ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. И. СТОЛБЕЦОВ

(*Москва*)

Получены нелинейные уравнения возмущенного движения системы тело — идеальная жидкость. Уравнения получены применительно к наиболее важному для практики случаю, когда немалыми являются два параметра, соответствующие колебаниям жидкости по основному тону в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и являются обобщением нелинейных уравнений возмущенного движения, полученных Г. С. Наримановым. Это обобщение позволяет выявить некоторые нелинейные свойства колеблющейся жидкости, важные для практики. Оказалось, что в некоторых случаях нелинейная теория не просто дает малую поправку к соответствующим результатам, следующим из линейной теории, а приводит к решениям, отличающимся от этих результатов, что является следствием наличия у системы тело — жидкость двух плоскостей одинаковой динамической симметрии.

Приведена таблица основных гидродинамических характеристик полости, образованной соосными цилиндрами.

Полученное решение позволило эффективно построить границы применимости обычных линеаризованных уравнений возмущенного движения тела с жидкостью в случае, когда тело совершает малые гармонические колебания.

Свойства немалых колебаний жидкости в полостях рассматривались Г. С. Наримановым, Н. Н. Моисеевым [1, 2]. Весьма важен для практики случай, когда немалым является параметр, характеризующий основной тон колебаний жидкости. При этом, как показано в работах [3, 4], в полостях с двумя одинаковыми плоскостями динамической симметрии необходимо учитывать немалость двух параметров, соответствующих основному тону колебаний жидкости в плоскостях динамической симметрии тела. Для этого случая ниже получены уравнения возмущенного движения тела с жидкостью. Для гармонических колебаний полости изучен вопрос о границах применимости обычных линеаризованных уравнений [5, 6].

1. Рассмотрим возмущенное движение абсолютно жесткого тела с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, в поле массовых сил, обладающих при невозмущенном движении тела потенциалом, градиент которого равен **g**. Свяжем с телом систему координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой поместим в центр масс системы тело — жидкость.

В состоянии покоя или некоторого заданного невозмущенного движения система координат $Ox_1x_2x_3$ совпадает с «абсолютной» системой $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$. Будем полагать, что плоскости x_1x_2 и x_1x_3 совпадают с плоскостями одинаковой симметрии тела, а вектор $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_1^*$ ($\mathbf{e}_i^*$ и $\mathbf{e}_i$ — орты осей x_i^* и x_i, соответственно, $i = 1, 2, 3$).

Возмущенное движение тела будем задавать вектором $\mathbf{u} = O^*O$ и вектором ω малого поворота системы $x_1x_2x_3$ относительно системы координат $x_1^*x_2^*x_3^*$. Проекции векторов $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$ на оси x_i будем считать малыми в том смысле, что во всех динамических уравнениях можно пренебречь их квадратами.

Возмущенную свободную поверхность жидкости Σ зададим уравнением

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 - x_{\Sigma 0} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\psi_{ak}(x_2, x_3) = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь $x_{\Sigma 0}$ — абсцисса невозмущенной свободной поверхности жидкости Σ_0; $a_k(t)$ — совокупность параметров, зависящих от времени, а множество ψ_{ak} ($k = 1, 2, 3, \ldots$) состоит из нормированных решений краевой задачи

$$\Delta\varphi_{ak0}|_{Q_0} = 0, \qquad \left[\psi_{ak} = \frac{\partial\varphi_{ak0}}{\partial x_1}\right]_{\Sigma 0}, \qquad \frac{\partial\varphi_{ak0}}{\partial n}\Big|_S = 0$$
$$\left[\frac{\partial\varphi_{ak0}}{\partial x_1} + \frac{\omega_{ak}^2}{g}\varphi_{ak0}\right]_{\Sigma 0} = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь Q_0 — объем, занятый жидкостью в невозмущенном состоянии; ω_{ak}^2 — квадрат частоты малых свободных колебаний жидкости в неподвижной полости; $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем Q_0; S — смоченная поверхность полости.

Из симметрии полости следует, что совокупность решений φ_{ak0} задачи (1.2) распадается на четыре подсистемы функций φ_{rt0}, φ_{pj0}, φ_{sm0}, φ_{qn0} ($i, m, n = 1, 2, 3, \ldots$).

обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\varphi_{ri0}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{ri0}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{ri0}(x_1, x_2, -x_3)\\ \varphi_{pj0}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{pj0}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{pj0}(x_1, x_2, -x_3)\\ \varphi_{sm0}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{sm0}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{sm0}(x_1, x_2, -x_3)\\ \varphi_{qn0}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{qn0}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{qn0}(x_1, x_2, -x_3)\end{aligned} \tag{1.3}$$

При этом $\{\varphi_{ak0}\} \backsim \{\varphi_{ri0}, \varphi_{pj0}, \varphi_{sm0}, \varphi_{qn0}\}$. В силу соотношений (1.2) функции

$$\psi_{ri} = \left.\frac{\partial\varphi_{ri0}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{pj} = \left.\frac{\partial\varphi_{pj0}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{sm} = \left.\frac{\partial\varphi_{sm0}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{qn} = \left.\frac{\partial\varphi_{qn0}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0} \tag{1.4}$$

также обладают свойствами симметрии (1.3). Используя (1.4), можно записать

$$x_1 = x_{\Sigma_0} + \sum_{i=1}^{\infty} r_i\psi_{ri} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j\psi_{pj} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m\psi_{sm} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n\psi_{qn} \tag{1.5}$$

что справедливо для цилиндрических участков полостей. Для других полостей вращения (сфер, конусов и пр.) вводятся такие криволинейные координаты $q_1q_2q_3$, чтобы $q_2 = \text{const}$ было бы уравнением поверхности S.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда параметры r_1 и p_1, определяющие основной тон колебаний жидкости в плоскостях x_1x_2, x_1x_3, являются немалыми в том смысле, что квадраты их величин соизмеримы с первыми степенями остальных параметров, характеризующих возмущенное движение системы тело — жидкость. Получим уравнения, описывающие это движение.

