

## НЕРАВНОВЕСНОЕ ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ С КОАГУЛЯЦИЕЙ ЧАСТИЦ ПОЛИДИСПЕРСНОГО КОНДЕНСАТА

С. Д. ГРИШИН, А. П. ТИШИН, Р. И. ХАЙРУТДИНОВ

(Москва)

Описывается метод расчета параметров газа и полидисперсного конденсата при неравновесном течении в сопле с учетом соударений, слияния, обмена энергией и количеством движения между частицами различных размеров.

Применение металлизированных ракетных топлив, продукты сгорания которых содержат значительное количество частиц окислов металлов, вызвало ряд работ, посвященных определению потерь удельной тяги в результате скоростного и температурного отставания частиц от газа при разгоне в сопле; обзор этих работ см. в [1, 2].

Величина отставания и, следовательно, потерь в решающей степени определяется размером частиц конденсата. Мелкие частицы, диаметром меньше 1 мкм, имеют скорость, близкую к скорости газа, а крупные разгоняются с большим отставанием. Относительная скорость частиц 1 и 10 мкм может составлять несколько сотен м/сек.

Соударения частиц, происходящие из-за относительного движения, возникающего вследствие различного их запаздывания в зависимости от размеров, рассматривались в работах [3-6]. В работах [3-4] рассмотрены простейшие случаи взаимодействия, когда конденсат состоит из двух фракций. При этом в обеих работах основное внимание уделено обмену количеством движения между фракциями, а в работе [3] вообще не рассмотрена возможность слияния жидких частиц. В работе [5] рассмотрена более точная постановка задачи, когда функция плотности распределения является непрерывной, но при этом опять-таки не рассматривается изменение распределения частиц по размерам, происходящее из-за соударений и слияния частиц. Физическая модель процесса и схема расчета укрупнения частиц дана в работе [6], однако здесь не учитывается обмен энергией и количеством движения между фракциями. По сути дела, в работе [6] рассматривается изолированный процесс роста частиц, когда конденсат состоит из нескольких фракций, заданных дискретной функцией плотности распределения, представляющей собой  $\delta$ -функции.

При описании процессов принимаются следующие допущения. Течение адиабатно, изолировано по массе, одномерно и стационарно; при расширении весовая доля, состав и теплоемкости конденсата и газа постоянны; давление, обусловленное броуновским движением частиц, пренебрежимо мало; температура частицы конденсата одинакова по всему объему; объем конденсата пренебрежимо мал; обмен теплом между частицами и газом осуществляется только конвекцией; вязкость газа проявляется лишь при взаимодействии с частицами, концентрация которых достаточно мала, чтобы их воздействие на газ подчинялось принципу аддитивности воздействий, производимых одиночными частицами.

Распределение частиц по массам (размерам) определяется нормированной массовой функцией плотности распределения  $g(m)$

$$\int_0^{\infty} g(m) dm = 1, \quad dG(m) = G_h g(m) dm$$

Здесь  $m$  — масса частицы,  $G_h$  и  $dG(m)$  — расход всего конденсата и частиц «фракции  $m$ », т. е. частиц, масса которых лежит в диапазоне от  $m$  до  $m + dm$ .

Пределы интегрирования 0 и  $\infty$  условно означают минимальную и максимальную массы частиц, учитываемых в расчете.

1. Рассмотрим течение в сопле без учета коагуляции. Система уравнений, описывающая неравновесное течение в сопле заданного контура, содержит особую точку при  $M = 1$  ( $M$  — число Маха). Численное решение их связано с большой затратой времени на «пристрелку». Поэтому целесообразно решать обратную задачу, когда вместо контура сопла задается [7], например, плотность газа  $\rho(x)$ . Эта зависимость может быть определена расчетом равновесного течения в заданном сопле.

Для описания неравновесного течения смеси весь диапазон масс частиц разбивается на  $n$  частей так, чтобы параметры частиц с массами, промежуточными между выбранными  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), могли быть определены интерполированием.

