

На ЭЦВМ были проведены расчеты параметров течения для различных углов  $\chi$  стреловидности крыльев. На фиг. 3 показано изменение коэффициента давления вдоль хорды крыла  $z_0 = r_0$ . Расчеты проводились при  $l = 10$  и  $h = 0.05$ . Дальнейшее увеличение  $l$  или уменьшение  $h$  не изменяет результатов расчета с точностью до 0.1%. Для сравнения на фиг. 3 приведено распределение давления вдоль хорды, полученное для случая  $\chi = 0$  методом разложения в ряды Фурье [4].

На фиг. 4 приведена величина  $C_n^\alpha$  производной нормальной силы по углу атаки цилиндра с крыльями различной длины хорды крыла  $b$ . Коэффициент  $C_n^\alpha$  отнесен к площади  $\pi r_0^2$ . Увеличение стреловидности крыла уменьшает подъемную силу цилиндрической части. Величина  $C_n^\alpha$  на фиг. 4 дана для случая интерференции цилиндра с двумя треугольными крыльями.

Приведенный пример расчета показывает, что метод Вольтерра может с успехом применяться для решения сложных линейных задач. Следует отметить, что этот метод имеет ряд преимуществ перед методом разложения решения в ряды, так как он дает сразу точное решение и его можно применять для более широкого круга цилиндрических поверхностей.

Автор благодарит А. И. Уткина за полезные советы.

Поступило 2 IV 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа. М., Гостехиздат, 1933, ч. 1, т. 3.
2. Фалькович С. В. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
3. Уткин А. И. Применение интеграла Вольтерра к задаче обтекания цилиндрической поверхности со сверхзвуковыми кромками. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
4. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 362—418.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОБМЕНА НА ОСТРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОНУСАХ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

В. А. БАШКИН

(Москва)

Семейство острых эллиптических конусов представляет собой один из наиболее простых классов пространственных тел и характеризуется двумя параметрами, в качестве которых можно принять следующие: 1) коэффициент эллиптичности  $\delta = b/a$ , где  $a$  и  $b$  — малая и большая полуоси эллипса соответственно, и 2) полуугол раствора конуса  $\theta^\circ$  в плоскости большой полуоси. В качестве частных случаев это семейство тел включает в себя острый круговой конус ( $\delta = 1$ ) и плоское треугольное крыло с острыми передними кромками ( $\delta = \infty$ ).

При сверхзвуковых скоростях и углах атаки, меньших предельного, течение сжимаемого газа вокруг эллиптических конусов является коническим, что значительно упрощает численный расчет поля течения. Конический характер невязкого потока обуславливает некоторые особенности течения сжимаемого газа в пространственном ламинарном пограничном слое, благодаря которым численное интегрирование уравнений пограничного слоя сводится к двумерной задаче.

Теоретическому исследованию обтекания острых эллиптических конусов сверхзвуковым потоком газа посвящен ряд работ. В большинстве из них излагается лишь метод расчета и приводятся в виде графиков некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие возможности предложенного метода. Результаты систематических расчетов полей течений вокруг эллиптических конусов в некотором диапазоне изменения характеристик параметров приведены в работах [1, 2].

Развитие ламинарного пограничного слоя на поверхности острых круговых конусов, обтекаемых потоком совершенного газа при сверхзвуковых скоростях и малых углах атаки  $\alpha < \theta^\circ$  исследовалось в работах Н. Д. Введенской [3] и Р. М. Копятевича; последним было рассмотрено также влияние вдува однородного газа. При проведении расчетов использовались данные работы [1].

Ниже приведены результаты численного интегрирования уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на острых эллиптических конусах, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при больших углах атаки  $\alpha > \theta^\circ$ . При решении задачи параметры невязкого потока заимствовались из работы [2].

1. Если для решения задачи воспользоваться переменными Крокко, то система уравнений, описывающая течение сжимаемого газа в пространственном ламинарном