2. Будем считать, что в начальный момент времени движение жидкости было безвихревым. В соответствии с принятыми выше допущениями безвихревой характер движения жидкости сохранится и во все время движения, а поле абсолютных скоростей частиц жидкости будет обладать потенциалом скоростей φ. Условие неразрывности дает

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } Q \tag{2.1}$$

где Q — объем жидкости, занимаемый ею в произвольный момент времени.

На поверхностях S и Σ должны выполняться следующие кинематические условия:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \mathbf{u}^\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{R}\times\mathbf{n})\boldsymbol{\omega}^\cdot \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Sigma = \mathbf{u}^\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{R}\times\mathbf{n})\boldsymbol{\omega}^\cdot - G^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.3}$$

Следуя работе [1], функцию φ ищем в виде

$$\varphi = \mathbf{u}^\cdot\mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}^\cdot\boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\cdot(t)\varphi_{ai} \tag{2.4}$$

Здесь Ω, φ_{ai} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармонические функции, удовлетворяющие условиям

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right|_{S+\Sigma} = \mathbf{R}\times\mathbf{n}, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_{ak}}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_{ak}}{\partial}\right|_\Sigma = \frac{\psi_{ak}}{G} \tag{2.5}$$

Так как часть условий (2.5) должна выполняться на поверхности Σ, положение которой становится известным только после решения рассматриваемой задачи, функции Ω и φ_{ak} необходимо искать в виде следующих отрезков степенных рядов:

$$\Omega = \Omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Omega_k + a_1^2\Omega_{11} + a_1a_2\Omega_{12} + a_2^2\Omega_{22} \tag{2.6}$$

$$\varphi_{ak} = \varphi_{ak0} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l\varphi_{akl} + a_1^2\varphi_{ak11} + a_1a_2\varphi_{ak12} + a_2^2\varphi_{ak22}$$

$$a_1 = r_1 = r, \qquad a_2 = p_1 = p$$

Для нахождения граничных условий, которым должны удовлетворять гармонические функции $\Omega_0, \ldots, \varphi_{ak22}$, подставим (2.6) в условия (2.5). Сравнивая правые и левые части полученных уравнений, найдем

$$\left.\frac{\partial\Omega_0}{\partial n}\right|_{S+\Sigma} = \mathbf{R}\times\mathbf{n}, \quad \left.\frac{\partial\Omega_{kn}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \operatorname{div}'(\psi_{ak}\nabla\Omega_{0n}) + (\nabla\psi_{ak}\times\mathbf{R})\mathbf{e}_n \tag{2.7}$$

$(n = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\left.\frac{\partial\Omega_{mmk}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \operatorname{div}'\left(\psi_{am}\nabla\Omega_{km} + \frac{\psi_{am}^2}{2}\nabla\frac{\partial\Omega_{k0}}{\partial x_1}\right) + (\nabla\psi_{am}^2\times\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_k \tag{2.8}$$

$(k = 1, 2, 3;\ m = 1, 2)$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{aimm}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \operatorname{div}'\left(\psi_{am}\nabla\varphi_{aim} + \frac{\psi_{am}^2}{2}\nabla\psi_{ai}\right) \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2 \\ i = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{ain}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \operatorname{div}'(\psi_{an}\nabla\varphi_{ai0}) \qquad (i, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{ai12}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \operatorname{div}'(\psi_{a1}\nabla\varphi_{ai2} + \psi_{a2}\nabla\varphi_{ai1} + \psi_{a1}\psi_{a2}\nabla\psi_{ai}) \tag{2.11}$$

Здесь принято обозначение

$$\operatorname{div}'(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \partial A_2 / \partial x_2 + \partial A_3 / \partial x_3$$

Производные по нормали к S от функций Ω_k, Ω_{11}, $\ldots$, φ_{ai12}, как это следует из (2.5), (2.7), тождественно равны нулю.

3. Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — абсолютные количества движения жидкости и твердого тела, соответственно, а $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ — моменты абсолютных количеств движения, вычисленные относительно точки O.

Уравнения возмущенного движения тела запишем в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{K} = \mathbf{P}, \qquad \frac{\tilde{d}\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{G} + \mathbf{u}^{\cdot}\times\mathbf{K} = \mathbf{M}$$
$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ — главный вектор и главный момент относительно точки O всех возмущающих сил, а символ $\tilde{d} / dt$ означает дифференцирование в системе координат $x_1x_2x_3$. Согласно определению $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{G}_1$ имеем

$$\mathbf{K}_1 = \rho_0\int_Q \nabla\varphi\, dQ. \qquad \mathbf{G}_1 = \rho_0\int_Q \mathbf{R}\times\nabla\varphi\, dQ \tag{3.2}$$

где ρ_0 — плотность жидкости.

