

16. Штеменко Л. С. Возникновение скачка уплотнения в начальный период течения газа вблизи диафрагмы в ударной трубе. Вестн. Моск. ун-та, сер. Физика, астрономия, 1968, № 3, стр. 82—87.
17. Курант Ф., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
18. Васильев Л. А., Галанин А. Г., Ершов И. В., Сунцов Г. Н. Фотоэлектрический теневой метод исследования нестационарных процессов. Приборы и техника эксперимента, 1964, № 3.

## МЕТОД РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛЬЕВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ С ДОЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ И ЗАДНИМИ КРОМКАМИ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, Н. А. КУДРЯВЦЕВА, Б. Н. ФЕДОТОВ

(Москва)

В авиации все большее применение находят крылья сложной формы в плане: изменяемой геометрии, с изломами, выступами, криволинейными кромками и т. д. Поэтому возрастает потребность в эффективных теоретических методах, тем более, что число геометрических параметров, характеризующих форму в плане указанных крыльев, велико. Анализ влияния их на аэродинамические характеристики произвести практически невозможно без использования расчетных данных, полученных при помощи ЦВМ.

Крылья сложной формы в плане обладают особенностью, осложняющей построение численных методов для расчета обтекания при сверхзвуковых скоростях. В большом диапазоне чисел Маха  $M_\infty$ , представляющем практический интерес, передняя кромка оказывается дозвуковой или смешанной. Кроме того, у крыльев изменяемой геометрии и некоторых других значительный диапазон чисел  $M_\infty$  соответствует дозвуковым задним кромкам.

Для крыльев сравнительно простых форм в плане со сверхзвуковыми кромками имеются эффективные решения задачи [1—3]. Методом конических течений получено решение для треугольных крыльев с дозвуковыми передними кромками [4]. Однако работ, в которых удалось бы достаточно строго произвести расчет обтекания крыльев с дозвуковыми задними и смешанными кромками, нам не известно. В данной статье рассматривается численный метод определения стационарных аэродинамических характеристик указанных крыльев при сверхзвуковых скоростях.

Наряду с поступательным движением изучаются вращения крыла с постоянными угловыми скоростями и малые деформации его поверхности. Метод удобен для ЦВМ и эффективен как при дозвуковых и смешанных, так и сверхзвуковых передних и задних кромках крыла.

1. Основные соотношения. Введем связанную с крылом систему координат (фиг. 1), причем под  $x, y, z$  будем понимать безразмерные координаты, отнесенные к корневой хорде  $b$ .

Делением потенциала возмущенных скоростей на  $U_0 b$  ( $U_0$  — скорость начала  $O$ ) получим безразмерный потенциал  $\Phi(x, y, z)$ , который, как известно, удовлетворяет уравнению

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

На поверхности крыла  $S$  должно выполняться условие непротекания. Считая крыло мало изогнутым и снося условие на плоскость  $y=0$ , можем написать [5]

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} = -\alpha - \omega_x z + \omega_z x - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha$  — угол атаки,  $\omega_x, \omega_z$  — безразмерные угловые скорости,  $f(x, z)$  — закон деформации поверхности крыла, причем

$$\omega_x = \frac{\Omega_x b}{U_0}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z b}{U_0}, \quad y = f(x, z) \quad (1.3)$$

Вне поверхности крыла в плоскости  $y = 0$  должно выполняться условие непрерывности давления  $p$ . Так как

$$p' = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad p' = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty U_0^2} \quad (1.4)$$

то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=+0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=-0}$$

Но, как известно из [4]

$$\Phi(x, y, z) = -\Phi(x, y, z)$$

поэтому имеем вне  $S$

$$\partial \Phi / \partial x|_{y=0} = 0, \quad \text{или} \quad \Phi(x, 0, z) = F(z) \quad (1.5)$$

Вне поверхности крыла  $S$  и вихревой пелены

$$F(z) = 0 \quad (1.6)$$

В любой точке  $(x, z)$  на вихревой пелене, образующейся за крылом, эта функция равна значению потенциала непосредственно на задней кромке при том же значении  $z$ .

Запись граничного условия в форме (1.5) избавляет от необходимости искать скачок величины  $\partial \Phi / \partial x$  при переходе от крыла к вихревой пелене для сверхзвуковых задних кромок. Кроме того, такая форма удобнее при численных расчетах.