пограничном слое при коническом внешнем потоке, имеет вид [4]

$$\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial u^2} - \frac{\rho \mu^2 v^2}{r \tau_1^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\tau_1}{\mu} \right) + \frac{\mu}{r \tau_1} \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial u} + \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho \mu r}{\tau_1} \right) + \frac{1}{r \psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho \mu v}{\tau_1} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} - \frac{\rho \mu v}{r \tau_1^2} \left( v \frac{\partial v}{\partial u} + u \right) + \frac{\rho_e \mu}{r \tau_1^2} \left( \frac{v_e}{\psi} \frac{dv_e}{d\theta} + u_e v_e \right) - \frac{\rho \mu u}{\tau_1^2} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\rho \mu v}{r \psi \tau_1^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{P} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + \left( \frac{1-P}{P} \frac{\partial \ln \tau_1}{\partial u} - \frac{\rho \mu v^2}{r \tau_1^2} \right) \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\rho \mu u}{\tau_1^2} \frac{\partial H}{\partial r} - \\ & - \frac{\rho \mu v}{r \psi \tau_1^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1-P}{P} \tau_1 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение этой системы уравнений должно удовлетворять граничным условиям

$$\tau_1 \rightarrow \infty \quad \text{при } r = 0, 0 \leq u \leq u_e$$

$$\tau_1 = 0, \quad v = v_e, \quad H = H_e \quad \text{при } r > 0, u = u_e \quad (1.4)$$

$$\partial \tau_1 / \partial u = \rho_w w_w, \quad v = 0, \quad H = H_w \quad \text{при } r > 0, u = 0$$

Здесь  $r$  — расстояние от вершины тела до рассматриваемой точки вдоль его образующей;  $\theta$  — угол, характеризующий положение меридиональной плоскости, ортогональной поверхности тела;  $u, v$  — компоненты вектора скорости, параллельные поверхности тела и направленные вдоль и поперек его образующей;  $w$  — компонент вектора скорости, ортогональный поверхности тела;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости;  $\rho$  — плотность;  $H$  — полная энтальпия,  $T$  — температура;  $\tau_1$  — продольный компонент напряжения трения;  $\psi(\theta)$  — функция, вид которой определяется геометрией тела;  $P$  — число Прандтля. Индекс  $e$  характеризует параметры потока на внешней границе пограничного слоя, индекс  $w$  — на поверхности тела.

Для численного интегрирования система уравнений (1.1) — (1.3) была приведена к безразмерному виду и подвергнута ряду преобразований. После того для ее решения был использован метод интегральных соотношений, предложенный А. А. Дородницыным [5].

Применение метода интегральных соотношений для расчета пространственного ламинарного пограничного слоя при коническом внешнем течении и особенности численного интегрирования описаны в работе [4].

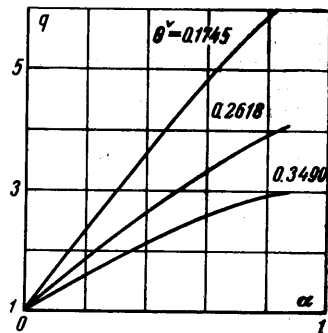
При помощи стандартной программы по данным работ [1, 2] были проведены систематические расчеты ламинарного пограничного слоя на острых эллиптических конусах при разбиении поля течения на пять полос. При расчетах предполагалось, что газ совершенный, удельные теплоемкости ( $\kappa = 1.4$ ) и число Прандтля ( $P = 0.7$ ) постоянны, динамический коэффициент вязкости в зависимости от температуры изменяется по степенному закону ( $\mu \sim T^{0.76}$ ), а на поверхности тела имеет место сильный теплообмен ( $H_w / H_e = 0.05$ ).

Основные результаты расчетов были получены для следующего диапазона изменения характеристических параметров:  $\theta^v = 0.1745, 0.2618, 0.3490$  ( $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ ),  $\alpha = 0.5236, 0.6981, 0.8737$  ( $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ ),  $M_\infty = 5, 7, 10, \delta = 1, 2, 3$ .

2. При обтекании острых эллиптических конусов под большими углами атаки в плоскости симметрии на наветренной стороне располагается линия растекания.

При фиксированном угле атаки интенсивность вторичного течения на линии растекания тем сильнее, чем меньше полуугол раствора конуса. Это обуславливает различный темп возрастания местного потока тепла на линии растекания по мере увеличения угла атаки для конусов с различными углами раствора. В качестве примера на фиг. 1 показано изменение местного потока тепла в виде зависимости величины  $q = q_w(\alpha) / q_w(0)$  от угла атаки  $\alpha$  при фиксированных значениях угла  $\theta^v$  ( $M_\infty = 7, \delta = 1$ ).

