

Расчет абсолютных значений параметров двухфазного течения по показаниям трубки полного напора представляет сложную задачу. В данном случае трубка полного напора применялась лишь для определения границ областей, где напор переставал быть постоянным. Изображение участка осциллограммы приведено на фиг. 4; «всплески» 1 указывают положение ударной волны, возникающей перед инжектированной струей, а точки 2 соответствуют границам самой струи.

На фиг. 5, где обозначено $y^0 = y/d$, а $z^0 = z/d$, изображены определенные по точкам 2 осциллограмм формы поперечных сечений струи этилового спирта, инжектированной в поток при давлении подачи $p^* = 1.02$. Как следует из представленных кривых, форма поперечных сечений инжектированной в сверхзвуковой поток струи жидкости близка к круговой (овальной).

Приведенные экспериментальные данные позволяют более точно аппроксимировать форму струи, которая во многих работах, посвященных построению методов расчета взаимодействия потоков [2, 3], принималась полуцилиндрической или близкой к ней. Следует заметить, что аппроксимация поперечных сечений струи кругами, по-видимому, справедлива лишь при малых значениях отношения толщины пограничного слоя к характерному размеру струи, за который может быть принята глубина проникновения струи [4]. В условиях данного эксперимента это отношение равнялось 0.035.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 23 VII 1968

1. Adelberg M. Breakup rate and penetration of a liquid jet in a gas stream. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика. 1967, т. 5, № 8.)
2. Wu J. M., Chapkis R. L., Mager A. Approximate Analysis of Thrust Vector Control by Fluid Injection. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 12. (Рус. перев.: Ракетная техника, 1961, № 12.)
3. Sehgal R., Wu J. M. Thrust vector control by liquid injection into rocket nozzles. J. Spacecraft and Rockets, 1964, vol. 1, No. 5.

О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

К. Б. ДЖАКУПОВ, Б. Г. КУЗНЕЦОВ

(Новосибирск)

Для расчета двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости большинство авторов пользуется функцией тока. Поле скоростей определяется при этом численным дифференцированием, что существенно снижает точность расчетов. Ниже изучается одно стационарное течение вязкой жидкости методом, позволяющим избежать указанный недостаток; при этом задача для уравнений Навье — Стокса приводится к другой эквивалентной задаче; для численного решения полученной системы уравнений предлагается неявная конечно-разностная схема, построенная на основе результатов работ [1, 2].

1. Основные уравнения. Изучение плоских движений вязкой несжимаемой жидкости сводится к отысканию функций u , v , p переменных x , y , t , удовлетворяющих в области $\Omega \times [0, T]$ уравнениям Навье — Стокса (в форме Ламба, в безразмерных переменных)

$$u_t + v\omega + H_x = \frac{1}{R} \Delta u, \quad v_t - u\omega + H_y = \frac{1}{R} \Delta v \quad \left(H = p + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \omega = u_y - v_x \quad (1.2)$$

на границе s конечной области Ω условиям

$$\mathbf{u} \{u, v\} = \mathbf{U} \{U, V\} \quad (x, y) \in s, \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

и начальным условиям

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}^0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

Предполагается, что

$$\int \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (\mathbf{n} - \text{нормаль к } s) \quad (1.5)$$

Уравнения (1.1), (1.2) заменяются следующей системой

$$\omega_y = \Delta u, \quad -\omega_x = \Delta v, \quad \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = R^{-1}\Delta\omega \quad (1.6)$$

Решение этой системы должно удовлетворять, кроме условий (1.3)–(1.5), дополнительному граничному условию

$$\omega = u_y - v_x, \quad (x, y) \in s, \quad t \in [0, T] \quad (1.7)$$

и, если Ω многосвязна, условиям

$$\int_{\gamma_i} \left[\left(\frac{1}{R} \omega_y - v\omega - u_t \right) dx + \left(u\omega - v_t - \frac{1}{R} \omega_x \right) dy \right] = 0 \quad (1.8)$$

Здесь γ_i — любой контур $\overline{\Omega}$; γ_i охватывают все внутренние контуры.

Докажем, что решение задачи (1.6) с условиями (1.3)–(1.5), (1.7) (или (1.8)) будет решением задачи (1.1)–(1.5).