Решение уравнения (1.1) можно записать [4]

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_{\sigma} \frac{q(\xi, \zeta) d\xi d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2[y^2 + (z-\zeta)^2]}} \quad (1.7)$$

$$k = \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad q(x, z) = \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Через  $\sigma$  обозначена область влияния, ограниченная передней границей возмущенной области и линией пересечения с плоскостью  $y = 0$  обратного конуса возмущений с вершиной в точке  $(x, y, z)$ . Для определения нагрузок на крыле достаточно найти потенциал  $\Phi(x, 0, z)$ .

**2. Численный метод.** Для построения численных алгоритмов удобно с помощью замены переменных избавиться от особенностей, которые имеет подынтегральная функция на характеристиках

$$x - \xi = \pm k(z - \zeta)$$

Введем характеристические координаты, выбрав начало координат так, чтобы иметь только положительные значения переменных

$$x_1 = x - kz, \quad z_1 = x + kz \quad (2.1)$$

Тогда

$$\Phi(x_1, 0, z_1) = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{x_1} \int_0^{z_1} \frac{q(\xi_1, \zeta_1) d\xi_1 d\zeta_1}{\sqrt{x_1 - \xi_1} \sqrt{z_1 - \zeta_1}} \quad (2.2)$$

Для устранения особенностей положим  $x_2 = \sqrt{x_1 - \xi_1}$ ,  $z_2 = \sqrt{z_1 - \zeta_1}$ ; тогда

$$\Phi(x_1, 0, z_1) = -\frac{2}{\pi k} \int_0^{\sqrt{x_1}} \int_0^{\sqrt{z_1}} q(x_1 - x_2^2, z_1 - z_2^2) dx_2 dz_2 \quad (2.3)$$

Разобьем область интегрирования на квадраты, проведя линии  $x_1 = \text{const}$  и  $z_1 = \text{const}$  через точки деления корневой хорды крыла на  $N$  частей. При вычислении интегралов (2.3) в каждом квадрате используем теорему о среднем. Указанные постоянные для каждого квадрата значения  $q$  следующим образом связаны с вели-

чиной потенциала (фиг. 1)

$$\Phi(x_1, 0, z_1) = -\frac{2}{\pi k} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M q[(L-i-0.5)h, (M-j-0.5)h] P_{i,j} \quad (2.4)$$

$$h = \frac{x_m}{N}, \quad L = \frac{x_1}{h}, \quad M = \frac{z_1}{h}$$

Через  $x_m$  обозначена наибольшая необходимая для вычислений величина координаты  $x_1$  и

$$P_{i,j} = \frac{h}{(\sqrt{i} + \sqrt{i-1})(\sqrt{j} + \sqrt{j-1})} \quad (2.5)$$

Малые изменения формы крыла в плане приводят к малым изменениям аэродинамических характеристик, поэтому в дальнейшем рассматривается крыло, состоящее из целых квадратов (фиг. 1). На поверхности крыла (область I) функция  $q(x_1, z_1)$  известна из граничного условия (1.2).

Вне крыла и вихревой пелены, используя (1.5) и (1.6), имеем

$$\int_0^{x_1} \int_0^{z_1} \frac{q(\xi_1, \zeta_1) d\xi_1 d\zeta_1}{\sqrt{x_1 - \xi_1} \sqrt{z_1 - \zeta_1}} = 0$$

$$\text{или} \quad \int_0^{z_1} \frac{q(x_1, \zeta) d\zeta_1}{\sqrt{z_1 - \zeta_1}} = 0$$

Отсюда находим расчетную формулу для определения средних значений  $q$  в области II (фиг. 1)

$$q(Lh, Mh) = -\sum_{i=1}^{L-1} q(ih, Mh) P_i \quad (2.6)$$

Обратимся к области III на вихревой пелене за крылом. Нахождение  $q$  здесь производится на основании условия (1.5).

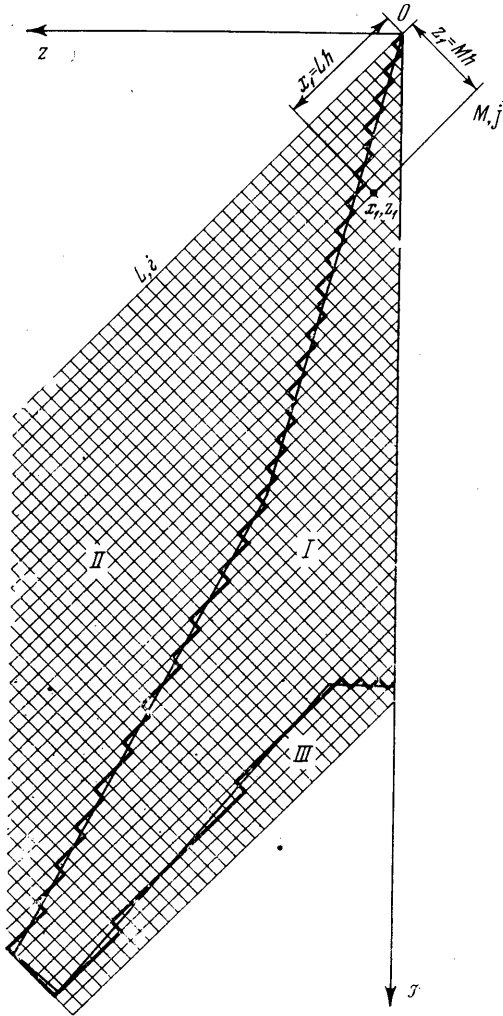
Подставив в (1.5) выражение для  $\Phi(x, y, z)$  из (1.7), нетрудно затем получить это условие для средних значений  $q$

