

ВЫТЕСНЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЫ С ПОМОЩЬЮ ДРУГОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. МАРОН

(Москва)

Рассматривается осесимметричная задача о вытеснении одной жидкости из горизонтальной круглой трубы с помощью другой при ламинарном режиме течения.

Экспериментальному исследованию вытеснения жидкости из капилляра посвящены работы Тейлора [1], Кокса [2, 3] и др. Опыты по вытеснению взаимонерастворимых жидкостей позволяют сделать вывод о том, что длина области совместного течения, а также количество вытесняемой жидкости, остающееся в этой области, в основном определяются величиной сил межфазного натяжения на переднем фронте поверхности раздела. Равновесие этих сил и гидродинамического перепада, устанавливающегося в некоторый момент времени после начала вытеснения, обуславливает жесткую пулеобразную форму переднего фронта поверхности раздела. Эта часть границы раздела, жесткость которой достигается за счет баланса сил, называется «головкой» поверхности раздела между жидкостями. Радиус головки — этой относительно небольшой автономной части поверхности раздела — определяет размеры и деформацию всей остальной границы между жидкостями.

Факт существования жесткой автономной головки поверхности раздела положен в основу исследованной в статье физической модели вытеснения.

1. Поверхность раздела между жидкостями одинаковой плотности, образующаяся во время вытеснения одной из них с помощью другой из горизонтальной круглой трубы, деформируется следующим образом.

До начала движения граница раздела между покоящимися жидкостями имеет форму мениска. В процессе вытеснения мениск вытягивается, и через некоторое время после начала движения поверхность раздела почти по всей длине имеет цилиндрическую форму, и только передний фронт ее закруглен.

На фиг. 1 представлены снимки переднего фронта вытесняющей жидкости (темное пулеобразное тело). По этим снимкам прослеживается деформация поверхности раздела и образование ее головки во время вытеснения. Кадрам а), б), в) соответствуют следующие значения отношений вязкостей вытесняющей и вытесняемой жидкостей μ_0 и параметра Тейлора T ; $\mu_0 = 0.1, 0.58, 1.73, T = 9.03, 20, 33.20$. Здесь $T = \sigma / \mu_2 U$, $\mu_0 = \mu_1 / \mu_2$, σ — коэффициент межфазного натяжения, U — скорость движения головки поверхности раздела, μ_1 и μ_2 — вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей.

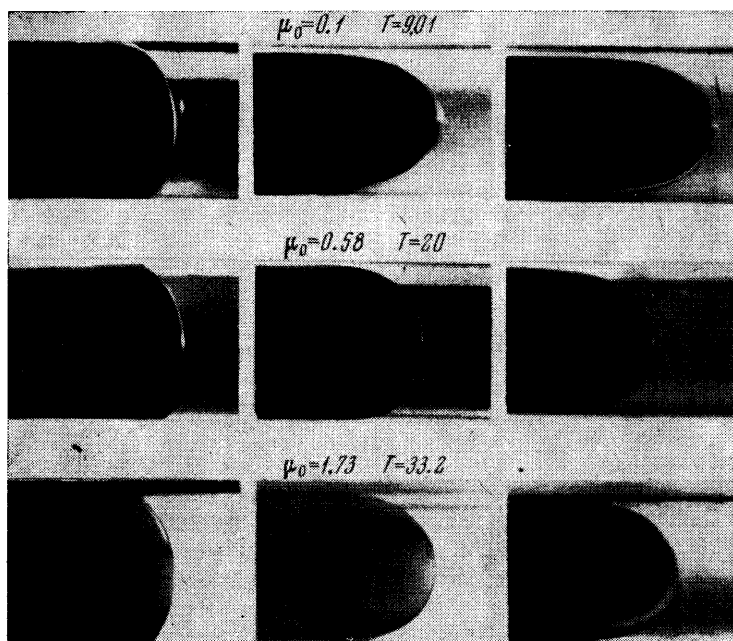
Снимки сделаны автором во время опытов по вытеснению жидкостей из стеклянной трубы диаметром 0.02 м и длиной 2 м. Толщина стенок трубы равнялась 0.001 м. Оптическая система — стеклянная трубка, заполненная жидкостью, — в 1.5 раза увеличивала истинные размеры головки поверхности раздела.