Уравнения движения и теплообмена для частиц с массой  $m_i$  имеют вид

$$\frac{dW(m_i)}{dx} = \frac{3}{4} C_{x\rho} \frac{[W - W(m_i)] |W - W(m_i)|}{W(m_i) \rho_h d(m_i)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

$$\frac{dT(m_i)}{dx} = \frac{6h_i [T - T(m_i)]}{W(m_i) d(m_i) \rho_h C_h} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Здесь  $W$ ,  $W(m_i)$ ,  $T$ ,  $T(m_i)$  — скорость и температура газа и частиц,  $\rho_k$ ,  $C_k$  — плотность и теплоемкость материала частиц,  $d(m_i)$  — диаметр частицы. Для определения  $C_{x_i}$  и  $h_i$  — коэффициентов сопротивления и теплоотдачи частицы — могут быть использованы классические зависимости [8] с поправками на разреженность, сжимаемость газа [9] и химические реакции в газе.

Пусть  $G$  — суммарный расход смеси,  $F$  — площадь сопла,  $z$  — весовая доля конденсата.

Из уравнения неразрывности для частиц фракции  $m$  и уравнения неразрывности газа

$$W(m)F\rho(m)dm = zGg(m)dm, \quad \rho WF = (1-z)G \quad (1.3)$$

получим выражение для функции плотности распределения массы частиц в единице объема газа

$$\rho(m) = \frac{z}{1-z} \rho \frac{W}{W(m)} g(m) \quad (1.4)$$

Уравнения движения и энергии для газа с учетом воздействия конденсата запишутся теперь так:

$$\rho W \frac{dW}{dx} + \frac{d\theta}{dx} + \frac{z}{1-z} \rho W \int_0^\infty \frac{dW(m)}{dx} g(m) dm = 0 \quad (1.5)$$

$$(1-z) \left( C_p \frac{dT}{dx} + W \frac{dW}{dx} \right) + z \int_0^\infty \left[ C_k \frac{dT(m)}{dx} + W(m) \frac{dW(m)}{dx} \right] g(m) dm = 0 \quad (1.6)$$

$C_p$  — теплоемкость газа.

Уравнение состояния газа  $p = \rho TR_0 / \mu$  запишем в дифференциальной форме

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (1.7)$$

Замыкается система уравнений (1.1), (1.2), (1.5)–(1.7) заданной зависимостью  $\rho = f(x)$  плотности газа от  $x$ .

После введения обозначений

$$k_1 = - \frac{z}{1-z} \rho W \int_0^\infty \frac{dW(m)}{dx} g(m) dm$$

$$k_2 = - \frac{z}{1-z} \int_0^\infty \left[ C_k \frac{dT(m)}{dx} + W(m) \frac{dW(m)}{dx} \right] g(m) dm$$

$$k_3 = \frac{d \ln \rho}{dx}$$

и решения линейных уравнений (1.5)–(1.7) относительно производных получим

$$\frac{dW}{dx} = \left( k_3 - \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{C_p T} \right) \left( \frac{W}{C_p T} - \frac{\rho W}{p} \right)^{-1} \quad (1.8)$$

Расчет неравновесного течения двухфазного потока производится в следующей последовательности. Принимается, что на входе в сопло в сечении с достаточно большой относительной площадью течения будет равновесным, и определяются начальные данные. Затем решается задача Коши — численным интегрированием уравнений (1.1), (1.2), (1.8), вычисляются  $W(m_i)$ ,  $T(m_i)$ ,  $W$ . После каждого шага температура газа может быть найдена по конечному соотношению, полученному из уравнения энергии в интегральной форме,

$$T = T_0 - \frac{1}{C_p} \left[ \frac{W^2}{2} + \frac{z}{1-z} \int_0^\infty \left\{ [C_k T(m) - C_k T_0] + \frac{W^2(m)}{2} \right\} g(m) dm \right] \quad (1.9)$$

а давление — из уравнения состояния. Площадь сопла после каждого шага интегрирования находится из уравнения неразрывности по известным параметрам и расходу газа.

