

Индексы \circ — параметры на оси, o — параметры в начальном сечении, ∞ — параметры в набегающем потоке.

Расчеты контролировались суммированием концентраций, выполнением интегрального закона сохранения количества движения.

Автор благодарит Мурзинова И. Н. за ценные советы и Воронкина В. Г. за предоставление расчетов начальных данных.

Поступило 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Zeiberg S. L., Bleich G. D. Finite — difference calculation of hypersonic wakes. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
2. Lees L., Hromas L. Turbulent diffusion in the wake of a blunt-nosed body at hypersonic speeds. J. Aerospace Sci, 1962, vol. 29, No. 8.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
4. Bloom M., Steiger M. Diffusion and chemical relaxation in free mixing. J. Aerospace Sci, Paper, No. 63—67.
5. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Lin S., Teare J. D. Rate of ionization behind shock waves in air. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
7. Hall J., Eshenroeder A., Marrone P. Inviscid hypersonic airflows with coupled nonequilibrium processes. J. Aerospace Sci. Paper, No. 62—67.
8. Steginsky B. Calculation of cylindrical blast wave propagation with counterpressure. AIAA Journal, vol. 2, No 1, 1964.
9. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновеснодиссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕЙ

Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается плоское симметричное обтекание бесконечного клина равномерной струей малой сверхзвуковой скорости (с отошедшей ударной волной). В предельном случае звуковой струи приводится точное решение, построенное методом С. А. Чаплыгина [1].

Задача обтекания тел сверхзвуковой струей с отошедшей ударной волной является важной задачей современной аэродинамики, привлекающей внимание исследователей. Так, в работе [2] изучалось падение сверхзвуковой струи на стенку: методом интегральных соотношений в первом приближении было построено численное решение при $M_\infty \geq 3$ (M_∞ — число Маха набегающего потока). В данной работе приводятся некоторые аналитические исследования обтекания бесконечного клина для случая малой сверхзвуковой скорости струи, когда изменениями энтропии на ударной волне можно пренебречь.

Установим характер течения в окрестности точки A пересечения ударной волны и границы струи, распространяющейся в среде с постоянными давлением p_∞ . Из соотношения для давлений на скачке уплотнения в точке A

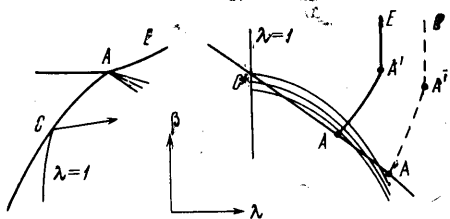
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2kM_\infty^2 \sin^2 \sigma - k + 1}{k + 1}$$

следует, что либо в точке A ударная волна вырождается в характеристику, либо в окрестности точки A в области между ударной волной и границей струи происходит дополнительный разгон потока, т. е. точка A является особой. Здесь σ — угол наклона ударной волны к вектору скорости набегающего потока, k — показатель адиабаты. В области дозвуковых скоростей таких особенностей не существует, поэтому течение в окрестности точки A является или сверхзвуковым, или смешанным. Покажем, что осуществиться может только последний случай.

Особенность в точке A (если она существует) — типа Прандтля — Майера. Это означает, что в сверхзвуковой части плоскости годографа область определения решения ограничена некоторой эллипсолоидой, на которой функция тока постоянна.

Предположим, что звуковая линия выходит не из точки A , а из некоторой точки C , расположенной на ударной волне внутри струи. Так будет и в случае сверхзв-

ковой особенности в точке A , и в случае, когда ударная волна в точке A вырождается в характеристику. Рассмотрим отображение области за ударной волной в плоскость годографа $\lambda\beta$ (λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости к оси симметрии; ось β направлена вертикально вверх, ось λ — горизонтально вправо). Для краткости будем называть эципиклоидой образ характеристики. В соответствии с «законом монотонности» вектора скорости на звуковой линии [3], образ звуковой линии в плоскости $\lambda\beta$ расположен выше образа точки C (фиг. 1). Так как угол наклона ударной поляры к оси $\beta = 0$ в точке C отрицателен, а эципиклоиды — равен нулю, то эципиклоиды второго семейства, проведенные в достаточно малой окрестности точки C через ударную поляру, могут окончиться в зависимости от величины отрезка CA только либо на ударной поляре, либо на эципиклоиде первого семейства AA' (которая является образом точки A), либо на отрезке AE линии $\lambda = \text{const}$, изображающем границу струи.