Снимки верхнего ряда получены при вытеснении глицерина с помощью водного раствора спирта, окрашенного в черный цвет, снимки среднего ряда — при вытеснении веретенного масла с помощью окрашенного раствора спирта, а снимки нижнего ряда — при вытеснении прозрачного раствора спирта веретенным маслом. Удельные веса жидкостей были одинаковыми.

На снимках видно, что размеры головки поверхности раздела увеличиваются с ростом величины параметра Тейлора. При достаточно медленном течении жидкостей и, следовательно, малой величине параметра Тейлора мениск деформируется незначительно, и головка поверхности раздела имеет почти плоскую форму. В этом случае происходит «поршневое» вытеснение жидкости.

В процессе движения вытесняющая жидкость не может полностью вытолкнуть жидкость, находившуюся в трубе, которая остается в виде слоя на внутренней поверхности трубы. В этом слое имеется движение жидкости, и толщина его тем меньше, чем дальше идет процесс вытеснения.

Аналогичную картину вытеснения описывает Кокс [2, 3]. Он отмечает, что поверхность раздела оказывает локальное влияние на течение жидкости перед нею. Заметное возмущение течения происходит на расстоянии порядка диаметра трубы от головки поверхности раздела, поэтому линии тока вытесняемой жидкости параллельны оси трубы почти всюду вне этой области. По измерениям Кокса течение вытесняемой жидкости на расстоянии, большем чем 1.5—2 диаметра трубы от осевой точки поверхности раздела удовлетворяет закону Гагена — Пуазейля.



Фиг. 1

Экспериментальные наблюдения Тейлора и Кокса, а также снимки, полученные автором, позволяют сделать следующие выводы:

- 1) неустойчивость поверхности раздела между жидкостями, наблюдавшаяся в известных экспериментах Сафмэна и Тейлора на щелевой модели, не имеет места при вытеснении из круглой горизонтальной трубы жидкости с большей вязкостью с помощью другой жидкости меньшей вязкости;
- 2) в процессе вытеснения образуется головка вытесняющей жидкости, которая имеет стабилизированную форму и движется с постоянной скоростью.

2. В соответствии с этими наблюдениями можно высказать две гипотезы, которые положены в основу физической модели рассматриваемого движения жидкостей.

Гипотеза 1. В развитом течении после образования головки поверхности раздела всю область движения жидкости можно разбить на три области. На фиг. 2 вертикальными линиями указаны границы областей течения, а стрелками — линии тока в системе координат, связанной с головкой. Буквой m обозначен объем невытесненной жидкости, отнесенный к ее первоначальному объему. Движение частиц жидкости в первой и третьей областях почти прямолинейно и параллельно оси трубы.

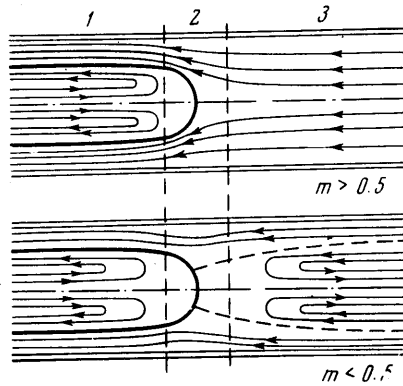
Вторая область течения включает недеформирующуюся головку вытесняющей жидкости. Линии тока в этой области сильно искривлены, но форма их в процессе вытеснения остается неизменной. Стационарность течения во второй области достигается за счет баланса сил, обусловленных межфазным натяжением, и сил, имеющих гидродинамическую природу. Величина этих сил во второй области определяет размеры головки поверхности раздела. В свою очередь, от этих размеров зависят форма поверхности раздела в первой области и скорость движения головки.

В третьей области течения движется только вытесняемая жидкость. Движение ее подчиняется закону Гагена — Пуазейля.

Гипотеза 2. Объем вытесняющей жидкости во второй области течения много меньше объема этой же жидкости в первой области.

