

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЛЬТЕРРА К РАСЧЕТУ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ ВРАЩЕНИЯ И КРЫЛЬЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Н. МИХАЙЛОВ (Москва)

Применяется метод Вольтерра для расчета интерференции между телами вращения и крыльями. Получающееся интегро-дифференциальное уравнение решается численно. В качестве примера приводятся результаты расчета обтекания бесконечного цилиндра с установленными на нем треугольными крыльями.

Формула Вольтерра [1] дает решение волнового уравнения, когда заданы начальные условия на плоскости, перпендикулярной оси времени. С. В. Фалькович [2] применил метод Вольтерра для решения задачи об обтекании сверхзвуковым потоком тонкого крыла, при этом граничные условия задавались на плоскости, параллельной оси времени. А. И. Уткин использовал этот метод для задач, в которых граничные условия заданы на цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси времени [3]. В этом случае при помощи метода Вольтерра трехмерные задачи для волнового уравнения сводятся к двумерным интегро-дифференциальным уравнениям.

1. В линейной постановке трехмерные задачи аэродинамики сводятся к решению волнового уравнения

$$(1 - M_\infty^2)\Phi_{x,x'} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad (1.1)$$

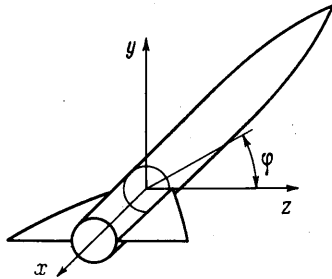
Здесь x', y, z — прямоугольные координаты, ось x' направлена по потоку, M_∞ — число Маха на бесконечности, Φ — потенциал скоростей возмущенного течения.

Как известно, подстановкой $x' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} x$ уравнение (1.1) приводится к виду

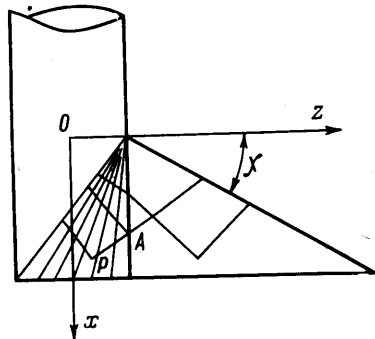
$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} = 0 \quad (1.2)$$

Пусть на цилиндрическом участке тела вращения установлено крыло в плоскости, проходящей через ось симметрии (фиг. 1). Скорость набегающего потока такова, что передние и задние кромки являются сверхзвуковыми.

Если потенциал обтекания изолированного тела вращения известен, то рассматриваемая задача может быть сведена к нахождению решения волнового уравнения (1.2) с граничными условиями $\partial\Phi/\partial y = f(x, z)$ при $y = 0$ на крыле, $\partial\Phi/\partial n = 0$ на цилиндре, $\Phi = 0$ на характеристической поверхности, проходящей через переднюю кромку крыла.



Фиг. 1



Фиг. 2

Возьмем точку $P(x_n, y_n, z_n)$ на поверхности цилиндра или на крыле. Характеристический конус с вершиной в этой точке вырежет на цилиндре область Σ^+ и на крыле — область S (фиг. 2). Применяя формулу Вольтерра [1], получим

$$\Phi(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \int \int_{\Sigma^+ + S} \left(\Phi \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right) d\sigma \quad (1.3)$$

Здесь N — конормаль к поверхности интегрирования

$$v = \lg \frac{x_n - x + \sqrt{(x_n - x)^2 - R^2}}{R}, \quad R = \sqrt{(y - y_n)^2 + (z - z_n)^2}$$

На цилиндре и на крыле величина $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial N$ известна из граничных условий, поэтому второй член в подынтегральном выражении (1.3) известен. Обозначим потенциал на крыле индексом 1 и на цилиндре индексом 2. На крыле имеем

$$\partial v / \partial N = -\partial v / \partial y = 0 \quad \text{при } y = y_0 = 0$$

и уравнение (1.3) принимает вид

$$\Phi_1(x_n, 0, z_n) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\iint_{x^+} \Phi_2 \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma - \iint_s v \frac{\partial\Phi}{\partial N} d\sigma \right] \quad (1.4)$$

Таким образом, если потенциал на цилиндре найден, то потенциал на крыле определяется путем квадратур.