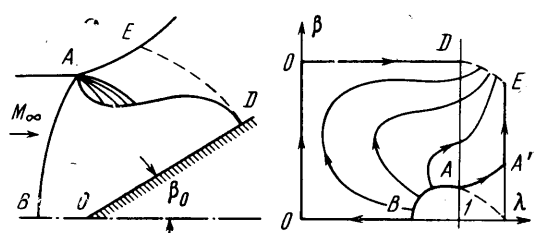
Фиг. 1

Этого не может быть, так как тогда соответствующие характеристики в физической плоскости начинались бы на ударной волне, либо начинались на ударной волне, а оканчивались бы на границе струи.

Таким образом, течение в окрестности точки A является трансзвуковым: звуковая линия выходит из точки A . (Заметим, что особенность в точке A не поддается изучению с помощью автомодельных

трансзвуковых решений из-за невозможности удовлетворить граничным условиям на ударной волне ни точно, ни асимптотически.)

На фиг. 2 показана минимальная область влияния смешанного течения в физической плоскости и в плоскости годографа для случая, когда число M_∞ достаточно мало относительно угла раствора клина, при этом все характеристики узла разрежения, выходящие из точки A , содержатся в минимальной области влияния. (При достаточно большом числе M_∞ минимальной области влияния будет принадлежать только часть характеристик узла разрежения и «последняя» характеристика узла будет оканчиваться на клине; здесь имеется аналогия с задачей сверхзвукового истечения струи из резервуара [4] (см. также [5], стр. 614).)



Фиг. 2

Звуковая точка на клине аналогична «центру сопла»: звуковая линия здесь ортогональна стенке клина и обращена выпуклостью в сторону области сверхзвуковых скоростей. В точке A звуковая линия ортогональна вектору скорости за ударной волной ([5], стр. 615) и обращена выпуклостью в сторону области дозвуковых скоростей; это объясняется тем, что все характеристики второго семейства, проведенные в плоскости годографа в достаточно малой окрестности точки A через эципиклоиду первого семейства AA' , попадают на звуковую линию.

На границе минимальной области влияния в плоскости годографа имеют место следующие граничные условия для функции тока ψ

| | | | | |
|--------------------------------|--|-----------------------------|---|--------------------|
| $\psi = 0$ | при | $\beta = 0,$ | $0 \leq \lambda \leq \lambda_B$ | (ось симметрии) |
| $\psi = 0$ | при | $\lambda = 0,$ | $0 \leq \beta \leq \beta_0$ | (точка торможения) |
| $\psi = 0$ | при | $\beta = \beta_0,$ | $0 \leq \lambda \leq 1$ | (стенка клина) |
| $\psi = 1$ | на эципиклоиде первого семейства AA' | при | $1 \leq \lambda \leq \lambda_\infty$ | |
| $\psi = 1$ | при | $\lambda = \lambda_\infty,$ | $\beta_{A'} \leq \beta \leq \beta_E$ | (граница струи) |
| $\partial\psi/\partial\nu = 0$ | а ударной поляре BA | при | $\lambda_B \leq \lambda \leq \lambda_A$ | |

Последнее граничное условие для уравнения Чаплыгина было установлено Ф. И. Франклем [6]. (Здесь $\partial/\partial\nu$ — производная по некоторому полю направлений, заданному на ударной поляре.) На эципиклоиде DE , изображающей предельную характеристику, граничного условия нет.