$$q(L_2h, M_2h) = \frac{1}{h} \left[ -\frac{k\pi}{2} F - \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{M-1} q_{ij} P_{i,j} \right] \quad (2.7)$$

Последовательность расчетов по определению средних скосов следующая (фиг. 1). Вначале расчет скосов ведется в полосе  $M=1$  последователь-

но для всех значений  $L$  от 1 до  $L_{\max}$ , причем при  $L=1$  значение  $q$  находится из граничного условия на крыле. Затем то же самое делается при  $M=2, M=3$  и т. д. При этом в области II используется условие (2.6), а в области III — соотношение (2.7). Нетрудно убедиться, что всякий раз значения  $q$  во всех квадратах, кроме одного, будут известны.

По вычисленным значениям скосов и потенциалов найдем силы и моменты, действующие на крыло. Аэродинамические коэффициенты  $c_y, m_z, m_x$  будем относить со-



Фиг. 1

ответственно к площади крыла  $S$ , корневой хорде  $b$  и полуразмаху  $1/2l$ .

$$c_y = \frac{1}{S} \iint p \, dx \, dz, \quad m_z = \frac{1}{Sb} \iint xp \, dx \, dz, \quad m_x = \frac{2}{Sl} \iint zp \, dx \, dz \quad (2.8)$$

Разность давлений на крыле  $p$ , определяется с помощью интеграла Коши — Лагранжа

$$p = \frac{4}{U_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.9)$$

Поскольку численное дифференцирование неточно, формулы (2.8) с помощью интегрирования по частям преобразуются таким образом, чтобы исключить производные.

Переходя к характеристическим координатам и заменяя интегралы суммами, получим

$$c_y = \frac{\lambda}{2N} \left( \frac{2b}{l} \right)^2 \sum_* \Phi, \quad m_x = \frac{\lambda}{4N^2} \left( \frac{2b}{l} \right)^3 \sum_* (L - M) \Phi$$

$$m_z = \frac{k\lambda}{2N} \left( \frac{2b}{l} \right)^2 \left\{ \sum_* \frac{(L + M)}{2N} \Phi - \frac{1}{N} \sum \sum \Phi \right\} \quad (2.10)$$

В формулах (2.10) момент  $m_z$  вычисляется относительно начала  $O$  (фиг. 1),  $\lambda$  — удлинение крыла,  $\Sigma_*$  означает суммирование по задней кромке, а двойная сумма вычисляется на всей площади крыла.

**3. Сравнение с точными решениями.** Для иллюстрации точности численных расчетов и выбора целесообразного числа разбиений  $N$  приведем данные, относящиеся к треугольному крылу, для которых имеется точное решение [4].

Таблица 1

Возьмем стандартную связанную систему координат с началом в вершине крыла и выразим коэффициент подъемной силы и продольного момента через коэффициенты вращательных производных [5]

	Точное решение	Численные расчеты		
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 25$
$c_y^\alpha$	2.95	2.93	2.96	2.95
$c_z^{\omega z}$	2.24	2.18	2.23	2.24
$-m_z^\alpha$	1.97	1.93	1.96	1.97
$-m_z^{\omega z}$	1.68	1.63	1.67	1.67
$-m_x^{\omega x}$	0.220	0.227	0.223	0.221

$$c_y = c_y^\alpha \alpha + c_y^{\omega z} \omega_z, \quad m_z = m_z^\alpha \alpha + m_z^{\omega z} \omega_z, \quad m_x = m_x^{\omega x} \omega_x \quad (3.1)$$

В табл. 1 приведены значения указанных коэффициентов при  $k=1$ .