В исследованном диапазоне влияние числа Маха на относительные величины местного потока тепла на линии растекания невелико и находится в пределах не-

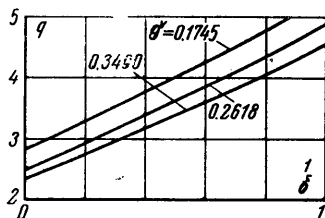


Фиг. 1

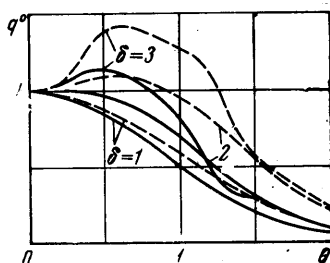
скольких процентов. Об этом можно судить по приведенным ниже данным ( $\theta^0 = 15^\circ$ ,  $\delta = 1$ )

$\alpha = 30^\circ$ (0.5236)	$40^\circ$ (0.6981)	$50^\circ$ (0.8737)	
$q = 3.08$	3.62	4.03	( $M_\infty = 5$ )
$q = 3.10$	3.68	4.10	( $M_\infty = 7$ )
$q = 3.11$	3.71	4.14	( $M_\infty = 10$ )

При заданных условиях обтекания увеличение коэффициента эллиптичности  $\delta$  приводит к уменьшению местного потока тепла на линии растекания, величина которого при  $\delta \rightarrow \infty$  стремится к значению, соответствующему плоскому треугольному крылу при тех же условиях обтекания.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 для частного случая:  $M_\infty = 7$ ,  $\alpha = 40^\circ$  (0.6981) показано изменение местного потока тепла в виде зависимости величины  $q^* = q_w \sqrt{R} / \rho_\infty u_\infty H_\infty$  от параметра  $1/\delta$  при фиксированных значениях угла  $\theta^0$ .

3. Распределение параметров пограничного слоя в поперечном сечении эллиптического конуса существенным образом зависит от угла атаки  $\alpha$  и коэффициента эллиптичности  $\delta$ . В качестве примера на фиг. 3 показано распределение местного потока тепла в поперечном сечении эллиптических конусов с полууглом раствора  $\theta^0 = 15^\circ$  (0.2618) в виде зависимости величины  $q^0 = q_w(\theta) / q_w(0)$  от переменной  $\theta$  при числе Маха  $M_\infty = 7$  и углах атаки  $\alpha = 30^\circ$  (0.5236) (пунктирные кривые) и  $\alpha = 50^\circ$  (0.8737) (сплошные кривые). (Здесь и ниже под распределением параметров в поперечном сечении тела понимается распределение их по поверхности конуса вдоль координатной кривой  $r = \text{const.}$ )

В поперечном сечении острого кругового конуса ( $\delta = 1$ ) при фиксированном угле атаки величина местного теплового потока достигает максимального значения на линии растекания и монотонно уменьшается по мере отхода от нее. Неравномерность в распределении местного потока тепла усиливается при увеличении угла атаки (фиг. 3) и числа Маха, влияние которого сравнительно невелико. Для кругового конуса с полууглом раствора  $\theta^0 = 15^\circ$  (0.2618) приводятся значения  $q_{30}^0$  для угла атаки  $\alpha = 30^\circ$  (0.5236) и значения  $q_{50}^0$  для  $\alpha = 50^\circ$  (0.8737).

$\theta = 0$	0.6	1.0	1.5	2.1	2.72	
$q_{30}^0 = 1.0$	0.835	0.571	0.314	0.099	0.012	( $M_\infty = 5$ )
$q_{30}^0 = 1.0$	0.830	0.551	0.291	0.033	0.054	( $M_\infty = 7$ )
$q_{30}^0 = 1.0$	0.826	0.546	0.280	0.075	—	( $M_\infty = 10$ )
$q_{50}^0 = 1.0$	0.790	0.482	0.221	0.049	0.0043	( $M_\infty = 5$ )
$q_{50}^0 = 1.0$	0.784	0.469	0.208	0.043	—	( $M_\infty = 7$ )
$q_{50}^0 = 1.0$	0.781	0.462	0.200	0.040	—	( $M_\infty = 10$ )

Для фиксированных условий обтекания при определенном значении коэффициента эллиптичности  $\delta = \delta_0$  происходит смена в характере распределения местного потока тепла (фиг. 3): при  $\delta < \delta_0$  максимальное значение местного потока тепла имеет место на линии растекания и его величина монотонно уменьшается по мере отхода от нее; при  $\delta > \delta_0$  максимальное значение  $q_w$  достигается вне линии растекания, поэтому при отходе от нее величина местного потока тепла сначала возрастает, достигает максимума, а затем уменьшается.