Прежде всего, покажем, что на решениях задачи (1.6), (1.7) (или (1.8)) выполняется уравнение неразрывности (1.2). Из (1.6) вытекает, что функция $Q = \nabla \cdot \mathbf{u}$ удовлетворяет в Ω уравнению

$$\Delta Q = 0$$

Кроме того, из (1.6) и (1.7) также следует, что

$$\partial Q / \partial n = 0, \quad (x, y, t) \in s \times [0, T] \quad (1.9)$$

Уравнение Лапласа с краевым условием (1.9) имеет очевидное решение

$$Q = Q(t) \quad \text{или} \quad u_x + v_y = Q(t)$$

Из (1.4) и (1.5) вытекает, что $Q(t) \equiv 0$. Нетрудно установить, что выполняется второе уравнение (1.2). Преобразуем первые два уравнения (1.6) к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}(\omega - u_y + v_x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\omega - u_y + v_x) = 0$$

Отсюда имеем

$$\omega - u_y + v_x = \varphi(t) \quad \text{или} \quad \omega = u_y - v_x + \varphi(t)$$

$\varphi(t) \equiv 0$ в силу (1.7).

Для вывода уравнений (1.1) преобразуем последнее уравнение (1.6) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u_t + v\omega - \frac{1}{R} \omega_y \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-v_t + u\omega - \frac{1}{R} \omega_x \right) = 0$$

Полученное соотношение представляет собой условие существования функции H , производные которой удовлетворяют уравнениям

$$H_x = -u_t - v\omega + R^{-1}\omega_y, \quad H_y = -v_t + u\omega - R^{-1}\omega_x$$

В силу условия (1.8) функция H есть однозначная функция. Учитывая первые два уравнения (1.6), получаем систему уравнений (1.1), этим и завершается доказательство. Обратное утверждение, что каждое достаточное гладкое решение задачи (1.1)–(1.5) будет решением задачи (1.3)–(1.8), очевидно. Можно получить аналогичную задачу для трехмерного случая.

При этом задача

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla H &= R^{-1}\Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{U}\{U, V, W\}, \quad (x, y, z) \in s, \quad t \in [0, T], \quad H = p + 1/2|\mathbf{u}|^2 \end{aligned}$$

$$\int_s (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) ds = 0, \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}^0(x, y, z) \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}^0) = 0 \quad (x, y, z) \in \overline{\Omega}$$

оказывается эквивалентной задаче

$$\text{rot } \boldsymbol{\omega} = -\Delta \mathbf{u}, \quad \omega_t + \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = R^{-1}\Delta \boldsymbol{\omega}$$

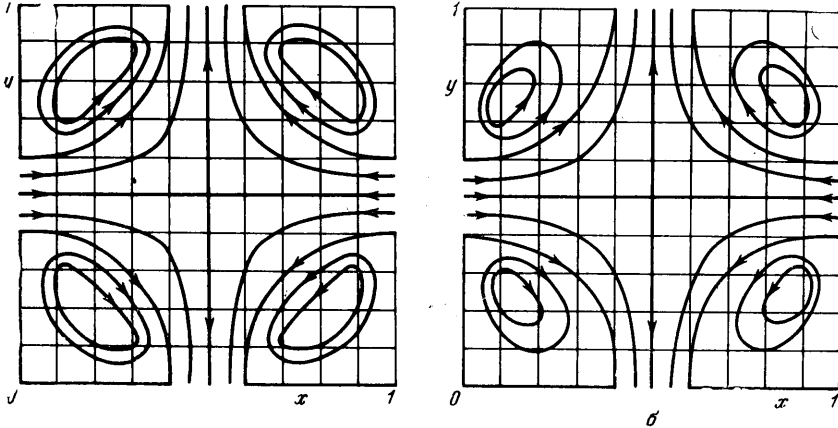
$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \{U, V, W\}, \quad (x, y, z) \in s, \quad t \in [0, T], \quad \int_s \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

$$\mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}^0(x, y, z), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega^-$$

$$\omega = \text{rot } \mathbf{u}, \quad (x, y, z) \in s, \quad t \in [0, T]$$

Рассматриваемый метод можно применить и для решения стационарных задач вязкой сжимаемой жидкости, если ввести функцию $\omega = \text{rot}(\rho \mathbf{u})$, где ρ — плотность.

2. Конечно-разностная схема. Пусть Ω есть некоторая односвязная область, граница которой составлена из прямых, параллельных осям координат x, y . Покроем область Ω сеткой с шагом h , так что $x = ih, y = jh$ положим также $t = n\tau$, где τ — временной шаг; i, j, n — последовательности целых чисел.



