$= 100$. При этом счет велся только по схеме $\alpha = 1$. Вихри здесь значительным образом переместились в направлении отверстий, через которые жидкость втекает. Численные эксперименты показали устойчивость этого решения.

Поступило 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglas Jim. jr. Rachfordir H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 82, No. 2, pp. 421—439.
2. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. СО АН СССР, Новосибирск, «Наука», 1967.

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В. Ф. МОЛЧАНОВ (*Пермь*)

Имеется длинная цилиндрическая труба радиуса $r°$, вращающаяся вокруг продольной оси с угловой скоростью ω. Через стенки трубы со скоростью V_* подается несжимаемая жидкость с плотностью ρ и кинематическим коэффициентом вязкости ν. Требуется определить стационарное поле скоростей потока жидкости.

Система уравнений Навье — Стокса и граничные условия для составляющих скорости V_r, V_φ, V_x в цилиндрической системе координат r, φ, x можно представить в следующем виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\alpha^2v^2}{y}=-\frac{1}{\rho V_*^2}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2u}{\partial y}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{uv}{y}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{v}{y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho V_*^2}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u}{y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\qquad\left(\alpha=\frac{\omega r°}{V_*}\right)\tag{1}$$

$$u|_{y=0}=0,\quad u|_{y=1}=-1,\quad v|_{y=0}\neq\infty,\quad v|_{y=1}=1$$
$$w|_{y=1}=0,\quad w|_{z=0}=0\tag{2}$$

Здесь p — давление, $r°$ — радиус трубы, R — число Рейнольдса.

Так как труба предполагается достаточно длинной, то торцовыми эффектами можно пренебречь и принять $u=u(y)$, $v=v(y)$, $w=\eta(y)\theta(z)$, т. е. применить метод разделения переменных. Система уравнений (1) после несложных преобразований примет вид

$$u\frac{d\eta}{dy}+\eta^2\frac{d\theta}{dz}-\frac{1}{R}\left(\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{d\eta}{dy}\right)=\text{const}\tag{3}$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{u}{y}+\eta\frac{d\theta}{dz}=0,\qquad\frac{d\theta}{dz}=\text{const}\tag{4}$$

$$\frac{d^2v}{dy^2}+\left(\frac{1}{y}-uR\right)\frac{dv}{dy}-\left(\frac{1}{y}+uR\right)\frac{v}{y}=0\tag{5}$$

Граничные условия (2) для функций u, v сохраняются, и для функций η и θ граничные условия принимают вид

$$\eta|_{y=1}=0,\qquad\theta|_{z=0}=0$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$v = \frac{1}{y}\left[c_1 + c_2 \int \exp\left(R \int u\,dy\right) y\,dy \right] \tag{6}$$

Произвольные постоянные необходимо определить так, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям (2), тогда

$$v = \frac{1}{y} \int_0^1 \exp\left(R \int_0^y u\,dy\right)^{-1} \int_0^y \exp\left(R \int_0^y u\,dy \right) y\,dy \tag{7}$$

Таким образом, функция v, удовлетворяющая уравнению (5) и граничным условиям (2), определяется, если известна функция u.

В уравнения, определяющие u, η и θ, не входит v, эти уравнения аналогичны уравнениям для составляющих скорости в невращающейся трубе с проницаемыми стенками. Решение системы уравнений (3), (4) с граничными условиями (2) и (5) получено, например, в работе [1], где функции u и η представлены в виде рядов по степеням $1 / R$.

Для иллюстрации применения формулы (7) воспользуемся приближенной зависимостью

$$u = -y^{-1} \sin^{1/2} \pi y^2 \tag{8}$$

полученной в работе [1] для достаточно больших чисел Рейнольдса. Тогда

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\int_0^1 \exp(-{}^1/_2 R \operatorname{si} {}^1/_2\pi\xi)\,d\xi \right)^{-1} \int_0^\xi \exp(-{}^1/_2 R \operatorname{si} {}^1/_2\pi\xi)\,d\xi \qquad (\xi = y^2) \tag{9}$$

Здесь $\operatorname{si} {}^1/_2\,\pi\xi$ — интегральный синус.

При $R \to \infty$ формулы (7) и (9) обращаются в уравнение сохранения момента количества движения для идеального газа $v = 1 / y$, а при $R = 0$ — в уравнение $v = y$.

При малых числах Рейнольдса формулы (8) и (9) несправедливы, необходимо для вычисления u удерживать в решении работы [1] члены, содержащие более высокие степени $1 / R$. Функция v при этом вычисляется подстановкой полученного выражения u в формулу (7).

Для практических расчетов при числе Рейнольдса $R > 10^3$ для вычисления v можно принять приближенные зависимости, полученные упрощением формулы (9)

$$v = y^{-1}[1 - \exp(-{}^1/_4\pi R y^2)]$$

или

$$v = \begin{cases} y^{-1} & 1 \leqslant y < y_* = 2\sqrt{1 / \pi R} \\ {}^1/_4\pi R y & (y_* < y \leqslant 0) \end{cases}$$

Поступило 15 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuane S. W., Fincelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous walles. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 4, p. 719.

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

А. П. БЫРКИН, И. И. МЕЖИРОВ

(*Москва*)

В работе рассматривается класс автомодельных осесимметричных и плоских ламинарных течений вязкого газа в длинном канале с плавным контуром, в которых продольная составляющая скорости и температура газа будут функциями одной безразмерной поперечной координаты. Таким течениям соответствует экспоненциальный (осесимметричное течение) и линейный (плоское течение) закон увеличения радиуса или высоты канала и соответственно экспоненциальный и гиперболический закон падения статического давления по длине канала.