2. Коагуляция частиц при течении в сопле рассматривается в предположении прямолинейности траекторий частиц при сближении и слиянии их при каждой встрече. Учет таких реальных процессов, как искривление траекторий частиц при сближении, неслияние или дробление их при соударении с большими скоростями, а также деформация и дробление может быть легко сделан, если известны закономерности этих процессов. Введем функцию  $n(m)$  — счетную плотность распределения по массам частиц, определяющую количество частиц в единице объема

$$n(m) = \frac{z}{1-z} \frac{\rho W}{mW(m)} g(m) \quad (2.1)$$

Частица фракции  $m_i$  при движении относительно фракции  $m$  со скоростью  $|W(m) - W(m_i)|$  за время  $dt$  встретится с теми из них, которые находятся в объеме

$$\Delta V = \frac{1}{4} \pi [d(m) + d(m_i)]^2 |W(m) - W(m_i)| dt$$

т. е. с  $\Delta V n(m) dm$  частицами фракции  $m$ . Оценки показывают, что во всех случаях, представляющих интерес, концентрация частиц достаточно мала, чтобы учитывать только двойные соударения частиц.

Введем обозначение для константы коагуляции

$$k(m_i, m) = \frac{1}{4} \pi [d(m) + d(m_i)] |W(m) - W(m_i)| \quad (2.2)$$

Все частицы фракции  $m_i$  за время  $dt$  встретят  $k(m_i, m) n(m_i) n(m) dt dm_i dm$  частиц фракции  $m$ . Интегрируя по  $m$  от 0 до  $\infty$ , получим выражение для скорости уменьшения концентрации частиц фракции

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} n(m_i) dm_i \right]_- = - n(m_i) dm_i \int_0^{\infty} k(m_i, m) n(m) dm \quad (2.3)$$

Здесь и далее знак частной производной используется для обозначения изменений, происходящих от взаимодействия между частицами.

Аналогичное рассмотрение приводит к выражению для скорости образования в единице объема частиц массой  $m_i$  за счет слияния частиц с массой  $m$  ( $m < m_i$ ) и  $m_i - m$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} n(m_i) dm_i \right]_+ = dm_i \int_0^{\frac{1}{2} m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) dm \quad (2.4)$$

Суммируя (2.3) и (2.4) и переходя к производной по  $x$ , получим интегро-дифференциальное уравнение для изменения функции  $n(m_i)$  вследствие слияний частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(m_i)}{\partial x} = & - \frac{n(m_i)}{W(m_i)} \int_0^{\infty} k(m_i, m) n(m) dm + \\ & + \frac{1}{W(m_i)} \int_0^{\frac{1}{2} m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) dm \end{aligned} \quad (2.5)$$

При выводе использовано допущение, что частицы одинаковых размеров имеют равные скорости. Однако частицы, поступающие во фракцию  $m_i$  в результате слияния капель с массами  $m$  и  $m_i - m$ , будут иметь скорость больше  $W(m_i)$ . Поэтому в реальном процессе функция распределения будет двумерной и, более того, трехмерной, если учитывать еще распределение по температуре. Оценки показывают, что разброс в скоростях и температурах частиц внутри фракции невелик и имеет место лишь для небольшой доли фракции, так как параметры частицы довольно быстро (на расстоянии, равном пути релаксации) принимают значения, соответствующие местным параметрам потока. Поэтому, учитывая чрезвычайную сложность метода расчета в случае двух- и трехмерной функции распределения, целесообразно осреднять параметры частиц внутри фракции. При этом необходимо учитывать, что соударения не должны изменять количества движения и энергии всего конденсата. Эти условия сохранения могут быть удовлетворены соответствующим изменением средней скорости и температуры частиц каждой фракции.

Производная от количества движения частиц фракции  $m_i$ , содержащихся в единице объема, может быть записана так:

$$\frac{\partial}{\partial x} [m_i W(m_i) n(m_i) dm_i] = dm_i m_i n(m_i) \frac{\partial W(m_i)}{\partial x} + dm_i m_i W(m_i) \frac{\partial n(m_i)}{\partial x}$$