Используя выражения (2.4), (2.5) и применяя к первой из формул (3.2) интегрирование по частям, получим

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{u}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{L}_1 + \mathbf{e}_2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{2ak}a_k^{\cdot} + \mathbf{e}_3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{3ak}a_k^{\cdot} + \mathbf{e}_1\rho_0(N_{a1}^2a_1^{\cdot}a_1 + N_{a2}^2a_2^{\cdot}a_2) \tag{3.3}$$

Здесь m — масса жидкости, $\mathbf{L}_1$ — вектор статического момента «возмущенного» объема жидкости относительно центра масс невозмущенной системы тело — жидкость, а коэффициенты λ_{2ak}, λ_{3ak} N_{ak}^2 вычисляются по формулам

$$\lambda_{kai} = \rho_0\int_{\Sigma_0} x_k\psi_{ai}\, dS, \qquad N_{ak}^2 = \int_{\Sigma_0}\psi_{ak}^2\, dS \qquad (k = 1, 2) \tag{3.4}$$

Опуская достаточно простые, но громоздкие промежуточные выкладки, выпишем выражение для $\mathbf{G}_1$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{L}_1\times\mathbf{u}^{\cdot} + \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + (a_1\mathbf{J}^{(1)} + a_2\mathbf{J}^{(2)})\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + \rho_0\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_0^{(k)}a_k^{\cdot} +$$

$$+\rho_0\sum_{k=1}^{2}(\theta_{11}^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_1{}^2+\theta_{22}^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_2{}^2+\theta_{12}^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_1a_2)+$$

$$+\rho_0\sum_{k=3}^{\infty}(\theta_k^{(1)}a_1{}^{\cdot}a_k+\theta_1^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_1+\theta_k^{(2)}a_2{}^{\cdot}a_k+\theta_2^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_2)+\rho_0\sum_{k,l=1}^{2}\theta_l^{(k)}a_k{}^{\cdot}a_l \tag{3.5}$$

Здесь J — тензор Н. Е. Жуковского; $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ — симметричные тензоры, определяемые равенством

$$J_{kj}^{(m)}=\rho_0\int_{Q_0}(\nabla\,\Omega_{mk}\,\nabla\,\Omega_{0j}+\nabla\Omega_{0k}\,\nabla\,\Omega_{mj})\,dQ \qquad (m=1,2) \tag{3.6}$$

$$\theta_k=\Omega_k+\psi_{ak}\frac{\partial\Omega_0}{\partial x_1}, \qquad \theta_{mm}=\Omega_{mm}+\psi_{am}\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_1}+\frac{\psi_{am}{}^2}{2}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x_1{}^2}$$

$$\theta_{12}=\Omega_{12}+\psi_{a1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}+\psi_{a2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}+\psi_{a1}\psi_{a2}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x_1{}^2} \tag{3.7}$$

а под величинами $\theta_{11}^{(k)}$, $\theta_{22}^{(k)}$ и т. д. понимаются интегралы

$$\int_{\Sigma_0}\theta_{11}\psi_{ak}\,dS,\ \int_{\Sigma_0}\theta_{22}\psi_{ak}\,dS \text{ и т. д.}$$

Система уравнений (3.1) не является замкнутой. Недостающие уравнения являются следствием условия постоянства давления жидкости на поверхности Σ [1] и имеют вид

$$\int_{\Sigma_0}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+gx_1{}^*\right]\psi_{ak}\,dS=0 \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{3.8}$$

Ниже на основе использования свойств симметрии системы тело — жидкость мы упростим уравнения (3.1), (3.8) и выпишем их в явном виде.

4. Благодаря симметрии полости все функции, определенные граничными условиями (2.7) — (2.11) и являющиеся коэффициентами разложения (2.6), удовлетворяют обязательно одному из равенств, аналогичных условиям (1.3). Это позволяет упростить общие уравнения возмущенного движения (3.1), (3.8). Упростим уравнения количеств движения. Согласно (1.3) и (3.4) имеем

$$\lambda_{2ak}\neq 0,\quad a_k\in\{p_j\},\qquad \lambda_{2ak}\equiv 0,\quad a_k\in\{r_i,\ s_m,\ q_n\} \tag{4.1}$$
$$(k,i,j,m,n=1,2,3,\ldots)$$
$$\lambda_{3ak}\neq 0,\quad a_k\in\{r_i\},\qquad \lambda_{3ak}\equiv 0,\quad a_k\in\{p_j,\ s_m,\ q_n\}$$

Выражение для L_1 с учетом немалости параметров a_1 и a_2 запишем в виде

$$L_1=\lambda_{2p1}p_1e_2+\lambda_{3r1}r_1e_3 \tag{4.2}$$

где

$$\lambda_{2pj}=\rho_0\int_{\Sigma_0}x_2\psi_{pj}\,dS, \qquad \lambda_{3ri}=\rho_0\int_{\Sigma_0}x_3\psi_{ri}\,dS$$
$$(i,j=1,2,3,\ldots) \tag{4.3}$$