Из уравнения (1.3) получаем для потенциала на цилиндре выражение

$$\Phi_2(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\iint_{x^+} \Phi_2 \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma + \iint_s \Phi_1 \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma - \iint_s v \frac{\partial\Phi}{\partial N} d\sigma \right] \quad (1.5)$$

Исключим функцию Φ_1 в правой части уравнения (1.5) при помощи преобразования, которое было применено в работе [2]. Возьмем точку $P^-(x_n, -y_n, z_n)$ симметрично точке P относительно плоскости $y = 0$. Характеристический конус с вершиной в этой точке вырежет в плоскости $y = 0$ опять область S и на характеристической поверхности, проходящей через переднюю кромку крыла, область Q . Эти три поверхности вместе с боковой поверхностью D характеристического конуса образуют замкнутую область T . Применяя в этой области к функции Φ и $v^- = v(x_n, -y_n, z_n)$ теорему Грина [4], получим

$$\iint_{D+Q+S^-+S} \left(\Phi \frac{\partial v^-}{\partial N} - v^- \frac{\partial\Phi}{\partial N} \right) d\sigma = 0 \quad (1.6)$$

На характеристической поверхности конормаль направлена по касательной, поэтому $\Phi = \partial\Phi/\partial N = 0$ на поверхности Q в силу граничных условий. На боковой поверхности характеристического конуса $v^- = \partial v^-/\partial N = 0$. Вследствие этого интегралы по поверхностям Q и D в уравнении (1.6) исчезают. На плоскости $y = 0$ имеем

$$\partial v / \partial N = -\partial v^- / \partial N, \quad v = v^-$$

поэтому сложив (1.6) и (1.5), получим

$$\Phi_2(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\iint_{x^+} \Phi_2 \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma + \iint_{x^-} \Phi_2 \frac{\partial v^-}{\partial N} d\sigma - 2 \iint_s \frac{\partial\Phi}{\partial N} v d\sigma \right] \quad (1.7)$$

В этом уравнении в правой части под интегралом уже не содержится потенциала крыла, что значительно упрощает задачу.

2. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат x, r, φ (фиг. 1)

$$z = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (2.1)$$

На цилиндрической поверхности $r = r_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial N} &= -\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{x_n - x}{2r_0 g(x, \varphi)} & g(x, \varphi) &= \left[(x_n - x)^2 - 4r_0^2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right]^{1/2} \\ \frac{\partial v^-}{\partial N} &= -\frac{\partial v^-}{\partial r} = \frac{x_n - x}{2r_0 g^-(x, \varphi)}, & g^-(x, \varphi) &= \left[(x_n - x)^2 - 4r_0^2 \sin^2 \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь x_n, r_0 — координаты точки P в цилиндрических координатах.

Характеристический конус, выходящий из точки P пересекает цилиндр по линиям, которые определяются уравнениями

$$\varphi = \varphi_0 + 2 \arcsin \frac{x_n - x}{2r_0}, \quad \varphi = \varphi_0 - 2 \arcsin \frac{x_n - x}{2r_0}$$

и характеристический конус с вершиной в точке P^- имеет линию пересечения с цилиндром

$$\varphi = -\varphi_0 + 2 \arcsin \frac{x_n - x}{2r_0}$$

Эти кривые ограничивают области интегрирования на цилиндре. Введем обозначение

$$F = \int_{\Sigma^+} \Phi_2 \frac{\partial v}{\partial r} d\sigma + \int_{\Sigma^-} \Phi_2 \frac{\partial v^-}{\partial r} d\sigma \quad (2.3)$$

Запишем пределы интегрирования в явной форме

$$F(x_n, \varphi_0) = - \int_0^{x_1} dx \int_0^{\varphi_0 + \varphi_*} \Phi_2 \frac{(x_n - x) d\varphi}{2g(x, \varphi)} - \int_{x_1}^{x_n} dx \int_{\varphi_0 - \varphi_*}^{\varphi_0 + \varphi_*} \Phi_2 \frac{(x_n - x) d\varphi}{2g(x, \varphi)} - \int_0^{x_1} dx \int_0^{-\varphi_0 + \varphi_*} \Phi_2 \frac{(x_n - x) dx}{2g^-(x, \varphi)}$$

$$\varphi_* = 2 \arcsin \frac{x_n - x}{2r_0}$$

Здесь x_1 — координата x точки A (фиг. 2).