Подставляя значение  $\partial n(m_i) / \partial x$  из уравнения (2.5) и учитывая, что изменение количества движения частиц фракции  $m_i$  равно разности количества движения частиц, поступивших и ушедших из этой фракции, получим при помощи (2.3) и (2.4) выражение для изменения средней скорости частиц фракции  $m_i$  из-за поступления в нее новых частиц

$$\frac{\partial W(m_i)}{\partial x} = \frac{1}{m_i W(m_i) n(m_i)} \int_0^{1/2 m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) \times \quad (2.6)$$

$$\times [mW(m) + (m_i - m)W(m_i - m)] dm - \frac{1}{n(m_i)} \int_0^{1/2 m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) dm$$

Выражение изменения температуры можно получить, исходя из условия сохранения энергии конденсата

$$\vartheta(m_i) = C_k T(m_i) + \frac{W^2(m_i)}{2} \quad (2.7)$$

Проводя преобразование для  $\vartheta(m_i)$ , аналогичное проведенному выше для количества движения, получаем следующее выражение для изменения энергии частиц фракции  $m_i$  из-за поступления в нее новых частиц

$$\frac{\partial \vartheta(m_i)}{\partial x} = \frac{1}{m_i n(m_i) W(m_i)} \left\{ \int_0^{1/2 m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) \times \right. \\ \left. \times [m\vartheta(m) + (m_i - m)\vartheta(m_i - m)] dm - m_i \vartheta(m_i) \int_0^{1/2 m_i} k(m, m_i - m) n(m) n(m_i - m) dm \right\} \quad (2.8)$$

Производная средней температуры частиц фракции  $m_i$  с учетом (2.7) будет равна

$$\frac{\partial T(m_i)}{\partial x} = \frac{1}{C_k} \left[ \frac{\partial \vartheta(m_i)}{\partial x} - W(m_i) \frac{\partial W(m_i)}{\partial x} \right] \quad (2.9)$$

Здесь производная  $\partial W(m_i) / \partial x$  определена уравнением (2.6).

На основе уравнений (2.1) и (2.5) может быть получена производная функции  $g(m)$  вследствие коагуляции

$$\frac{dg(m_i)}{dx} = \frac{1-z}{z} \frac{m_i}{\rho W} W(m_i) \frac{\partial n(m_i)}{\partial x} \quad (2.10)$$

Поскольку функция  $g(m)$  может изменяться только от взаимодействия частиц, здесь получается полная производная.

Прибавив к правым частям уравнений (1.1) и (1.2) члены, учитывающие изменение скорости и температуры вследствие коагуляции (2.6) и (2.9), и присоединив уравнение (2.10), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую неравновесное течение двухфазной смеси с коагуляцией частиц.

3. Изложенный выше метод был реализован в программе для ЭЦВМ М-20, где учитывалось 20 фракций полидисперсного конденсата и, таким образом, решалась система из 61 дифференциального уравнения.

Выбранный диапазон размеров частиц  $d_{\min}$  и  $d_{\max}$  разбивался на 20 равноотстоящих по логарифму диаметров значений. По мере исчезновения частиц минимальной фракции и появления заметного количества частиц максимальной фракции осуществлялся сдвиг размеров, т. е. выбрасывание мелкой фракции и добавление новой крупной фракции.

Приведем некоторые результаты расчетов, полученные для продуктов сгорания типичного твердого топлива [10], имеющих начальную температуру  $T_0 = 3000 \div 3200^\circ \text{K}$  и содержащих в своем составе 13–38% конденсированной окиси алюминия. Начальное давление  $p_0$  в различных расчетах варьировалось от 10 до 80 бар, радиус критического сечения сопла  $r_*$  — от 10 до 200 м.м.

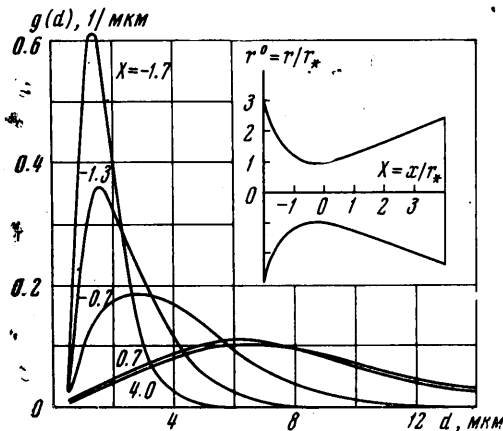
Во всех случаях принималось, что на входе в сопло частицы распределены по размерам в соответствии с логарифмически-нормальным законом [8] с параметрами  $\sigma = 1.5$  и  $d_p = 1$  мкм. При этом средний диаметр, характеризующий величину потерь удельной тяги