Используя полученные результаты, выпишем уравнения количеств движения системы в проекциях на оси x_1, x_2, x_3

$$(m_0+m)u_1{}^{\cdot\cdot}+(\lambda_{3r1}\omega_2{}^{\cdot}r_1-\lambda_{2p1}\omega_3{}^{\cdot}p_1)^{\cdot}+\rho_0(N_{r1}{}^2r_1{}^{\cdot}r_1+ \tag{4.4}$$
$$+N_{p1}{}^2p_1{}^{\cdot}p_1)^{\cdot}+\lambda_{3r1}\omega_2{}^{\cdot}r_1{}^{\cdot}-\lambda_{2p1}\omega_3{}^{\cdot}p_1{}^{\cdot}=P_1$$

$$(m_0+m)u_2{}^{\cdot\cdot}-\lambda_{3r1}{}^{\cdot}(\omega_1{}^{\cdot}r_1)^{\cdot}-\lambda_{3r1}\omega_1{}^{\cdot}r_1{}^{\cdot}+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{2pj}p_j{}^{\cdot\cdot}=P_2 \tag{4.5}$$

$$(m_0+m)u_3{}^{\cdot\cdot}+\lambda_{2p1}(\omega_1{}^{\cdot}p_1)^{\cdot}+\lambda_{2p1}\omega_1{}^{\cdot}p_1{}^{\cdot}+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{3ri}r_i{}^{\cdot\cdot}=P_3 \tag{4.6}$$

Здесь m_0 — масса оболочки, а u_i и ω_i — проекции векторов $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат x_1, x_2, x_3.

Аналогично упрощаются уравнения моментов количеств движения тела с жидкостью. Из симметрии полости следует, например, что тензор $\mathbf{J}$ — диагональный, т. е. $\mathbf{J} = \{J_{11}, J_{22}, J_{33}\}$, а тензоры $\mathbf{J}^{(k)}$ имеют структуру

$$\mathbf{J}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

где коэффициенты J_k определяются формулой (3.6). Из свойств симметрии полости следует также, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot} \Omega_{01}^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{\cdot} \Omega_{01}^{(n)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot} \Omega_{02}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\cdot} \Omega_{02}^{(i)} \tag{4.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot} \Omega_{03}^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{\cdot} \Omega_{03}^{(j)}, \qquad \mathbf{\Omega}_0 = \sum_{k=1}^{3} \Omega_{0k} \mathbf{e}_k$$

Здесь и в дальнейшем под символами $\Omega_{01}^{(n)}$, $\Omega_{02}^{(i)}$, понимаются интегралы

$$\Omega_{01}^{(n)} = \int\limits_{\Sigma_0} \Omega_{01} \psi_{qn} dS, \qquad \Omega_{02}^{(i)} = \int\limits_{\Sigma_0} \Omega_{02} \psi_{ri} dS, \qquad \Omega_{03}^{(j)} = \int\limits_{\Sigma_0} \Omega_{03} \psi_{pj} dS \tag{4.9}$$

Используя полученные результаты, выпишем уравнения моментов количеств движения тела с жидкостью в проекциях на оси x_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{gathered}
(J_{11} + J_{11}^{\circ}) \omega_1^{\cdot\cdot} + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{01} q_n^{\cdot\cdot} + (\lambda_{2p1} p u_3^{\cdot} - \lambda_{3r1} r u_2^{\cdot})^{\cdot} + J_1 (r \omega_3^{\cdot})^{\cdot} + J_2 (p \omega_2^{\cdot})^{\cdot} + \\
+ \rho_0 \theta_{21}^{(1)} (r^{\cdot} p)^{\cdot} + \rho_0 \theta_{11}^{(2)} (r p^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \sum_{j=2}^{\infty} (\theta_{j1}^{(1)} r^{\cdot} p_j + \theta_{11}^{(j)} r p_j^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \sum_{i=2}^{\infty} (\theta_{i1}^{(2)} r_i p^{\cdot} + \theta_{21}^{(i)} p r_i^{\cdot})^{\cdot} + \\
+ \rho_0 (\Omega_{03}^{(2)} \omega_2^{\cdot} p^{\cdot} - \Omega_{02}^{(1)} \omega_3^{\cdot} r^{\cdot}) + \rho_0 (\lambda_{3r1} u_2^{\cdot} r^{\cdot} - \lambda_{2p1} u_3^{\cdot} p^{\cdot}) = M_1
\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}
(J_{22} + J_{22}^{\circ}) \omega_2^{\cdot\cdot} + \rho_0 \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_{02}^{(i)} r_i^{\cdot\cdot} + \lambda_{3r1} (r u_1^{\cdot})^{\cdot} + J_2 (p \omega_1^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{m2}^{(1)} s_m r^{\cdot} + \theta_{12}^{(m)} r s_m^{\cdot})^{\cdot} + \\
+ \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_{22}^{(n)} p q_n^{\cdot} + \theta_{n2}^{(2)} q_n p^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \theta_{112}^{(1)} (r^2 r^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \theta_{222}^{(1)} (p^2 r^{\cdot})^{\cdot} + \\
+ g \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{3ri} r_i + \rho_0 \theta_{122}^{(2)} (r p p^{\cdot})^{\cdot} - \rho_0 \Omega_{03}^{(2)} \omega_1^{\cdot} p^{\cdot} - \lambda_{3r1} u_1^{\cdot} r^{\cdot} = M_2
\end{gathered} \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered}
(J_{33} + J_{33}^{\cdot}) \omega_3^{\cdot\cdot} + \rho_0 \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_{03}^{(j)} p_j^{\cdot\cdot} - \lambda_{3r1} (r u_1^{\cdot})^{\cdot} + J_1 (r \omega_1^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_{n3}^{(1)} r^{\cdot} q_n + \theta_{13}^{(n)} r q_n^{\cdot})^{\cdot} - \\
- g \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2pj} p_i + \rho_0 \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{23}^{(m)} p s_n^{\cdot} + \theta_{m3}^{(2)} p^{\cdot} s_m)^{\cdot} + \rho_0 \theta_{123}^{(1)} (r p r^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \theta_{113}^{(2)} (r^2 p^{\cdot})^{\cdot} + \\
+ \rho_0 \theta_{223}^{(2)} (p^2 p^{\cdot})^{\cdot} + \rho_0 \Omega_{02}^{(1)} r^{\cdot} \omega_1^{\cdot} + \lambda_{2p1} u_1^{\cdot} p^{\cdot} = M_3
\end{gathered} \tag{4.12}$$