Наиболее важным моментом в этих гипотезах является введение промежуточной автономной области течения, в которой кривизна линий тока не зависит от времени. Эта область содержит жесткую головку поверхности раздела, стабильность формы которой достигается вследствие баланса сил межфазного натяжения и гидродинамического перепада¹.

3. При решении задачи предположим, что жидкости, участвующие в движении, — несжимаемые, взаимнонерастворимые, имеют равные плотности и различные вязкости. Удельные веса обеих жидкостей принимаются равными, поэтому вытесняющая жидкость не будет всплывать или опускаться, и поверхность раздела между жидкостями будет поверхностью вращения вокруг оси трубы.



Фиг. 2

При достаточно малых числах Рейнольдса на основании гипотезы 1 о почти прямолинейном параллельном движении в первой области для описания течения можно воспользоваться уравнениями Рейнольдса и следующими кинематическими и динамическими условиями на внутренней поверхности трубы и поверхности раздела

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{iz}}{\partial r} \right) &= 0, & \frac{\partial p_i}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial r u_{iz}}{\partial z} + \frac{\partial r u_{ir}}{\partial r} &= 0 \\
 u_{2z} = u_{2r} &= 0 & \text{при } r &= R \\
 u_{1z} = u_{2z}, & u_{1r} = u_{2r} & \text{при } r &= r_0(t, z) \\
 p_1 = p_2, & \mu_1 \frac{\partial u_{1z}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial u_{2z}}{\partial r} & \text{при } r &= r_0(t, z) \\
 |u_{1z}| < \infty, & u_{1r} = 0 & \text{при } r &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь z, r — координаты точки в цилиндрической системе координат, u_{iz}, u_{ir} — продольные и поперечные составляющие скоростей движения вытесняющей и вытесняемой жидкостей (индексы 1 и 2 относятся соответственно к параметрам вытесняющей и вытесняемой жидкостей), p — давление в жидкости, $r = r_0(t, z)$ — уравнение следа поверхности раздела на выбранной меридианальной плоскости, t — время.

¹ Г. И. Баренблатт указал автору на существование этой области.

В динамические условия на поверхности раздела не вошли напряжения, обусловленные силами межфазного натяжения. Однако это не означает, что эти силы не влияют на движение жидкостей в первой области. В принятой модели вытеснения это влияние осуществляется через параметры течения во второй области. Решения уравнений Рейнольдса, удовлетворяющие крайевым условиям (3.1), имеют вид (3.2)

$$u_{1z} = -\frac{1}{4\mu_1} \frac{\partial p}{\partial z} [\mu_0 R^2 + (1 - \mu_0)r_0^2 - r^2], \quad u_{2z} = -\frac{1}{4\mu_2} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2)$$

В эти формулы входят две неизвестные величины $r_0(t, z)$ и градиент давления. Чтобы найти их, проинтегрируем оба слагаемых в уравнениях неразрывности для вытесняющей и вытесняемой жидкостей по переменной r соответственно в пределах $[0, r_0]$ и $[r_0, R]$. В результате интегрирования и использования равенств (3.2) получаем два уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} (v^2 - 2\mu_0 v^2 + 2\mu_0 v) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} \mu_0 (1 - v)^2 \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$v = v(\tau, \xi)$$

Здесь

$$v = \frac{r_0^2}{R^2}, \quad p^* = \frac{\pi R^3}{8\mu_1 q} p, \quad \xi = \frac{z}{R}, \quad \tau = \frac{q}{\pi R^3} t \quad (3.4)$$

где q — суммарный расход обеих жидкостей, который предполагается постоянным.

При выводе уравнений (3.3) радиальная скорость на поверхности раздела вычислялась как производная по времени от переменного радиуса границы раздела.