Фиг. 1

Если известны u^n, v^n, ω^n в момент времени $t = n\tau$, то для определения $u^{n+1}, v^{n+1}, \omega^{n+1}$ предлагается следующая итерационная конечно-разностная схема. На первом дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\frac{v^{(k+1/2)} - v^{(k)}}{\theta} = v_{xx}^{(k+1/2)} + \alpha(v_{yy}^{(k)} + \omega_x^{(k)})$$

$$\frac{\omega^{(k+1/2)} - \omega^{(k)}}{\theta} + \beta \frac{\omega^{(k)} - \omega^n}{\tau} = \frac{1}{R}(\omega_{xx}^{(k+1/2)} + \alpha\omega_{yy}^{(k)}) - u^{(k)}\omega_x^{(k+1/2)} - \alpha v^{(k+1/2)}\omega_y^{(k)},$$

$$\frac{u^{(k+1/2)} - u^{(k)}}{\theta} = u_{xx}^{(k+1/2)} + \alpha u_{yy}^{(k)} - \omega_y^{(k+1/2)}$$

$$u^{(k+1/2)} = U^{n+1}, \quad v^{(k+1/2)} = V^{n+1}, \quad \omega^{(k+1/2)} = u_y^{(k+1/2)} - v_x^{(k+1/2)}, \quad (x, y) \in s$$

На втором шаге

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k+1/2)}}{\theta} = u_{yy}^{(k+1)} - \alpha u_{yy}^{(k)}$$

$$\frac{\omega^{(k+1)} - \omega^{(k+1/2)}}{\theta} = \frac{1}{R}(\omega_{yy}^{(k+1)} - \alpha\omega_{yy}^{(k)}) - v^{(k+1/2)}(\omega_y^{(k+1)} - \alpha\omega_y^{(k)}) - \alpha(u^{(k+1)} - u^{(k)})\omega_x^{(k+1/2)} - \alpha\beta \frac{\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}}{\tau}$$

$$\frac{v^{(k+1)} - v^{(k+1/2)}}{\theta} = v_{yy}^{(k+1)} - \alpha v_{yy}^{(k)} + \omega_x^{(k+1)} - \alpha\omega_x^{(k)}$$

$$u^{(k+1)} = U^{n+1}, \quad v^{(k+1)} = V^{n+1}, \quad \omega^{(k+1)} = u_y^{(k+1)} - v_x^{(k+1)}, \quad (x, y) \in s$$

(Подразумевается, что стоящие справа дифференциальные операторы аппроксимируются конечно-разностными.) Здесь θ — итерационный параметр, k — индекс итерации, n — индекс временного слоя. При решении нестационарной задачи $\beta = 1$, при решении стационарных задач $\beta = 0$; параметр α принимает значение 0 и 1. В качестве начальных условий для итераций на $n+1$ -слое выбирается следующее $u^{(0)} = u^n$, $v^{(0)} = v^n$, $\omega^{(0)} = \omega^n$.

Система разностных уравнений решается прогонками в указанном порядке, что существенно при реализации схемы. Итерации начинаются по схеме расщепления, получающейся из предлагаемой схемы при $\alpha = 0$.

Счет по этой схеме ведется до выполнения условия

$$\max_{ij} \{ |u^{(k+1)} - u^{(k)}| = \varepsilon_1, \quad |v^{(k+1)} - v^{(k)}| = \varepsilon_2, \quad |\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}| = \varepsilon_3 \} < \delta \quad (2.1)$$

Здесь $\delta > 0$ — заданное число.

Далее итерации ведутся при $\alpha = 1$ по схеме типа стабилизирующей поправки. В качестве начальных условий для итераций по этой схеме используются значения $u^{(k+1)}$, $v^{(k+1)}$, $\omega^{(k+1)}$, полученные при окончании счета по схеме $\alpha = 0$. Схема при $\alpha = 1$ обладает полной аппроксимацией [2]. (Можно пользоваться только этой схемой, однако для ускорения сходимости итераций вначале целесообразно провести счет по схеме $\alpha = 0$.) Итерации прекращаются при выполнении условия (2.1).

Очевидно, что если $\omega^{(k)} \rightarrow \omega^{n+1}$, $u^k \rightarrow u^{n+1}$, $v^k \rightarrow v^{n+1}$, при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow 0$. Из уравнений второго дробного шага при этом следует также, что

$$\omega^{(k+1/2)} \rightarrow \omega^{n+1}, \quad u^{(k+1/2)} \rightarrow u^{n+1}, \\ v^{(k+1/2)} \rightarrow v^{n+1}.$$

Сходимость к решению и устойчивость предложенной схемы экспериментально проверялась на точном решении задачи (1.1) — (1.5), в качестве которого было взято течение Пуазейля.