$$d_{43} = \int_0^{\infty} d(m)g(m)dm$$

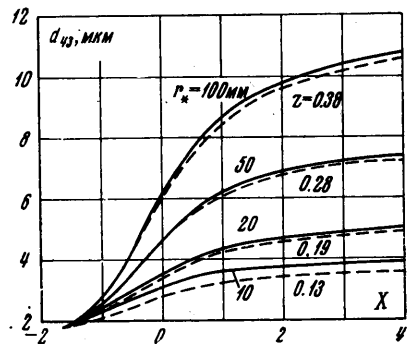
равен 1.8 мкм.

На фиг. 1 показаны полученные расчетом функции  $g(d)$  в различных сечениях сопла, геометрия которого показана на этой же фигуре, при  $z = 0.28$ ,  $p_0 = 40$  бар и  $r_* = 50$  мм. Как видно, процесс коагуляции в сопле существенно изменяет начальную функцию распределения. Изменение вдоль оси сопла среднего диаметра  $d_{43}$ , найденное при тех же условиях, но при различных радиусах критического сечения

(сплошные кривые) и различных значениях  $z$  при  $r_* = 50$  мм (пунктирные кривые), показано на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из фиг. 2 следует, что рост частиц существенно увеличивается при увеличении абсолютных размеров сопла и весовой доли конденсата.

В более крупных соплах уменьшаются запаздывание частиц, относительные скорости и, следовательно, константа коагуляции (2.2), но увеличивается пропорционально диаметру горловины время пребывания смеси в сопле. Влияние второго фактора оказывается значительно большим.

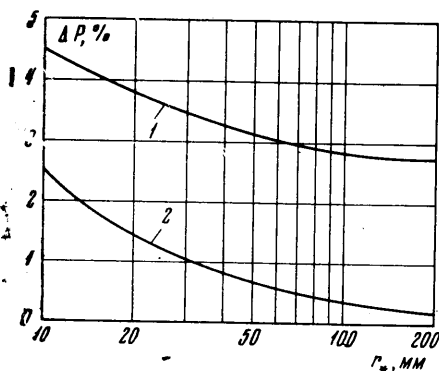
В недавно опубликованной работе [11] получено, что рост частиц в сопле не зависит от размеров сопла. Этот вывод является следствием погрешностей допущений о малых отклонениях от равновесия и стоксовском законе сопротивления частиц.

Более интенсивный рост среднего диаметра частиц при увеличении их концентрации является физически очевидным. Согласно уравнению (2.5) скорость коагуляции должна быть пропорциональна квадрату концентрации. Эта же причина определяет увеличение среднего размера частиц на срезе сопла с повышением начального давления при прочих равных условиях. Из результатов расчета следует, что изменение  $p_0$  от 10 до 80 бар приводит к увеличению  $d_{43}$  на срезе сопла от 3 до 12.5 мкм при  $z = 0.28$  и  $r_* = 50$  мм.

Таким образом, приведенные результаты расчетов указывают на весьма существенный рост частиц конденсата при движении в сопле. Если считать, что потери

удельной тяги характеризуются размером частиц  $d_{43}$  в области горловины сопла, то на основе приведенных результатов следует вывод об определяющем влиянии на эти потери процесса коагуляции.

Этот вывод иллюстрируют данные фиг. 3, где представлены значения потерьпустотной удельной тяги  $-\Delta P$ , вычисленные с учетом и без учета коагуляции частиц



Фиг. 3

(соответственно, кривые 1 и 2) при одинаковом начальном распределении конденсата. Величина  $z$  в расчетах была принята равной 0,32, а  $p_0 = 40$  бар. При радиусе критического сечения  $r_* = 50-100$  мм и больше результаты расчетов отличаются в 10-15 раз.