В этих уравнениях через J_{ii}° обозначены диагональные элементы тензора инерции твердого тела, под символами $\theta_{11}^{(2)}$, $\theta_{21}^{(1)}, \ldots$ понимаются интегралы

$$\int\limits_{\Sigma_0} \theta_{11} \psi_{a2} dS, \qquad \int\limits_{\Sigma_0} \theta_{21} \psi_{a1} dS$$

и т. д., а функции θ_{ik}, θ_{ijk} определяются равенствами

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{3} \theta_{kj} \mathbf{e}_j, \quad \theta_{km} = \sum_{j=1}^{3} \theta_{kmj} \mathbf{e}_j \quad (k, m = 1, 2) \tag{4.13}$$

Дифференциальные уравнения, замыкающие систему уравнений (4.4) — (4.6), (4.10) — (4.12), получим из условия (3.8), в котором значение подынтегрального выражения на поверхности Σ выразим с учетом немалости параметров $a_1(t)$, $a_2(t)$ через значения этого выражения и его производных на поверхности Σ_0. Подставляя в полученный таким образом результат значение φ, взятое из уравнений (2.4), (2.6), полагая в уравнении (3.8) последовательно $\psi_{ak} = \psi_{ri}$, ψ_{pj}, ψ_{sm}, ψ_{qn} и проводя интегрирование в пределах поверхности Σ_0, получим уравнения, определяющие изменение параметров r_i, p_j, s_m, q_n во времени

$$\varphi_{ri0}{}^{(i)} r_i^{\cdot\cdot} + \Omega_{02}{}^{(i)} \omega_2^{\cdot\cdot} + x_3{}^{(i)} u_3^{\cdot\cdot} + g\psi_{ri}{}^{(i)} r_i + g x_3{}^{(i)} \omega_2 +$$

$$+ R_i(r, p) + R_{sq}{}^{(i)}(r, p, s_m, q_n) + R_{u\omega}{}^{(i)}(\omega_1, u_1, r, p) = 0 \tag{4.14}$$

$$\varphi_{pj0}{}^{(j)} p_j^{\cdot\cdot} + \Omega_{03}{}^{(j)} \omega_3^{\cdot\cdot} + x_2{}^{(j)} u_2^{\cdot\cdot} + g\psi_{pj}{}^{(j)} p_j - g x_2{}^{(j)} \omega_3 +$$

$$+ P_j(r, p) + P_{sq}{}^{(j)}(r, p, s_m, q_n) + P_{u\omega}{}^{(j)}(\omega_1, u_1, r, p) = 0 \tag{4.15}$$

$$s_m^{\cdot\cdot} + \omega_{sm}{}^2 s_m + L_{sm}(r, p) = 0 \tag{4.16}$$

$$q_n^{\cdot\cdot} + \omega_{qn}{}^2 q_n + L_{qn}(r, p) = -\Omega_{01}{}^{(n)} \omega_1^{\cdot\cdot} / \varphi_{qn0}{}^{(n)} \tag{4.17}$$

В уравнениях (4.14) — (4.17) через $R_i(r, p), \ldots, L_{qn}(r, p)$ обозначены следующие нелинейные операторы:

$$R_i(r, p) = a^{(i)}(r^\cdot r^2)^\cdot + b^{(i)}(r^\cdot p^2)^\cdot + c^{(i)}(p^\cdot r p^\cdot)^\cdot + d^{(i)} p^{\cdot 2} r + e^{(i)} r^{\cdot 2} r + f^{(i)} r^\cdot p^\cdot p \tag{4.18}$$

$$R_{sq}^{(i)}(r, p, s_m, q_n) = \sum_{m=1}^{\infty} [R_{1s}^{(i)} (r^\cdot s_m)^\cdot + R_{2s}^{(i)} (r s_m^\cdot)^\cdot + R_{3s}^{(i)} r^\cdot s_m^\cdot] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [R_{1q}^{(i)} (p^\cdot q_n)^\cdot + R_{2q}^{(i)} (p q_n^\cdot)^\cdot + R_{3q}^{(i)} p^\cdot q_n^\cdot] \tag{4.19}$$

$$R_{u\omega}{}^{(i)}(\omega_1, u_1, r, p) = \theta_{21}{}^{(i)}(p\omega_1^\cdot)^\cdot + \psi_{r1}{}^{(i)}(r u_1^\cdot)^\cdot + r^\cdot u_1^\cdot \psi_{r1}{}^{(i)} + p^\cdot \omega_1^\cdot (\nabla\Omega_{10} \nabla\varphi_{p10})^{(i)}$$

