

К КИНЕТИКЕ ДЕФОРМАЦИИ И ДРОБЛЕНИЯ ЖИДКОЙ КАПЛИ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

К. А. ГОРДИН, А. Г. ИСТРАТОВ, В. Б. ЛИБРОВИЧ

(Москва)

В теоретических исследованиях распада жидкой капли, обдуваемой потоком газа [1-10], можно выделить два различных подхода к решению задачи. В одном из них дробление рассматривается как следствие неустойчивости сферической формы капли в потоке газа — возрастание во времени бесконечно малых возмущений на ее поверхности экстраполируется до полного разделения капли на части (идея этого метода восходит к Рэлею [11]). При другом подходе рассматривается стационарное деформированное (отличное от сферического) состояние капли, соответствующее аэродинамическим силам, которые возникают при обтекании капли газом, и устанавливаются условия, при которых равновесие становится невозможным. При этом ввиду трудностей определения точной формы деформированной капли применяется либо приближенный метод решения задачи, при котором форма капли задается априори как функция параметра, подлежащего определению, либо используются полуколичественные соотношения, основанные на теории размерности и на общих соображениях.

Относительно первого подхода следует сделать замечание. Оно касается самой постановки задачи с использованием метода малых возмущений для определения критического числа Вебера дробления капли. (Число Вебера $W = (\rho_1 U^2 d) / \sigma$, где ρ_1 — плотность газа, U — относительная скорость движения газа и капли, d — диаметр капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения, характеризует соотношение аэродинамических сил и сил поверхностного натяжения.) При точной постановке задачи малые возмущения необходимо рассматривать относительно равновесной формы капли, соответствующей условиям обтекания капли потоком газа. Если сферическая форма капли принята за исходную, то это должно привести к проявлению неустойчивости при любых числах Вебера, так как в потоке сферическая капля обязательно будет деформироваться; при этом либо она примет равновесную форму, либо ее деформация будет настолько большой, что произойдет дробление. Этот факт не учитывался в работах [4-6]. Оценка критического числа Вебера, полученная в других работах [1-3], основана на неправомерной экстраполяции полученных в линейном приближении результатов на нелинейные деформации капли и на привлечении в качестве критерия дробления приближенных дополнительных условий. (Например, в работе [3] таким условием было условие равенства амплитуды колебаний поверхности капли ее радиусу.) Замечание, подобное приведенному, сделано в работе [10].

Деформацию и дробление капли в потоке вызывают аэродинамические силы, возникающие при обтекании капли (избыток давления в лобовой части капли по сравнению с давлением на ее боках), которые в первом приближении могут быть рассчитаны в предположении квазистационарного течения идеального газа.

1) Предположение о квазистационарности течения оправдано [11], если характерное время движения частицы газа вблизи поверхности капли $\tau_m = d / U$ на много меньше характерного времени свободных колебаний капли $\tau_v = \frac{1}{2} d \sqrt{\rho_2 d} / \sigma$ и характерного времени деформации τ_d , которое можно получить из соотношения, отражающего закон Ньютона

$$\rho_2 \frac{\pi d^3}{6} \frac{d}{\tau_d^2} \approx \frac{\rho_1 U^2 \pi d^2}{2 \cdot 4}, \quad \tau_d = \frac{d}{U} \left(\frac{4}{3} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \quad (\rho_2 - \text{плотность жидкости})$$

Из первого условия вытекает требование, чтобы число Вебера было не слишком мало

$$W \gg \frac{64 \rho_1}{\rho_2}$$

Второе условие $\tau_m \ll \tau_d$ выполняется автоматически, поскольку плотность жидкости на много больше плотности газа. Кроме того, для выполнения условия квазистационарности при движении капли относительно газа с переменной скоростью, необходимо, чтобы характерное время изменения скорости было намного меньше τ_m .

2) Существенное допущение принимается ниже относительно вида течения газа вблизи капли — течение предполагается безотрывным, т. е. с симметричным относительно плоскости, перпендикулярной потоку, распределением давления газа у поверхности капли. В действительности, экспериментальные исследования [13-16] показывают несимметричную форму деформированной капли, что свидетельствует о срыве струй газа в задней части капли.