Указанные граничные условия определяют для уравнения Чаплыгина задачу Франкля, обобщенную в том смысле, что на части границы в области эллиптичности задано условие вида $\partial\psi/\partial\nu = 0$. Обобщенная задача Трикоми изучалась впервые

Ф. И. Франклем, доказавшим теорему единственности обтекания конечного клина с отошедшей ударной волной [6]. Вопросы существования и единственности решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения Трикоми исследовались в работе [7].

Рассмотрим предельный случай звуковой скорости набегающего потока. При $\lambda_\infty \rightarrow 1$ область определения решения станет прямоугольником, граничные условия на прямолинейных отрезках границы останутся неизменными (фиг. 3).

Установим, как преобразуется граничное условие на ударной поляре при $\lambda_\infty \rightarrow 1$. При малых значениях $(\lambda_\infty - 1)$ это условие может быть записано в виде [4] (см. также [8], стр. 146)

$$\psi_\eta = \psi_\beta \left(\frac{\eta_\infty + \eta}{2} \right)^{1/2} (7\eta_\infty + \eta)(5\eta_\infty + 3\eta)^{-1},$$

$$\lambda = 1 + (k+1)^{-1/3}\eta + O(\eta) \quad \text{при } -\eta_\infty \leq \eta \leq 0$$

и при $\lambda_\infty \rightarrow 1$ переходит в условие, что линии тока, выходящие из точки А (в которую стягивается ударная поляра), образуют узел с главным направлением вдоль дозвуковой оси $\beta = 0$ и исключительным направлением вдоль звуковой линии.

Покажем, что решение ψ , удовлетворяющее условиям на границе прямоугольника (фиг. 3), удовлетворяет также и последнему условию в точке А. Доказательство проведем в трансзвуковой постановке, заменяя уравнение Чаплыгина в окрестности звуковой линии уравнением Трикоми $\psi_{\eta\eta} = \eta\psi_{\beta\beta}$; прямоугольник при этом преобразуется в полуполосу (точка $\lambda = 0$ перейдет в точку $\eta = -\infty$), а граничные условия останутся прежними.

Представим решение ψ в виде

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_3$$

где решения ψ_i удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\psi_1 = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \quad 0 < \beta \leq \beta_0; \quad \psi_1 = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \quad -\infty < \eta < 0$$

$$\psi_1 = f(\eta) \quad \text{при } \beta = \beta_0, \quad -\infty < \eta \leq 0$$

$$\psi_2 = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \quad 0 \leq \beta < \beta_0; \quad \psi_2 = 0 \quad \text{при } \beta = \beta_0, \quad -\infty < \eta < 0$$

$$\psi_2 = f(\eta) \quad \text{при } \beta = 0, \quad -\infty < \eta \leq 0$$

$$\psi_3 = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0; \quad \psi_3 = f(\eta) \quad \text{при } \beta = 0, \quad \beta = \beta_0, \quad -\infty < \eta \leq 0$$

Здесь $f(\eta)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже; $f(0) = 1$, $f(-\infty) = 0$.

Для ψ_1 имеется точное решение [9, 10], выражающееся через гипергеометрические ряды

$$\psi_1 = \frac{C_1}{z} F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right) + C_2, \quad z = \frac{2}{3} \frac{\eta^{3/2}}{\beta} \quad \text{при } z < -1$$

$$\psi_1 = -\frac{3}{2} C_1 |z|^{2/3} F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, z^2\right) - C_1 \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} + C_2 \quad \text{при } -1 < z < 0$$

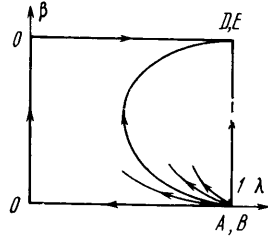
Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий $\psi_1 = 0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi_1 = 1$ при $z = 0$

$$C_1 = -\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(3/2)\Gamma(1/3)}, \quad C_2 = 0$$

Функция $f(\eta)$ определяется как значение решения ψ_1 при $\beta = \beta_0$, $-\infty < \eta < 0$. Линии тока решения ψ_1 образуют узел линий $z = \text{const}$, поэтому условие в точке А (на «ударной поляре») удовлетворяется. Легко убедиться, что $\psi_1(z)$ — монотонная функция при $-\infty < z < 0$.