Заменяем переменную φ в первых двух интегралах и в последнем интеграле соответственно по формулам

$$\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \frac{x_n - x}{2r_0} \sin \theta, \quad \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} = \frac{x_n - x}{2r_0} \sin \theta \quad (2.4)$$

В результате получим

$$F = - \int_0^{x_1} dx \int_{-\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \Phi_2 \frac{(x_n - x) d\theta}{\psi(x, \theta)} - \int_{x_1}^{x_n} dx \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \Phi_2 \frac{(x_n - x) d\theta}{\psi(x, \theta)} - \int_0^{x_1} dx \int_{-\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \Phi_2 \frac{(x_n - x) d\theta}{\psi(x, \theta)}$$

$$\psi(x, \theta) = [4r_0^2 - (x_n - x)^2 \sin^2 \theta]^{1/2}$$

$$\theta_* = - \arcsin \left(\frac{x_n - x}{2r_0} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (2.5)$$

Дифференцируя это равенство по x_n будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = - \int_0^{x_1} dx \int_{\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} - \int_{x_1}^{x_n} dx \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} - \int_0^{x_1} dx \int_{-\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\Omega = \Phi_2 + \frac{(x_n - x)^2 \Phi_2}{\psi(x, \theta)} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \frac{2(x_n - x) \sin \theta}{\psi(x, \theta)}$$

причем φ связано с θ по формулам (2.4). После подстановки (2.6) в уравнение (1.7) последнее может быть представлено в следующей форме:

$$\Phi_2(x_n, \varphi_0) = \Phi_0 - \int_0^{x_n} G(x, x_n, \varphi_0) dx, \quad \Phi_0 = - \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \int_S v \frac{\partial \Phi}{\partial N} d\sigma$$

$$G = \int_{\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} + \int_{-\theta_*}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} \quad (X < X_1) \quad (2.7)$$

$$G = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Omega d\theta}{\psi(x, \theta)} \quad (X \geq X_1)$$

Если в выражении для Φ_0 произвести дифференцирование под знаком интеграла, то получим

$$\Phi_0(x_n, \varphi_0) = - \frac{2}{\pi} \int_S \int \frac{\partial \Phi}{\partial N} \frac{d\sigma}{\sqrt{(x_n - x)^2 - y_n^2 - (z - z_n)^2}} \quad (2.8)$$

Функция Φ_0 будет, по существу, потенциалом обтекания изолированного крыла.

Укажем путь для численного решения уравнения (2.7). Представим интеграл в уравнении (2.7) в виде многочлена по какой-нибудь формуле численного интегрирования

$$\int_0^{x_n} G(x_i, x_n, \varphi_0) dx = h \sum_{i=0}^n A_i G(x_i, x_n, \varphi_0) \quad (2.9)$$

Здесь $x_i = ih$, а A_i — постоянные коэффициенты, зависящие от способа численного интегрирования.

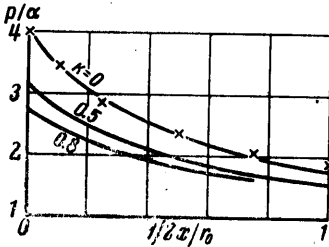
При $x_i = x_n$ имеем $G(x_n, x_n, \varphi_0) = -\pi\Phi_2(x_n, \varphi_0)$. Подставим выражение (2.9) в уравнение (2.7) и найдем из него

$$\Phi_2(x_n, \varphi_0) = \frac{1}{1 + A_n h} \left[\sum_{i=0}^{n-1} A_i G(x_i, x_n, \varphi_0) + \Phi_0(x_n, \varphi_0) \right] \quad (2.10)$$

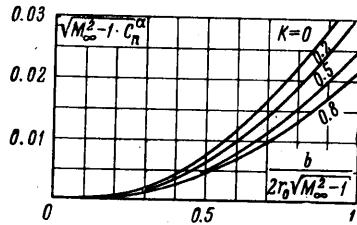
Заметим теперь, что при $x_i = 0$ имеем $G = 0$; поэтому если $n = 1$, то

$$\Phi_2(h, \varphi_0) = \frac{1}{1 + A_1 h} \Phi_0(h, \varphi_0)$$

т. е. потенциал Φ_2 в сечении $x = h$ выражается через известную функцию и может быть вычислен. После этого функцию Φ можно определить по формуле (2.10) уже в следующем сечении $x = 2h$ и т. д., так как для вычисления правой части (2.10) необходимо знать потенциал Φ_2 только в предыдущих сечениях.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. В качестве примера рассмотрим обтекание полубесконечного цилиндра, на котором в плоскости $y = 0$ установлены крылья нулевой толщины. Цилиндр и крылья наклонены под углом α к набегающему потоку. В этом случае граничные условия для потенциала Φ будут иметь вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ на цилиндре,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\alpha V_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{z^2} \right) \text{ на крыле} \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.9) и интегрируя по x , получим

$$\Phi_0(x_n, \varphi_0) = \frac{2\alpha V_\infty}{\pi} \int_{r_0}^{z_1} \left(1 + \frac{r_0^2}{z^2} \right) \lg \left[\frac{x_n - K(z - r_0) - \sqrt{[x_n - K(z - r_0)]^2 - R^2}}{R} \right]$$