Поступило 12 IV 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H o g l u n d R. F. Recent advances in gas-particle nozzle flows. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 5. (Рус. перев.: Хогланд Р. Ф. Последние достижения в исследовании течений газа с твердыми частицами в сопле. Ракетная техника, 1962, № 5.)
2. И л ь и н с к и й В. А. Статья редактора русского перевода в кн. «Гетерогенное горение», М., «Мир», 1967.
3. M a r b l e F. E. Mechanism of particle collision in the one-dimensional of gas-particle mixtures. Phys. of Fluids, 1964, vol. 7, No. 8.
4. Б а б у х а Г. Л., Ш р а й б е р А. А. Влияние соударений частиц полидисперсного материала на движение и межфазовый теплообмен в вертикальном двухфазном потоке. ПМТФ, 1966, № 4.
5. Б а б у х а Г. Л., Ш р а й б е р А. А. О движении полидисперсного материала в вертикальном потоке газа, ПМТФ, 1967, № 2.
6. G r o w e C. T., W i l l o u g h b y P. J. A mechanism for particle growth in a rocket nozzle. AIAA Journal, 1966, vol. 9. (Рус. перев.: Кроув С. Т., Уиллогби Р. Г. Механизм роста частиц в соплах реактивных двигателей. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 9.)
7. E s c h e n r o e d e r A. Q., B o y e r D. W., H a l l J. W. Nonequilibrium expansions of air with coupled chemical reactions. Phys. of Fluids, 1962, vol. 5, No. 5. (Рус. перев.: Эшенредер А. К., Боер Д. В., Холл Г. В. Неравновесное расширение воздуха при наличии химических реакций. Вопр. ракет. техн., 1963, № 2.)
8. Ф у к с Н. А. Механика аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1955.
9. G a r l s o n D. J., H o g l u n d R. F. Particle drag and heat transfer in rocket nozzle. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11.
10. Б а р р е р М., Ж о м о т т А., В е б е к Б. Ф., Ванденкеркхове. Ракетные двигатели. М., Оборонгиз, 1962.
11. M a r b l e F. E., Droplet agglomeration in rocket nozzles caused by particle slip and collision. Astronaut. acta, 1967, No. 2.

#### ПРИМЕНЕНИЕ УДАРНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФFUЗОРОВ

В. М. АНУФРИЕВ, Г. И. КОЗЛОВ, Д. И. РОЙТЕНБУРГ

(Москва)

На ударной аэродинамической трубе проведено исследование запуска диффузора при числах Маха 8 и Рейнольдса  $10^6$ . Съемкой тепловых картины обтекания модели диффузора определено время установления головного скачка примерно 180 мксек и время развития зоны отрыва на центральном теле около 600 мксек. Показано, что величина площади горла запуска диффузора согласуется с расчетным значением.

Аэродинамические трубы кратковременного действия позволяют проводить исследования работы диффузора в сверхзвуковых потоках при числах Рейнольдса, соответствующих турбулентному пограничному слою на центральном теле [1]. Однако увеличение числа Маха набегающего потока в аэродинамических трубах такого типа приводит к существенному уменьшению чисел Рейнольдса. Получение потока с большими числами Маха и Рейнольдса возможно в ударной аэродинамической трубе. Но при исследовании диффузоров в такого рода установках возникает ряд специфических задач, связанных с кратковременностью действия и существенной нестационарностью течения в момент запуска [2].

Экспериментальная установка и модель. Экспериментальная установка, представляющая собой ударную аэродинамическую трубу, включает в себя ударную трубу с соплом и барокамеру. Принципиальная схема установки представлена на фиг. 1. Ударная труба состоит из камеры высокого давления, секции мембраны и шлифованного канала постоянного внутреннего сечения. Камера высокого давления длиной 3 м, внутреннего диаметра 90 мм рассчитана на максимальное рабочее давление 2000 атм. Секция мембраны, примыкающая к камере высокого давления, имеет переходный участок на диаметр 80 мм. Канал постоянного сечения диаметром 80 мм имел в этих опытах длину 9,1 м и рассчитан на рабочее давление 700 атм. Канал заканчивается рабочей секцией, вдоль которой были расположены три пьезодатчика давления из титаната бария, которые служат для измерения скорости распространения падающей ударной волны. Кроме того, первый по направлению движения па-