На основе теоремы обратимости [5] и данных работы [4] можно найти точные значения коэффициентов вращательных производных для обратного треугольного крыла (с дозвуковой задней и сверхзвуковой передней кромками).

В табл. 2 эти значения при  $k=1$  сравниваются с численными.

Для иллюстрации точности расчета характеристик деформированного крыла обратимся к результатам работы [3]. Здесь было рассмотрено треугольное равно- стороннее крыло со сверхзвуковыми кромками ( $M_\infty = 4.12$ ).

Таблица 2

Деформация задавалась в виде

	Точное решение	Численный расчет	
		$N = 10$	$N = 20$
$c_y^\alpha$	2.95	3.06	3.00
$c_z^{\omega z}$	0.983	1.07	1.03
$-m_z^\alpha$	0.710	0.700	0.708
$-m_z^{\omega z}$	0.423	0.441	0.432
$-m_x^{\omega x}$	0.220	0.200	0.215

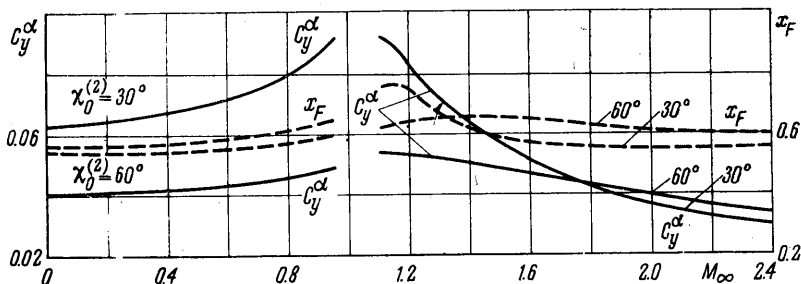
$$y = \sum_{\mu=1}^5 \sum_{\nu=0}^3 x^{\mu} z^{2\nu}$$

Тогда коэффициент подъемной силы может быть записан

$$c_y = \sum_{\mu=1}^5 \sum_{\nu=0}^3 c_{y\mu\nu}$$

В табл. 3 производится сравнение точных значений отношения  $c = c_{y\mu\nu} / c_{y10}$  с численными значениями  $c_{30}$ , найденными при  $N = 30$ .

4. **Пример.** По изложенной методике был произведен расчет обтекания крыла изменяемой геометрии самолета F-111. В преобразованном виде, после перехода к характеристическим координатам, оно изображено на фиг. 1, где также нанесена сетка квадратов при  $N = 20$ . На фиг. 2 приведены значения коэффициента  $c_y^\alpha$  и безразмерной координаты фокуса  $x_F$  относительно носка средней аэродинамической хорды крыла в долях этой хорды.



Фиг. 2

Рассмотрено два положения консоли, которые определяются углом стреловидности ее  $\chi_0^{(2)}$ . Если

$$\chi_0^{(2)} = 30^\circ \quad (\chi_0^{(2)} = 60^\circ)$$

дозвуковые передние и задние кромки получаются при  $M_\infty = 1.00-1.06$  ( $M_\infty = 1.00-1.41$ ); дозвуковые передние и сверхзвуковые задние — при  $M_\infty = 1.06-1.15$

Таблица 3

	$v = 0$		$v = 1$		$v = 2$		$v = 3$	
	$c$	$c_{30}$	$c$	$c_{30}$	$c$	$c_{30}$	$c$	$c_{30}$
1	1.00	1.00	0.055	0.054	0.0073	0.0070	0.0013	0.0012
2	1.33	1.35	0.088	0.086	0.0124	0.0111	0.0023	0.0022
3	1.50	1.53	0.110	0.107	0.016	0.016	0.0036	0.0029
4	1.60	1.65	0.126	0.121	0.019	0.018	0.0037	0.0034
5	1.67	1.73	0.138	0.131	0.022	0.020	0.0043	0.0039

( $M_\infty = 1.41-2.00$ ); смешанные передние и сверхзвуковые задние — при  $M_\infty = 1.15-2.50$  ( $M_\infty = 2.00-2.50$ ).

При  $M_\infty < 1$  расчетные данные заимствованы из [6].

Авторы благодарят Н. Г. Лавренко, которая произвела расчеты примеров.

Поступило 10 IX 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. Фурсов М. К. К расчету коэффициентов вращательных производных крыльев при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОГи, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
3. Коган М. Н. Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, 1955, № 687.
4. Ribet H., Malvestuto F. Stability derivatives of triangular wings at supersonic speeds, NASA Techn. Repts., 1948, No. 908.
5. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
6. Белоцерковский С. М. Особенности расчета обтекания крыльев сложной формы в плане при дозвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.