$$P_j(r, p) = a^{(j)}(r^\cdot r^2)^\cdot + b^{(j)}(p^\cdot r^2)^\cdot + c^{(j)}(r^\cdot r p)^\cdot + d^{(j)} r^{\cdot 2} p + e^{(j)} p^{\cdot 2} p + f^{(j)} r^\cdot p^\cdot r \tag{4.20}$$

$$P_{sq}^{(j)}(r, p, s_m, q_n) = \sum_{m=1}^{\infty} [P_{1s}^{(j)} (p^\cdot s_m)^\cdot + P_{2s}^{(j)} (p s_m^\cdot)^\cdot + P_{3s}^{(j)} p^\cdot s_m^\cdot] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [P_{1q}^{(j)} (r^\cdot q_n)^\cdot + P_{2q}^{(j)} (r q_n^\cdot)^\cdot + P_{3q}^{(j)} r^\cdot q_n^\cdot] \tag{4.21}$$

$$P_{u\omega}{}^{(j)}(\omega_1, u_1, r, p) = \theta_{11}{}^{(j)}(r\omega_1^\cdot)^\cdot + \psi_{p1}{}^{(j)} p^\cdot u_1^\cdot + \psi_{p1}{}^{(j)}(p u_1^\cdot)^\cdot + r^\cdot \omega_1^\cdot (\nabla\Omega_{10} \nabla\varphi_{r10})^{(j)}$$

$$L_{sm}(r, p) = D_{sm}(r^\cdot r)^\cdot + E_{sm}(p^\cdot p)^\cdot + F_{sm} r^{\cdot 2} + G_{sm} p^{\cdot 2} \tag{4.22}$$

$$L_{qn}(r, p) = D_{qn}(r^\cdot p)^\cdot + E_{qn}(r p^\cdot)^\cdot + F_{qn} r^\cdot p^\cdot \tag{4.23}$$

Гидродинамические коэффициенты, стоящие при различных степенях параметров r_i, p_j, s_m, q_n в выражениях (4.18)—(4.24), эффективно вычисляются, если решена задача (1.2) об определении собственных функций и спектра частот колебаний жидкости в неподвижной полости.

Для произвольных полостей вращения, как это можно показать, используя упомянутые выше криволинейные координаты $q_1 q_2 q_3$, уравнения (4.14) — (4.17) сохраняют свою структуру. Однако для решения задач (2.6) — (2.11) в этом случае целесообразнее использовать метод интегральных уравнений и вариационный метод.

Уравнения (4.4)—(4.6), (4.10)—(4.12), (4.14)—(4.17) достаточно громоздки прежде всего из-за наличия в них большого числа нелинейных членов. Однако в ряде важных для практики случаев эти уравнения существенно упрощаются. Прежде всего, заметив, что изменение координаты u_1 не связано линейно с изменением параметров a_k, можно отщепить уравнение (4.4) от системы уравнений возмущенного движения, рассматривая его независимо от них. В полученной укороченной системе следует пренебречь изменением параметра u_1 [1].

Рассматриваемая система уравнений получена применительно к случаю, когда немалы величины параметров r_1 и p_1. В этом случае можно пренебречь величинами параметров r_i и p_j для значений $i, j \geqslant 2$. Наконец, в полученной системе уравнений возмущенного движения необходимо учесть конечное (в большинстве случаев небольшое) число форм колебаний жидкости, которым соответствуют параметры s_m и q_n.

В ряде случаев уравнения сил и моментов могут быть линеаризованы, в то время как уравнения колебаний жидкости необходимо оставить нелинейными.

В первую очередь это относится к тем случаям, когда силовые и моментные реакции колеблющейся жидкости являются слабыми и хорошо описываются линейными членами.

При использовании линеаризованных уравнений на практике важно знать границы применимости этих уравнений. Решение подобной задачи в общей постановке наталкивается на существенные математические трудности. Но при ограничениях, которые использованы в этой работе, в некоторых случаях можно эффективно установить эти границы.

5. Известно, что наличие у тела двух плоскостей одинаковой динамической симметрии накладывает некоторую специфику на характер колебаний жидкости, содержащейся в сосуде, когда последний совершает гармонические колебания на частотах, близких к частоте ω_{r1} колебаний жидкости по основному тону [3, 4].

Рассмотрим задачу об определении колебаний жидкости в полости, образованной двумя соосными цилиндрами в случае, когда полость колеблется по закону

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad u_3 = u_{30} \cos \omega t \tag{5.1}$$

Будем предполагать, что $u_{30} / R \ll 1$, $\omega^2 \approx \omega_{r1}^2$.