Из уравнений (3.3) можно исключить градиент давления. В результате получается уравнение, содержащее только неизвестную функцию $v = v(\tau, \xi)$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(v, \mu_0) = 0, \quad \Psi = \frac{2\mu_0 v + (1 - 2\mu_0)v^2}{\mu_0 + (1 - \mu_0)v^2} \quad (3.5)$$

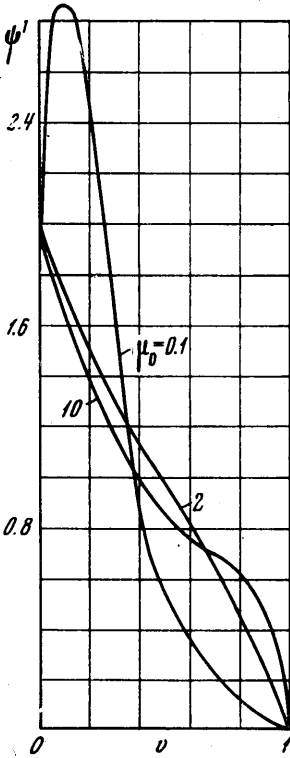
Здесь $\Psi(v, \mu_0)$ — известная нелинейная функция v и μ_0 . Физический смысл этой функции заключается в том, что она определяет расход вытесняющей жидкости, а ее производная равняется скорости движения плоской волны с постоянным значением v . График производной этой функции по v дан на фиг. 3.

Квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, которое в рассматриваемом случае описывает деформацию поверхности раздела, встречается в ряде задач гидромеханики. Оно является модельным для уравнений газовой динамики и аналогично уравнению для насыщенности Бакли — Левретта.

Уравнение (3.5) описывает деформацию поверхности раздела в первой области течения, т. е.

$$0 < \xi < l_+(\tau), \quad \tau > 0 \quad (3.6)$$

Здесь l_+ — неизвестная безразмерная длина первой области течения.



Фиг. 3

Пусть до начала процесса вытеснения жидкости соприкасались в некотором сечении трубы, которое примем за начальное. Слева от этого сечения вытесняющая жидкость заполняет всю трубу, поэтому краевые условия для функции $v(\tau, \xi)$ имеют вид

$$v(\tau, 0) = 1, \quad v(\tau, l_+) = u^+ \quad (3.7)$$

Здесь u^+ — величина относительной площади вытесняющей жидкости в том сечении поверхности раздела, где смыкаются первая и вторая области течения.

Неизвестная величина u^+ определяется условиями течения во второй области. Течение во второй области существенно зависит от сил, обусловленных межфазным натяжением. Поэтому через второе краевое условие (3.7) эти силы учитываются при решении задачи в первой области.

Процесс вытеснения будем изучать в моменты времени, для которых длина первой области течения много больше ее первоначальной длины. На основании этого принимаем, что в начальный момент времени длина первой области течения равна нулю.

Головка границы раздела движется с постоянной скоростью, зависящей от ее размеров, поэтому длина первой области увеличивается пропорционально времени, т. е.

$$l_+ = a\tau, \quad \tau \geq 0 \quad (3.8)$$

4. Построим автомодельное решение рассматриваемой задачи, зависящее от одной переменной вида $\zeta = \xi/\tau$. Для функции

$$v(\tau, \xi) = v\left(1, \frac{\xi}{\tau}\right) = u(\zeta)$$

уравнение (3.5) и условия (3.7) запишутся в следующем виде:

$$\left[\zeta - \Psi'(u, \mu_0)\right] \frac{du}{d\zeta} = 0, \quad u = u(\zeta), \quad 0 < \zeta < a \quad (4.1)$$

$$u(0) = 1, \quad u(a) = u^+$$

Уравнение (4.1) имеет два решения вида

$$\zeta = \Psi'(u, \mu_0), \quad u(\zeta) \neq \text{const} \text{ и } u(\zeta) \equiv \text{const}, \quad \zeta \neq \Psi'(u, \mu_0) \quad (4.2)$$

Первое решение написано в неявном виде. Из свойств функции $\Psi(u, \mu_0)$ следует, что это решение удовлетворяет условию при $\zeta = 0$ и, вообще говоря, не удовлетворяет условию при $\zeta = a$. Второе решение, если принять константу равной u^+ , наоборот, будет удовлетворять условию при $\zeta = a$ и не удовлетворять условию при $\zeta = 0$.