Решение ψ_2 аналогично ψ_1 .

Граничные условия для ψ_2 и ψ_3 непрерывны в точке А, поэтому решение ψ имеет здесь такой же характер, как и решение ψ_1 .



Фиг. 3

Таким образом, при $\lambda_\infty \rightarrow 1$ рассматриваемая задача Франкля переходит в задачу Дирихле для прямоугольника, расположенного в области эллиптичности, одна из сторон которого лежит на звуковой линии (фиг. 3). Решение ее может быть построено методом С. А. Чаплыгина [1]. Для уравнения Чаплыгина имеем

$$\psi = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{z_{n_k}(\tau)}{z_{n_k}(\alpha)} \sin \frac{k\pi\beta}{\beta_0}, \quad n_k = \frac{k\pi}{2\beta_0}, \quad \tau = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2, \quad \alpha = \frac{k-1}{k+1} \quad (1)$$

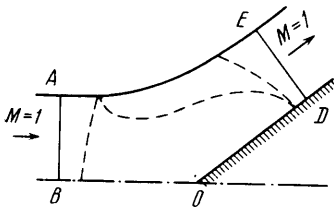
Здесь $z_{n_k}(\tau)$ — функции Чаплыгина, ограниченные при $\tau = 0$; штрих у знака суммы означает, что суммирование производится по нечетным k . (В случае уравнения Трикоми решение разлагается в ряд по частным решениям

$$\eta^{1/2} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{k\pi}{\beta_0} \eta^{3/2} \right) \sin \frac{k\pi\beta}{\beta_0}$$

где $K_{1/3}(z)$ — функция Макдональда.)

Решение (1) в плоскости годографа симметрично относительно оси $\beta = 1/2\beta_0$; в физической плоскости этому соответствует симметрия относительно оси $y = -x \operatorname{tg} 1/2\beta_0$ (фиг. 4). К решению (1) применим весь анализ работы [11] (исследование сходимости рядов); отсюда следует, что в струе имеются две прямые звуковые линии AB и ED , расположенные на конечном расстоянии от носика клина. К этим звуковым линиям слева и справа примыкают два равномерных звуковых потока. «Составная» звуковая линия $BAED$ является предельным положением ударной волны, звуковой линии, предельной характеристики и границы струи (пунктир на фиг. 4) при $\lambda_\infty \rightarrow 1$.

Решение вида (1) можно получить и в несимметричном случае, но только при условии, что точка торможения расположена в носике клина (в противном случае вследствие обтекания острия образуется местная сверхзвуковая зона); это условие связывает между собой угол атаки и смещение струи относительно клина. Случай обтекания струей безграничной стенки под углом атаки рассматривался в работах [12, 13].



Фиг. 4

Решение вида (1) можно получить и в несимметричном случае, но только при условии, что точка торможения расположена в носике клина (в противном случае вследствие обтекания острия образуется местная сверхзвуковая зона); это условие связывает между собой угол атаки и смещение струи относительно клина.

Поступило 6 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. Буковшин В. Г., Шестова Н. П. Падение плоской сверхзвуковой струи на плоскость под произвольным углом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
3. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Guderley G. Considerations on the structure of mixed supersonic flow patterns. Wright Field Report F—TR—2268—ND, 1947.
5. Общая теория аэродинамики больших скоростей. М., Воениздат, 1962.
6. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1945, т. 9, № 2.
7. Лемешинская О. М. Об одном методе решения краевых задач околзвукового потока. В сб.: «Трансзвуковые течения газа», Саратов, Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
8. Гудерлей К. Г. Теория околзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Скрипкин В. А. Об околзвуковом истечении плоской газовой струи из насадка с параллельными стенками. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
10. Ehlers F. E. On some solutions of the hodograph equation which yield transonic flows through a Laval nozzle. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2.
11. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
12. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
13. Буковшин В. Г., Шестова Н. П. Падение плоской дозвуковой струи на плоскость под произвольным углом. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.