где R и z_1 определяются уравнениями

$$R = [r_0^2 - 2r_0 \cos \varphi_0 z + z^2]^{1/2}, \quad (x_0 - Kz_1)^2 - (r_0 - z_1)^2 - y_0^2 = 0, \quad K = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Функция Φ_0 вычислялась путем численного интегрирования. В окрестности точки пересечения передней кромки крыла с цилиндром течение будет мало отличаться от конического, поэтому в сечениях $x = \text{const}$, близких к этой точке, производная $\partial \Phi_2 / \partial \varphi$ будет стремиться к бесконечности. Учитывая это, проведем на поверхности цилиндра линии, уравнения которых зададим в виде

$$\varphi_j(X) = \frac{j}{l} \frac{X}{r_0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, l$$

Эти кривые разбивают по углу φ область возмущенного течения на l равных интервалов. Потенциал Φ_2 будем искать в точках пересечения линий φ_j с сечениями $x = ih$. Тогда функция Φ_2 определяется с равномерной точностью во всей области.

На ЭЦВМ были проведены расчеты параметров течения для различных углов χ стреловидности крыльев. На фиг. 3 показано изменение коэффициента давления вдоль хорды крыла $z_0 = r_0$. Расчеты проводились при $l = 10$ и $h = 0.05$. Дальнейшее увеличение l или уменьшение h не изменяет результатов расчета с точностью до 0.1%. Для сравнения на фиг. 3 приведено распределение давления вдоль хорды, полученное для случая $\chi = 0$ методом разложения в ряды Фурье [4].

На фиг. 4 приведена величина C_n^α производной нормальной силы по углу атаки цилиндра с крыльями различной длины хорды крыла b . Коэффициент C_n^α отнесен к площади πr_0^2 . Увеличение стреловидности крыла уменьшает подъемную силу цилиндрической части. Величина C_n^α на фиг. 4 дана для случая интерференции цилиндра с двумя треугольными крыльями.

Приведенный пример расчета показывает, что метод Вольтерра может с успехом применяться для решения сложных линейных задач. Следует отметить, что этот метод имеет ряд преимуществ перед методом разложения решения в ряды, так как он дает сразу точное решение и его можно применять для более широкого круга цилиндрических поверхностей.

Автор благодарит А. И. Уткина за полезные советы.

Поступило 2 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа. М., Гостехиздат, 1933, ч. 1, т. 3.
2. Фалькович С. В. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
3. Уткин А. И. Применение интеграла Вольтерра к задаче обтекания цилиндрической поверхности со сверхзвуковыми кромками. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
4. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 362—418.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОБМЕНА НА ОСТРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОНУСАХ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

В. А. БАШКИН

(Москва)

Семейство острых эллиптических конусов представляет собой один из наиболее простых классов пространственных тел и характеризуется двумя параметрами, в качестве которых можно принять следующие: 1) коэффициент эллиптичности $\delta = b/a$, где a и b — малая и большая полуоси эллипса соответственно, и 2) полуугол раствора конуса θ° в плоскости большой полуоси. В качестве частных случаев это семейство тел включает в себя острый круговой конус ($\delta = 1$) и плоское треугольное крыло с острыми передними кромками ($\delta = \infty$).

При сверхзвуковых скоростях и углах атаки, меньших предельного, течение сжимаемого газа вокруг эллиптических конусов является коническим, что значительно упрощает численный расчет поля течения. Конический характер невязкого потока обуславливает некоторые особенности течения сжимаемого газа в пространственном ламинарном пограничном слое, благодаря которым численное интегрирование уравнений пограничного слоя сводится к двумерной задаче.

Теоретическому исследованию обтекания острых эллиптических конусов сверхзвуковым потоком газа посвящен ряд работ. В большинстве из них излагается лишь метод расчета и приводятся в виде графиков некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие возможности предложенного метода. Результаты систематических расчетов полей течений вокруг эллиптических конусов в некотором диапазоне изменения характеристик параметров приведены в работах [1, 2].

Развитие ламинарного пограничного слоя на поверхности острых круговых конусов, обтекаемых потоком совершенного газа при сверхзвуковых скоростях и малых углах атаки $\alpha < \theta^\circ$ исследовалось в работах Н. Д. Введенской [3] и Р. М. Копятевича; последним было рассмотрено также влияние вдува однородного газа. При проведении расчетов использовались данные работы [1].

Ниже приведены результаты численного интегрирования уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на острых эллиптических конусах, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при больших углах атаки $\alpha > \theta^\circ$. При решении задачи параметры невязкого потока заимствовались из работы [2].

1. Если для решения задачи воспользоваться переменными Крокко, то система уравнений, описывающая течение сжимаемого газа в пространственном ламинарном