Из этих двух решений можно построить непрерывное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее обоим условиям. Именно

$$u = \varphi(\zeta, \mu_0), \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta^+ \text{ и } u = u^+, \quad \zeta^+ < \zeta < a, \quad \zeta^+ = \Psi'(u^+, \mu_0) \quad (4.3)$$

Здесь $u = \varphi(\zeta, \mu_0)$ — функция, обратная зависимости $\zeta = \Psi'(u, \mu_0)$. Нетрудно показать, что при значениях параметра $\mu_0 < 0.5$ функция $\Psi(u, \mu_0)$ имеет точку перегиба. В этом случае непрерывное однозначное решение рассматриваемой задачи можно построить только для значений u^+ , не меньших, чем абсцисса точки перегиба.

В дальнейшем из условия баланса массы будет получено ограничение на величину u^+ более общего характера.

На основании гипотезы 2 величину a определяем из условия, что весь объем вытесняющей жидкости находится в первой области течения, т. е.

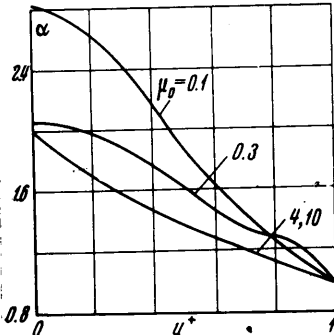
имеет место такое равенство

$$\int_0^{\alpha} u(\zeta) d\zeta = 1 \quad (4.4)$$

Если для вычисления интеграла воспользоваться найденным решением (4.3), то получается формула для определения скорости движения головки границы раздела в зависимости от ее размеров и вязкости жидкостей

$$\alpha = \frac{\Psi(u^+, \mu_0)}{u^+} \quad (4.5)$$

График этой функции представлен на фиг. 4. Из этого графика следует, что при $\mu_0 < 0.5$ головка небольшого диаметра может двигаться со скоростью, большей чем максимальная скорость ламинарного течения однородной жидкости в трубе.



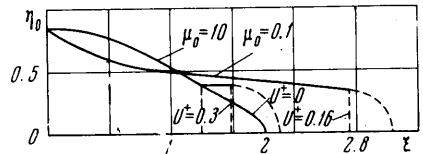
Фиг. 4

Величина α не может быть меньше ζ^+ . В противном случае нарушается баланс между объемом вытесняющей жидкости, который поступил через начальное сечение, и объемом этой жидкости в первой области течения. Это условие накладывает дополнительное ограничение на величину u^+ . Именно, величина u^+ должна быть не меньше чем значение u^* , при котором имеет место равенство $\alpha = \zeta^+$. Нетрудно показать, что в случае $\mu_0 \geq 0.5$ величина $u^* \equiv 0$ и, следовательно, для таких значений параметра μ_0 построенное решение справедливо при всех значениях u^+ . Несколько сложнее обстоит дело для $\mu_0 < 0.5$. В этом случае величина u^* зависит от значения параметра μ_0 . Расчеты показывают, что $0 \leq u^* < 0.17$.

Величина u^* не меньше абсциссы точки перегиба функции $\Psi(u, \mu_0)$, поэтому сформулированное условие включает в себя как частный случай то условие, при котором существует обратная функция. Если $u^+ < u^*$ и параметр $\mu_0 < 0.5$, то непрерывное однозначное решение определить нельзя, но можно построить разрывное решение, удовлетворяющее условию баланса и аналогичное решению Бакли — Леверетта в теории двухфазной фильтрации. Однако в рассматриваемом случае это решение не имеет смысла.

Анализ течения во второй области показывает, что величина u^+ — функция двух безразмерных параметров T и μ_0 . Поэтому вследствие полученного ограничения исследуемая модель течения приемлема не при всех значениях параметра Тейлора, если отношение вязкостей вытесняющей и вытесняемой жидкостей меньше половины.