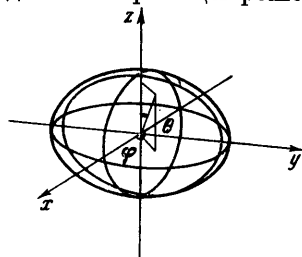
Это обстоятельство, вызывающее дополнительные трудности при теоретическом решении задачи, в данной работе не рассматривается.

Работа аэродинамических сил при деформации расходуется на увеличение поверхностной энергии капли, вязкую диссипацию энергии в капле и кинетическую энергию внутреннего движения жидкости. Этот закон сохранения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} (E + \Pi) + \Phi = \int_S p(t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (1)$$

Здесь E , Π — кинетическая и поверхностная энергия капли, Φ — скорость диссипации энергии за счет вязкости, $p(t)$ — давление в газе у поверхности капли, \mathbf{v} — вектор скорости деформации элемента поверхности капли, \mathbf{n} — внутренняя нормаль к поверхности капли S .

Чтобы использовать энергетическое соотношение (1), для точного решения задачи необходимо иметь решение динамических уравнений движения жидкости внутри капли, сопряженное с решением задачи об обтекании деформированной капли потоком газа, из которого также должна следовать и форма капли с соответствующей ей поверхностной энергией. Содержащаяся в такой постановке операция определения границы решений уравнений, как уже говорилось, сильно осложняет задачу. Поэтому целесообразно использовать при ее решении приближенный метод. Основное приближение предлагающегося метода, как и в работе [10], заключается в задании *априори* формы капли. Именно примем, что в течение всего процесса деформации капля имеет форму сфероида (эллипсоида вращения). (Такая форма капли совпадает с точно определенной формой при малых деформациях; приближение заключается в распространении этой формы на конечные деформации.) На фиг. 1 изображен сфероид, сплюснутый в направлении скорости газа на бесконечности U (вдоль оси z). (В некоторых случаях капля может иметь форму и вытянутого сфероида.) На фигуре также помечены декартовы координаты x , y , z и углы θ и φ сфероидальной системы координат, используемые в дальнейших вычислениях. Длины полуосей сфероида (обозначаемые ниже через a и b ; a — в плоскости, перпендикулярной направлению потока, b — параллельно скорости набегающего потока) — являются функциями времени в процессе деформации. Между ними имеется связь, вытекающая из условия равенства объема сфероида объему первоначальной сферической капли: $a^2 b = R^3$ ($R = \frac{1}{2}d$ — радиус сферической капли).



Фиг. 1

В дальнейшем будем предполагать, что вначале капля полностью увлекается газовым потоком (полного увлечения в действительности не бывает: для того чтобы газ воздействовал на каплю, его скорость должна отличаться от скорости капли), вихревое движение в капле (например, вихри Хилла [12]) отсутствует и вязкость жидкости равна нулю. В случае резкого изменения характера течения (например, поток проходит через

ударную волну [17]) на каплю начинают действовать аэродинамические силы, приводящие к ее деформации. В случае деформаций, при которых форма капли близка сфероиду, течение в капле можно считать потенциальным. Предполагая форму капли в виде сфероида, в случае деформаций капли, течение в ней, обусловленное одной чистой деформацией, будет безвихревым (вихревое движение может возникать при диффузии завихренности от поверхности внутрь капли, которая для невязкой жидкости отсутствует).

Определим в капле поле скоростей из условия, что при деформации масса жидкости, содержащаяся в любой коаксиальной сфере внутри сферической капли, остается в соответствующем этой сфере сфероиде:

$$v_x = -\frac{R \dot{b}}{2b}x, \quad v_y = -\frac{R \dot{b}}{2b}y, \quad v_z = R \frac{\dot{b}}{b}z \quad \left(\dot{b} \equiv \frac{db}{dt} \right) \quad (2)$$

Уравнение неразрывности для поля скоростей (2) удовлетворяется автоматически. Решение задачи удобнее проводить в сферических координатах (μ, θ, φ) . Они связаны с декартовыми (x, y, z) (фиг. 1) соотношениями:

Для сплюснутого эллипсоида ($a > b$)

$$x = r_+ \operatorname{ch} \mu \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r_+ \operatorname{ch} \mu \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r_+ \operatorname{sh} \mu \cos \theta \quad (3)$$