Положив в уравнениях (4.14)—(4.17) $i = j = 1$ и используя равенства (5.1), получим

$$\begin{gathered} r^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 r + L(r) + L(r, p) + R_{sq}(r, p, s_m, q_n) = H\omega^2 \cos \omega t \\ p^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 p + L(p) + L(p, r) + P_{sq}(r, p, s_m, q_n) = 0 \\ s_m^{\cdot\cdot} + \omega_{sm}^2 s_m + L_{sm}(r, p) = 0, \qquad q_n^{\cdot\cdot} + \omega_{qn}^2 q_n + L_{qn}(r, p) = 0 \\ \omega_{r1} = \omega_{p1} = \omega_0 \qquad (m \leqslant M, \ n \leqslant N) \end{gathered} \tag{5.2}$$

Здесь использованы обозначения

$$L(x) = a(x^{\cdot} x^2)^{\cdot} + e x^{\cdot 2} x \tag{5.3}$$

$$L(x, y) = b(x^{\cdot} y^2)^{\cdot} + c(x y y^{\cdot})^{\cdot} + d y^{\cdot 2} x + f x^{\cdot} y^{\cdot} y \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} R_{sq}(r, p, s_m, q_n) = \sum_{m=1}^{M} [R_{1s}(r^{\cdot} s_m)^{\cdot} + R_{2s}(r s_m^{\cdot})^{\cdot} + R_{3s} r^{\cdot} s_m] + \\ + \sum_{m=1}^{N} [R_{1q}(p^{\cdot} q_n)^{\cdot} + R_{2q}(p q_n^{\cdot})^{\cdot} + R_{3q} p^{\cdot} q_n^{\cdot}] \\ P_{sq}(r, p, s_m, q_n) = \sum_{m=1}^{M} [P_{1s}(p^{\cdot} s_m)^{\cdot} + P_{2s}(p s_m^{\cdot})^{\cdot} + P_{3s} p^{\cdot} s_m^{\cdot}] + \\ + \sum_{n=1}^{N} [P_{1q}(r_n^{\cdot})^{\cdot} + P_{2q}(r q_n^{\cdot})^{\cdot} + P_{3q} r^{\cdot} q_n] \end{gathered} \tag{5.5}$$

$a, b, \ldots, P_{3q}, H / u_{30}$ — гидродинамические коэффициенты, зависящие от внутреннего δR_0 и внешнего R_0 радиусов цилиндров и от глубины жидкости h. Известно [4], что для ряда полостей влиянием параметров s_m и q_n на вынужденные колебания жидкости можно пренебречь. Это согласуется с тем фактом, что учет в уравнениях (5.2) нелинейных членов типа $(r^{\cdot 2} r)^{\cdot}$, $(r^{\cdot 2} p)^{\cdot}$ и т. д. уже является уточнением обычных линеаризованных уравнений. Ниже будут анализироваться уравнения, в которых не учитываются операторы R_{sq} и P_{sq}. Учет этих операторов не вызывает принципиальных трудностей, но сильно загромождает расчеты.

Будем искать возможные периодические установившиеся решения системы

$$r^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 r + L(r) + L(r, p) = H\omega^2 \cos \omega t, \qquad p^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 p + L(p) + L(p, r) = 0 \tag{5.6}$$

Приводим таблицу безразмерных гидродинамических коэффициентов, входящих в уравнения (5 7), рассчитанных с помощью ЭЦВМ для различных значений параметра δ $(h / R_0 = 3)$. Здесь h — глубина жидкости

Линеаризованный вариант системы (5.6) допускает периодическое решение

$$r = r_0^* \cos \omega t, \qquad p = 0, \qquad r_0^* (\omega_0^2 - \omega^2) = H\omega^2 \tag{5.7}$$

Периодическое решение уравнений (5.6) будем искать в первом приближении в виде

$$r = r_0 \cos \omega t + A \sin \omega t, \qquad p = p_0 \sin \omega t + B \cos \omega t \tag{5.8}$$

где опущены высшие гармоники, имеющие в общем балансе вес 1—3%.

δ	a	b	c	d	e	f
0.0	0.5525	—0.4260	0.9786	0.1634	0.1454	—0.01803
0.2	0.5936	—0.4610	1.055	0.07815	0.01898	—0.05917
0.4	0.5217	—0.4584	0.9801	0.001913	—0.02637	—0.02829
0.6	0.4012	—0.3852	0.7864	—0.00261	—0.01003	—0.007417
0.8	0.3118	—0.30747	0.6193	—0.001798	—0.002419	—0.0006212

Известно [4], что возможны два устойчивых периодических решения системы (5.6), одно из которых имеет вид

$$r = r_0 \cos \omega t, \qquad p = 0, \qquad \zeta_6 r_0^3 + 4(1 - \Omega_0^2) r_0 + 4H = 0 \tag{5.9}$$

$$\Omega^{-1} = \Omega_0 = \omega_0 / \omega, \qquad \zeta_6 = a - e$$

Другое решение соответствует одновременному возбуждению параметров r и p

$$A = B = 0, \qquad p_0^2 = 4\zeta_6^{-1}(\Omega_0^2 - 1 - \zeta_1 r_0^2), \qquad \zeta_9 r_0^3 + (\Omega_0^2 - 1) r_0 - H\zeta_8^{-1} = 0 \tag{5.10}$$

$$\zeta_9 = \zeta_7 / \zeta_8, \qquad 4\zeta_6\zeta_7 = 16\zeta_1^2 - \zeta_6, \qquad \zeta_8 = 1 - 4\zeta_1\zeta_6^{-1}$$

$$4\zeta_1 = 3b - 3d - c + f, \qquad 4\zeta_2 = b + c - d - f$$

Подставляя значение $r = r_0 \cos \omega t$ во второе из уравнений (5.6), в котором отброшены члены, имеющие порядок p^3, получим

$$[1 + \Pi_1(t)] p^{\cdot\cdot} + \Pi_2(t) p^{\cdot} + [\omega_0^2 + \Pi_3(t)] p = 0 \tag{5.11}$$

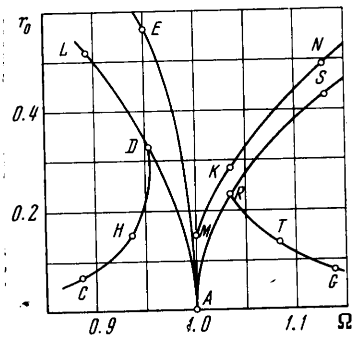
где $\Pi_i(t)$ — периодические функции периода π / ω.