На фиг. 5 представлены кривые $\eta_0 = \eta_0(\zeta, \mu_0)$, которые показывают, как изменяется безразмерный радиус параллельной поверхности раздела в первой области течения в зависимости от ζ , μ_0 и u^+ . Интересно отметить, что в окрестности точки $\zeta = 0$ эти кривые обращены вогнутостью вверх, если $\mu_0 \geq 1$, и вниз, если $\mu_0 < 1$. Построенная поверхность раздела при $\alpha > \zeta^+$ имеет цилиндрический участок, возникновение которого объясняется жесткой формой головки поверхности раздела. В точке $\zeta = \zeta^+$ граница раздела имеет излом. В реальном течении излом поверхности раздела отсутствует. Он сглаживается силами, обусловленными межфазным натяжением, которые при математическом описании течения в первой области не учитывались.



Фиг. 5

Нетрудно видеть, что решение (4.3) действительно описывает процесс вытеснения жидкости из трубы. Из него следует, что в области совместного течения относительная площадь сечения трубы, занятая вытесняющей жидкостью, увеличивается с ростом времени. При этом, если выбрать участок трубы в первой области течения, то он целиком заполняется вытесняющей жидкостью. В самом деле часть объема трубы, занятая вытесня-

ющей жидкостью на участке трубы от ее начала до некоторого сечения ξ_0

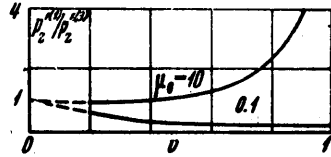
$$V_0 = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} v d\xi = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} u d\xi \quad (4.6)$$

Числитель и знаменатель этого выражения при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталля, получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} V_0 = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} u(\xi_0) = 1 \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что выбранный участок трубы целиком заполняется вытесняющей жидкостью.

Из уравнений (3.3) можно найти градиент давления в зависимости от v и μ_0 . На фиг. 6 представлен график отношения градиентов давления в первой $p_z^{(1)}$ и третьей $p_z^{(3)}$ областях течения в зависимости от относительной площади v и параметра μ_0 . При значениях v , близких к нулю, отношение этих градиентов близко к единице.



Фиг. 6

Наибольший практический интерес представляет формула для вычисления относительного объема вытесняемой жидкости, остающейся на внутренней поверхности трубы в области совместного течения обеих жидкостей. Эта величина равняется

$$m = \frac{\pi R^3 l - V_1}{\pi R^3 l} \quad (4.8)$$

Здесь $l(\tau)$ — безразмерная длина области совместного течения жидкостей; V_1 — объем вытесняющей жидкости в этой области. Этот объем равняется количеству поступившей в трубу жидкости, т. е. $V_1 = \pi R^3 \tau$.

На основании гипотезы 2 в формуле (4.8) можно заменить длину l на l_+ , т. е.

$$m \approx \frac{\pi R^3 l_+ - \pi R^3 \tau}{\pi R^3 l_+} = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{u^+}{\Psi(u^+, \mu_0)} \quad (4.9)$$

Графики функции $m = m(u^+, \mu_0)$ представлены на фиг. 7.

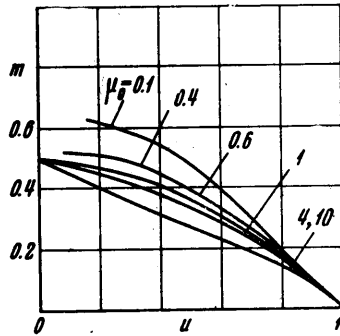
5. Анализ размерностей показывает, что величины, характеризующие течение жидкостей во второй области, в частности постоянная величина относительной площади сечения цилиндрической части головки u^+ , являются функциями $u^+ = u^+(T, \mu_0)$ двух безразмерных параметров T и μ_0 .

Из экспериментов следует, что величина u^+ увеличивается с ростом величины первого параметра. На графике фиг. 7 видно, что в этом случае количество остающейся жидкости уменьшается до нуля. В противном случае, когда первый параметр уменьшается, количество остающейся вытесняемой жидкости увеличивается до некоторого предела, величина которого зависит от отношения вязкостей.

Для определения зависимости $u^+ = u^+(T, \mu_0)$ проведем следующий приближенный анализ течения во второй области.

