to 0$, получим известное значение момента сопротивления сферы радиуса a

$$M = -8\pi\mu v_0 a^2\left(1 + \frac{1}{1200}R^2\right) \tag{1.15}$$

2. Вращение круглого диска. Пусть круглый диск радиуса a вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью ω. Решение этой задачи можно получить, полагая $x_0 = 0$ в решении (1.3), (1.5), (1.11)—(1.14) для сплюснутого эллипсоида вращения. В этом случае

$$u_0 = \frac{2}{\pi}, \quad B_{21} = \frac{101\pi^2 + 80}{1176\pi}, \quad K_{21} = \frac{5\pi^2 - 16}{98\pi}, \quad N_{31} = -\frac{59\pi^4 - 672\pi^2 + 768}{6720\pi^2}$$

Момент сопротивления будет определяться формулой

$$M = -\frac{32\mu a^2 v_0}{3}(1 + 0.0007334R^2)$$

3. Вращение вытянутого эллипсоида. Пусть вытянутый эллипсоид вращения $(x_1^2 + y_1^2) / a^2 + z_1^2 / b^2 = 1$ $(a < b)$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z_1 в безграничной несжимаемой вязкой жидкости. В эллипсоидальных «вытянутых» координатах α, φ, θ, связанных с декартовыми координатами соотношениями $x_1 = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi\sin\theta$, $y_1 = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha\sin\theta$, $z_1 = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\theta$, уравнение этого эллипсоида $\alpha = \alpha_0$, где α_0 определяется зависимостями $a = c\,\mathrm{sh}\,\alpha_0$, $b^2 - a^2 = c^2$.

Записывая полные уравнения движения в этих координатах в безразмерных величинах, разыскивая их решение в форме (1.3), определяя только те члены рядов (1.3), которые необходимы для вычисления момента сопротивления с точностью до R^2 включительно, сохраняя в формуле

$$M = -\frac{8\pi\mu a^2 v_0}{3}\sum_{k=1}^{\infty} Re^{2k-2}\left[(x^2 - 1)\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{2k-1,1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)\right]\Bigg|_{x = x_0}$$

только первые два члена ряда и подставляя в них найденные ранее $u_{11}(x)$ и $u_{31}(x)$, будем иметь

$$M = -\frac{16\pi\mu a^2 v_0 u_0}{3(x_0^2 - 1)}\left[1 + \frac{u_0^2\Delta_4}{3360(x_0^2 - 1)\Delta_1\Delta_5}Re^2\right] \tag{3.1}$$

Здесь

$$x_0 = \mathrm{ch}\,\alpha_0, \qquad u_0 = \left[\sqrt{x_0^2 - 1}\left(\frac{x_0}{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right)\right]^{-1}$$

$$\Delta_1 = -9x_0^3(x_0^2 - 1)^2\left(\ln\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right)^2 + (36x_0^6 - 60x_0^4 + 36x_0^2 - 4)\ln\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} - \\ - (36x_0^5 - 48x_0^3 + 40x_0)$$

$$\Delta_4 = -96x_0^3(x_0^2-1)^2\left(\ln\frac{x_0-1}{x_0-1}\right)^5 + (189x_0^8 - 156x_0^6 - 378x_0^4 + 486x_0^2 - 59)\times$$
$$\times\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^4 - (1944x_0^7 - 3432x_0^5 + 2184x_0^3 + 200x_0)\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^3 +$$
$$+(7128x_0^6 - 8304x_0^4 + 6648x_0^2 - 672)\left(\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)^2 -$$
$$-(1123x_0^5 - 4704x_0^3 + 4224x_0)\ln\frac{x_0+1}{x_0-1} + 6480x_0^4 + 1920x_0^2 - 768$$
$$\Delta_5 = -\frac{1}{2}\ln\frac{x_0+1}{x_0-1} + \frac{x_0}{x_0^2-1}$$

Например, для эллипсоида $x_0 = \sqrt{2}$ $(b : a \approx 1.4)$ $M = -\mu a^2 v_0(1 + 0.000869R^2)31.44$.

Если в формуле (3.1) совершим предельный переход при $a \to b$, $c \to 0$, то придем к полученному ранее результату для сферы (1.15).

Сравнивая значения моментов сопротивления круглого диска, сплюснутого эллипсоида, сферы, вытянутого эллипсоида при одинаковом экваториальном радиусе, замечаем, что при изменении формы тела от круглой пастинки к вытянутому эллипсоиду наряду с возрастанием момента сопротивления, что и должно быть в связи с ростом поверхности соприкосновения тела с жидкостью, увеличивается та его часть, которая происходит от учета инерционных членов в уравнениях движения.

Поступило 10 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ieffery G. B. On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. Proc. Math. Soc., London, 1915, Ser. 2, vol. 14, pt. 1.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися эллипсоидами. Аннотации докл. 2-го Всес. съезда по теорет. и прикл. механике, М., 1964.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПЕРЕГРУЗКАХ

С. С. ГРИГОРЯН, Л. И. ЖИГАЧЕВ, Б. С. КОГАРКО, Ю. Л. ЯКИМОВ

(*Москва*)

Изучено поведение вязкой жидкости в сообщающихся сосудах при переменных вертикальных перегрузках. Экспериментально доказано возникновение резонансной раскачки столба жидкости в сообщающихся сосудах при вертикальных колебаниях системы в целом. Выведено приближенное уравнение колебаний вязкой жидкости при переменной перегрузке, позволяющее определить зависимость критической величины перегрузки, при которой начинается раскачивание жидкости, от величины вязкости жидкости и параметров системы. Полученные теоретические и экспериментальные результаты находятся в удовлетворительном согласии.

Исследуемые жидкости помещались в бак прямоугольной формы из оргстекла размером $130 \times 150 \times 400$ *мм*, внутри которого была вертикально закреплена стеклянная трубка с внутренним диаметром 17 *мм*, открытая с обоих концов. При вертикальных колебаниях бака наблюдается следующее явление. С приближением частоты колебаний к величине, приблизительно вдвое превышающей частоту собственных колебаний столба жидкости в трубке, последняя начинает интенсивно раскачиваться в вертикальном направлении, в то время как жидкость в баке остается в покое относительно стенок. Возникновение колебаний в трубке происходит, если амплитуда колебаний бака превосходит некоторую величину, зависящую от вязкости жидкости. Будем рассматривать движение жидкости в трубке в гидравлическом приближении, но с учетом возникновения пограничного слоя вблизи стенок трубки. Выберем систему координат, связанную с баком (ось OZ направлена вертикально вниз). Если бак совершает гармонические колебания вдоль вертикальной оси относительно неподвиж-