Границы основной области неустойчивости H_1 уравнения (5.11), как показано в работе [4], определяются уравнениями

$$\Omega^{-2} = 1 - \zeta_k r_0^2 - (\zeta_5 - \zeta_k^2) r_0^4 + \ldots \quad (k = 1, 2) \tag{5.12}$$

Используя выражения для коэффициентов $a, \ldots, f$, приведенные в работе [4], можно установить, что всегда часть правой ветви резонансной кривой $r_0 = r_0(H, \omega^2)$, определяемой уравнением (5.9), попадает в область H_1. Это обстоятельство характерно для всех полостей вращения.

На фигуре кривые AE и ARS ограничивают область H_1. Кривые CHD и RTG соответствуют устойчивым колебаниям, когда возбужден только параметр r, кривая MKN — когда возбуждены обе параметра r и p. Кривая ADL является геометрическим местом точек, в которых теряют устойчивость колебания параметра r, определяемые решением (5.9) [4]. Приравнивая нулю дискриминант кубического уравнения (5.9), получим уравнение этой кривой в виде



$$3\zeta_6 r_0^2 = 4(\Omega_0^2 - 1) \tag{5.13}$$

Область H_2 плоскости (r_0, Ω^2), ограниченную кривыми AL и ARS, естественно принять за область, где обычные линеаризованные уравнения неприменимы, ибо в этой области либо нельзя построить устойчивого периодического решения вида (5.9), либо периодическое решение в этой области существует, но оно существенно отличается от решения (5.9), тем более от решения соответствующего линеаризованного уравнения. Как видно из фигуры, на частотах $\omega > \omega_R$ (значение ω_R на фигуре соответствует точке R) значение амплитуды r_0 может в несколько раз отличаться от значения r_0, определенного с помощью линеаризованных уравнений. Давление в жидкости пропорционально подынтегральному выражению в (3.8). Следовательно, силовые и моментные реакции жидкости на тело, рассчитанные с помощью системы нелинейных уравнений, могут сильно отличаться от соответствующих значений этих величин, даваемых линейной теорией. Это обстоятельство необходимо учитывать при расчете устойчивости летательных аппаратов с жидкими массами на борту.

В заключение автор благодарит Г. С. Нариманова за ценные советы и внимание.

Поступило 29 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Hutton R. E. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillation of fluid in a cylindrical container. AIAA Fifth Palm Spring, Calif., April 1—3, 1964.
4. Столбецов В. И. О немалых колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
5. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., Изд-во АН СССР, 1953, № 32 (74), вып. 1.
6. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.

УТОЧНЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ И КРУГЛОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩИХСЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Г. ОВСЕЕНКО (*Новочеркасск*)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся движение вязкой жидкости, вызванное вращением сжатого или вытянутого эллипсоида вращения. Решение задачи ищется в виде рядов по положительным степеням числа Рейнольдса, коэффициенты которых представляются в виде многочленов по присоединенным функциям Лежандра первого рода. Определяется момент сопротивления с точностью до числа Рейнольдса в квадрате. Как частные случаи получаются значения моментов сопротивления круглого диска и сферы.

1. Вращение сплюснутого эллипсоида. Рассмотрим осесимметричное стационарное движение неограниченной несжимаемой вязкой жидкости, вызванное вращением вокруг оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω сплюснутого эллипсоида вращения

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

В эллипсоидальных «сплюснутых» координатах α, φ, θ, связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$x_1 = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\varphi\sin\theta, \qquad y_1 = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\varphi\sin\theta, \qquad z_1 = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\theta$$

уравнение эллипсоида

$$\alpha = \alpha_0$$

где α_0 определяется из условий

$$a = c\,\mathrm{ch}\,\alpha_0, \qquad a^2-b^2=c^2$$

Запишем в этих координатах точные уравнения движения в безразмерных величинах

$$(1-\tau^2)\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}+(1+x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\tau\frac{\partial v}{\partial\tau}+2x\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{v}{1-\tau^2}+\frac{v}{1+x^2}=$$

$$=R\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial\tau}-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial x}-v\left(\frac{x}{1+x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\tau}{1-\tau^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$D\psi=\mathrm{Re}\left\{(1-\tau^2)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\Phi}{1-\tau^2}\right)-(1+x^2)\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi}{1+x^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2v}{1+x_0^2}\left[\tau(1+x^2)\frac{\partial v}{\partial x}+x(1-\tau^2)\frac{\partial v}{\partial\tau}\right]\right\} \qquad (1.1)$$

$$D\psi=(x^2+\tau^2)\Phi, \qquad D=(1-\tau^2)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+(1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$x=\mathrm{sh}\,\alpha, \qquad x_0=\mathrm{sh}\,\alpha_0, \qquad \tau=\cos\theta, \qquad v_\varphi=v_0 v(x,\tau)$$

$$v_0 ac\psi(x,\tau) \qquad (R=av_0/\vartheta) \qquad v_0=\omega a$$