Головка вытесняющей жидкости движется равномерно, поэтому действующие на нее внешние силы уравновешиваются. Таковыми силами будут:

1) силы, обусловленные давлением вытесняемой жидкости на поверхность раздела во второй области течения и давлением вытесняющей жидкости в том сечении, где смыкаются первая и вторая области течения;



Фиг. 7

2) силы, обусловленные вязким трением на поверхности раздела во второй области течения;

3) силы, обусловленные межфазным натяжением, которые действуют в сечении, где смыкаются первая и вторая области течения вдоль образующих поверхности раздела.

Равновесие этих сил представляется следующим образом: в том месте, где смыкаются первая и вторая области течения, поверхность раздела имеет цилиндрическую форму. Силы давления и вязкого трения, действующие на головку вытесняющей жидкости, стремятся растянуть этот цилиндр, но им противодействует сила, обусловленная межфазным натяжением. Обозначим эту силу буквой Σ . Величина ее равняется

$$\Sigma = 2\pi r_0^+ \sigma$$

Здесь r_0^+ — радиус цилиндрического участка поверхности раздела. Если обозначить объем головки вытесняющей жидкости через ΔV , то величину проекции на ось трубы результирующей сил давления можно записать в виде

$$P = - \frac{\partial p}{\partial z} \Delta V$$

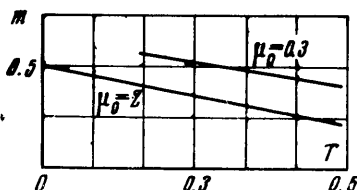
В этой формуле производная от давления вычисляется в некоторой точке второй области течения, занятой вытесняющей жидкостью. Проекцию на ось трубы результирующей сил вязкого трения обозначим буквой Γ . Уравнение равновесия головки вытесняющей жидкости имеет вид

$$- \frac{\partial p}{\partial z} \Delta V + \Gamma = 2\pi r_0^+ \sigma \quad (5.1)$$

Величины сил, входящих в это уравнение, неизвестны. Предположим, что размеры головки таковы, что можно пренебречь силой вязкого трения на ее поверхности по сравнению с силой трения на внутренней поверхности трубы во второй области течения и, следовательно, по сравнению с проекцией на ось трубы результирующей сил давления. Кроме того, принимаем, что головка поверхности раздела имеет форму полусферы. При этих предположениях равенство (5.1) примет вид

$$\frac{2}{3} \pi (r_0^+)^3 \left(- \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 2\pi r_0^+ \sigma \quad (5.2)$$

Из графика на фиг. 6 видно, что при значениях v , близких к нулю, отношение градиентов близко к единице. Естественно предположить, что во второй области течения соответствующее отношение производных



Фиг. 8

мало изменится. Отсюда следует, что градиент давления можно вычислять, например, в той точке второй области течения, где $v = u^+$. Предположим, что производная давления по z изменяется непрерывно при переходе из первой области течения во вторую, поэтому ее можно вычислить с помощью уравнений (3.3). Имеем

$$- \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\mu_1 U}{R^2} \frac{1}{\mu_0 + (1 - \mu_0)(u^+)^2} \quad U = \frac{q}{\pi R^2}$$

Подставляя это равенство в уравнение (5.2), получаем формулу для u^+ в зависимости от безразмерных параметров T и μ_0 .

Значение u^+ , вычисленной по этой формуле, подставляем в равенство (4.9), в результате чего получается зависимость $m = m(T, \mu_0)$. График этой функции представлен на фиг. 8.

Аналогичный график, построенный по данным опытов, имеется в работе Тейлора [1]. В экспериментах Тейлора вытесняющей средой был воздух, поэтому параметр μ_0 практически равнялся нулю. Построенная им функция $m = m(T)$ имеет предел при $T \rightarrow 0$, который равняется 0.6.

Поступило 16 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Deposition of a viscous fluid on the wall of tube. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, pt. 2, pp. 161—165.
2. Cox B. G. On driving a viscous fluid out of a tube. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 1, pp. 81—96.
3. Cox B. G. An experimental investigation of the streamlines in viscous fluid expelled from a tube. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt. 2, pp. 193—200.