В связи с таким характером распределения теплового потока возникает вопрос о выборе тела с минимальным значением максимального потока тепла в его поперечном сечении.

Для определения оптимальных значений коэффициента эллиптичности  $\delta_{\text{opt}}$  имеются данные при трех значениях  $\delta$ , равных 1, 2 и 3. Изменение максимального потока

тепла в поперечном сечении тела в зависимости от  $\delta$  аппроксимировалось выражением с выполнением предельных случаев

$$\begin{aligned} (\lim q_m^* &= \infty, \text{ когда } \delta \rightarrow 0 \text{ или } \delta \rightarrow \infty) \\ q_{\max}^{*(\delta)} &= \frac{a + b\delta + c\delta^2}{\delta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

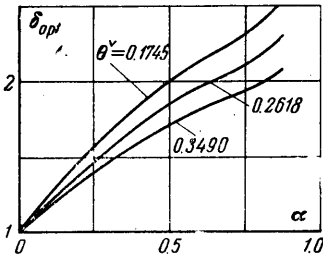
Если  $a, b, c$  выразить через известные значения  $q_{\max}^{*(\delta)}$  ( $\delta = 1, 2, 3$ ), то

$$\delta_{\text{opt}} = \left\{ \frac{6(q_{\max}^{*(3)} - 2q_{\max}^{*(2)} + q_{\max}^{*(1)})}{3q_{\max}^{*(3)} - 4q_{\max}^{*(2)} + q_{\max}^{*(1)}} \right\}^{1/2} \quad (3.2)$$

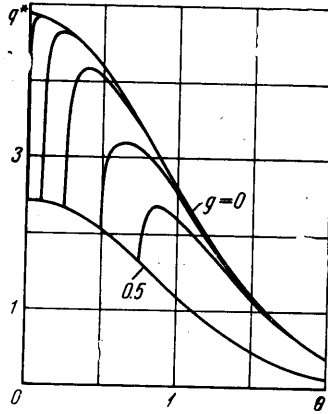
Вычисленные по формуле (3.2) оптимальные значения коэффициента эллиптичности  $\delta_{\text{opt}}$  приведены на фиг. 4 в зависимости от угла атаки  $\alpha$  при числе Маха  $M_\infty = 7$  и полууглах раствора конуса  $\theta^* = 0.1745, 0.2618, 0.3490$ . При увеличении угла атаки и уменьшении полуугла раствора оптимальный режим смещается в сторону больших значений коэффициента эллиптичности.

4. Влияние вдува однородного газа на поведение пограничного слоя исследовалось на примере эллиптических конусов с полууглом раствора  $\theta^* = 0.2618$ , обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при числе Маха  $M_\infty = 7$ . Рассматривался автомоделный случай, когда параметр вдува

$$g = \frac{\rho_w w_w}{\rho_e u_e} \left[ \frac{\rho_e u_e r}{\mu_e} \left( 2 + \frac{1}{u_e \psi} \frac{dv_e}{d\theta} \right)^{-1} \right]^{1/2}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

оставался постоянным на всей или на части поверхности тела. В этом случае расход вдуваемого газа вдоль образующей конуса изменяется по гиперболическому закону, а в окружном направлении — примерно пропорционально местному потоку тепла.

При наличии вдува газа величина местного потока тепла на линии растекания уменьшается по сравнению с его значением на непроницаемой поверхности (фиг. 5). С увеличением угла атаки эффективность вдува несколько уменьшается; это связано с усилением вторичного течения и увеличением перетекания массы газа в поперечном направлении. О количественной стороне влияния вдува можно судить по приведенным ниже данным ( $\delta = 1, q^* = q_w(g) / q_w(0)$ ).

$g = 0$	0.25	0.50	0.75	
$q^* = 1$	0.724	0.481	0.323	$\alpha = 30^\circ (0.5230)$
$q^* = 1$	0.740	0.509	0.337	$\alpha = 50^\circ (0.8737)$

При заданных условиях обтекания и заданном значении параметра вдува увеличение коэффициента эллиптичности  $\delta$  приводит к некоторому усилению эффективности вдува на линии растекания. Приведем результаты расчетов для частного случая  $\alpha = 0.8737, g = 0.5$ :

$\delta = 1$	2	3
$q^* = 0.509$	0.489	0.480

При наличии вдува газа на всей поверхности характер распределения в поперечном сечении тела остается примерно таким же, как и на непроницаемой поверхности, но при этом несколько уменьшается его неравномерность (фиг. 5).