Нетрудно построить аналогичную конечно-разностную схему и для трехмерных задач.

3. Некоторые результаты вычислений. Численные эксперименты проводились с течениями в квадрате с симметричными относительно осей отверстиями. Граничные условия (1.3), (1.4) в этом случае примут следующий вид:

$$\begin{aligned} x \in [0, 0.4], \quad y = 0, \quad y = 1, \quad u = 0, \quad v = 0 \\ x \in [0.4, 0.6], \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = (x-0.6)(x-0.4) \\ y = 1, \quad u = 0, \quad v = (0.6-x)(x-0.4) \\ x \in [0.6, 1], \quad y = 0, \quad y = 1, \quad u = 0, \quad v = 0 \\ y \in [0, 0.4], \quad x = 0, \quad x = 1, \quad u = 0, \quad v = 0 \\ y \in [0.4, 0.6], \quad x = 0, \quad v = 0, \quad u = (0.6-y)(y-0.4) \\ x = 1, \quad u = (y-0.6)(y-0.4), \quad v = 0 \\ y \in [0.6, 1] \quad x = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad x = 1, \quad v = 0, \quad u = 0 \end{aligned}$$

Для расчета была взята равномерная сетка с числом точек 11×11 с шагом $h = 0.1$. Производные и граничные условия аппроксимировались с порядком точности $O(h^2)$. На фиг. 1 нанесены картины линий тока для числа Рейнольдса $R = 100$.

Центры возвратных течений, которые возникают в уголках, с увеличением числа R имеют тенденцию перемещения к отверстию, через которое жидкость втекает.

На фиг. 2 приводится решение, полученное для $R = 1000$, когда начальные условия для итераций принимались равными нулю; при этом не обнаруживается течений, показанных на фиг. 1.

Численные эксперименты показали, что это решение неустойчиво, оно очень сильно реагирует на малые изменения граничных условий.

На фиг. 1, б изображено решение для числа Рейнольдса $R = 1000$, когда в качестве начальных условий для итераций использовалось решение, полученное при $R =$

= 100. При этом счет велся только по схеме $\alpha = 1$. Вихри здесь значительным образом переместились в направлении отверстий, через которые жидкость вытекает. Численные эксперименты показали устойчивость этого решения.

Поступило 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglas Jim, jr. Rachfordir H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 82, No. 2, pp. 421—439.
2. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. СО АН СССР, Новосибирск, «Наука», 1967.

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В. Ф. МОЛЧАНОВ (Пермь)

Имеется длинная цилиндрическая труба радиуса r^0 , вращающаяся вокруг продольной оси с угловой скоростью ω . Через стенки трубы со скоростью V_* подается несжимаемая жидкость с плотностью ρ и кинематическим коэффициентом вязкости ν . Требуется определить стационарное поле скоростей потока жидкости.

Система уравнений Навье — Стокса и граничные условия для составляющих скорости V_r, V_φ, V_x в цилиндрической системе координат r, φ, x можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\alpha^2 v^2}{y} &= -\frac{1}{\rho V_*^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{y} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho V_*^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \quad \left(\alpha = \frac{\omega r^0}{V_*} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = -1, \quad v|_{y=0} \neq \infty, \quad v|_{y=1} = 1 \\ w|_{y=1} = 0, \quad w|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p — давление, r^0 — радиус трубы, R — число Рейнольдса.

Так как труба предполагается достаточно длинной, то торцовыми эффектами можно пренебречь и принять $u = u(y)$, $v = v(y)$, $w = \eta(y)\theta(z)$, т. е. применить метод разделения переменных. Система уравнений (1) после несложных преобразований примет вид

$$u \frac{d\eta}{dy} + \eta^2 \frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\eta}{dy} \right) = \text{const} \quad (3)$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{u}{y} + \eta \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad \frac{d\theta}{dz} = \text{const} \quad (4)$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\frac{1}{y} - uR \right) \frac{dv}{dy} - \left(\frac{1}{y} + uR \right) \frac{v}{y} = 0 \quad (5)$$

Граничные условия (2) для функций u, v сохраняются, и для функций η и θ граничные условия принимают вид

$$\eta|_{y=1} = 0, \quad \theta|_{z=0} = 0$$