Если вдув газа осуществляется на конечном участке ( $g \neq 0$  при  $\theta \leq \theta_*$ ), то на участке вдува величина местного потока тепла уменьшается соответственно расходу подводимого газа, а при  $\theta > \theta_*$  она вначале резко возрастает, достигая максимума, а затем постепенно приближается к зависимости, соответствующей течению газа на

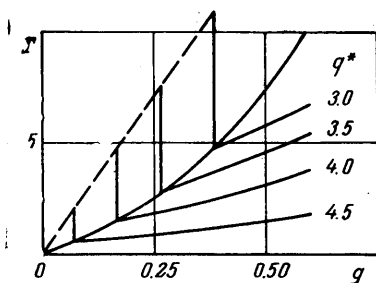
непроницаемой поверхности (фиг. 5). При вдуве газа на сравнительно небольшом участке поверхности зависимость  $q^*$  от  $\theta$  почти сразу же после достижения локального максимума сливается с кривой, соответствующей параметру  $g = 0$ . Следовательно, в этом случае весь запас «холода» вдуваемого газа тратится фактически на снижение максимального потока тепла в поперечном сечении тела, хотя само это максимальное значение мало отличается от его максимума при отсутствии вдува.

При увеличении участка вдува происходит снижение максимального потока тепла, а соответствующие зависимости сливаются друг с другом на значительном расстоянии от точки расположения  $q^*_{\max}$ ; в этом случае запас «холода» вдуваемой массы газа идет как на уменьшение  $q^*_{\max}$ , так и на снижение тепловых потоков в области, где  $q^* < q^*_{\max}$ . Следовательно, в последнем случае использование хладагента происходит нерационально: чем больше участок вдува, тем менее рационально используется хладагент. При заданном значении параметра  $g$  оптимальный режим по использованию вдуваемой массы газа имеет место, когда выполняется соотношение

$$q^*_{\max}|_{\theta>\theta_*} = q^*_{\max}|_{\theta<\theta_*} \quad (4.1)$$

При дальнейшем увеличении участка вдува ( $\theta_* > \theta_{* \text{ опт}}$ ) локальный максимум местного потока тепла при  $\theta > \theta_*$  меньше его значения на участке вдува.

Оптимальный характер режима вдува, удовлетворяющего условию (4.1), особенно наглядно проявляется, если построить зависимость суммарного расхода газа



Фиг. 6

$$\Gamma = \frac{1}{\rho_{\infty} u_{\infty} R_0^2} \left( \frac{\rho_{\infty} u_{\infty} R_0}{\mu_{\infty}} \right)^{1/2} \iint_F \rho_w w_w dF$$

от параметра  $g$  при фиксированном значении максимального потока тепла в поперечном сечении конуса. (Здесь  $R_0$  — радиус миделевого сечения острого кругового конуса.) В качестве примера такие зависимости приведены на фиг. 6 для частного случая:  $\delta = 1$ ,  $\alpha = 40^\circ$  (0.6981).

При фиксированной величине максимального потока тепла зависимость суммарного расхода газа от параметра  $g$  имеет две ветви. Вертикальная ветвь соответствует случаю, когда максимум теплового потока имеет место на линии растекания, и ограничена сверху величиной расхода газа при наличии вдува на всей омываемой поверхности конуса. Нижнее значение этой ветви определяется режимом вдува на конечном участке при выполнении условия (4.1). Правая ветвь соответствует вдуву газа на конечном участке, когда максимум теплового потока располагается вне линии растекания за участком вдува. На фиг. 6 точки для оптимальных режимов вдува соединены сплошной линией.

Отметим, что при больших расходах вдуваемого газа расчет уравнений пограничного слоя проводится не до конца интервала изменения переменной  $\theta$ , что обусловлено появлением в потоке слишком низких и отрицательных температур — нечто вроде «тепловой» кавитации. Очень низкие температуры газа в пограничном слое при наличии вдува гелия на поверхности сферы были получены при расчетах в работе [6],

Поступило 10 VI 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
2. Базжин А. П., Челышева И. Ф. Применение метода прямых к расчету обтекания конических тел при больших углах атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, стр. 119—123.
3. Веденская Н. Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 304—312.
4. Башкин В. А. Расчет уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя методом интегральных соотношений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 6.
5. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Селиверстов С. Н. Расчет ламинарного пограничного слоя на сфере с подводом гелия в качестве охладителя. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.