Для вытянутого ($a < b$)

$$x = r_- \operatorname{sh} \mu \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r_- \operatorname{sh} \mu \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r_- \operatorname{ch} \mu \cos \theta$$

Здесь r_+ и r_- — константы, равные полурасстоянию между фокусами сфероида, поверхность которого является координатной поверхностью $\mu_{\pm} = M_{\pm}$, причем

$$\operatorname{th}^2 M_+ = \frac{b^2}{a^2}, \quad r_+ = \frac{a}{\operatorname{ch} M_+}, \quad \operatorname{th}^2 M_- = \frac{a^2}{b^2}, \quad r_- = \frac{a}{\operatorname{sh} M_-} \quad (4)$$

Для вычисления работы деформации капли, производимой внешними аэродинамическими силами, воспользуемся решением задачи об обтекании сфероида стационарным потоком идеального несжимаемого газа [12].

Потенциал скорости газа, согласно этому решению, равен для сплюснутого сфероида ($a > b$)

$$\psi_+ = U r_+ \operatorname{sh} \mu \cos \theta \left(1 + \frac{(1/\operatorname{sh} \mu) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/\operatorname{sh} \mu)}{\operatorname{arc} \operatorname{sin}(1/\operatorname{ch} M_+) - (\operatorname{sh} M_+/\operatorname{ch}^2 M_+)} \right) \quad (5)$$

для вытянутого ($a < b$)

$$\psi_- = U r_- \operatorname{ch} \mu \cos \theta \left(1 + \frac{(1/\operatorname{ch} \mu) - \operatorname{Ar} \operatorname{th}(1/\operatorname{ch} \mu)}{\operatorname{Ar} \operatorname{th}(1/\operatorname{ch} M_-) - (\operatorname{ch} M_-/\operatorname{sh}^2 M_-)} \right) \quad (6)$$

Компоненты скорости газа

$$\begin{aligned} v_{\mu}^+ &= -\frac{1}{r_+(\cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \mu)^{1/2}} \frac{\partial \psi_+}{\partial \mu}, & v_{\theta}^+ &= -\frac{1}{r_+(\cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \mu)^{1/2}} \frac{\partial \psi_+}{\partial \theta} \\ v_{\varphi}^+ &= -\frac{1}{r_+ \sin \theta \operatorname{ch} \mu} \frac{\partial \psi_+}{\partial \varphi} \\ v_{\mu}^- &= -\frac{1}{r_-(\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \mu)^{1/2}} \frac{\partial \psi_-}{\partial \mu}, & v_{\theta}^- &= -\frac{1}{r_-(\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \mu)^{1/2}} \frac{\partial \psi_-}{\partial \theta} \\ v_{\varphi}^- &= -\frac{1}{r_- \sin \theta \operatorname{sh} \mu} \frac{\partial \psi_-}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

рассчитанные на поверхности сфероида ($\mu_{\pm} = M_{\pm}$), равны, соответственно

$$\begin{aligned}
 v_{\varphi}^{+} &= v_{\mu}^{+} = 0 \\
 v_{\theta}^{+} &= \frac{U \operatorname{sh} M_{+} \sin \theta}{(\operatorname{sh}^2 M_{+} + \cos^2 \theta)^{1/2}} \left[1 - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/\operatorname{sh} M_{+}) - (1/\operatorname{sh} M_{+})}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/\operatorname{sh} M_{+}) - (\operatorname{sh} M_{+}/\operatorname{ch}^2 M_{+})} \right] \\
 v_{\varphi}^{-} &= v_{\mu}^{-} = 0 \\
 v_{\theta}^{-} &= \frac{U \operatorname{ch} M_{-} \sin \theta}{(\operatorname{sh}^2 M_{-} + \sin^2 \theta)^{1/2}} \left[1 - \frac{\operatorname{Ar} \operatorname{th} (1/\operatorname{ch} M_{-}) - (1/\operatorname{ch} M_{-})}{\operatorname{Ar} \operatorname{th} (1/\operatorname{ch} M_{-}) - (\operatorname{ch} M_{-}/\operatorname{sh}^2 M_{-})} \right]
 \end{aligned} \quad (8)$$

Распределения давления при $\mu_{\pm} = M_{\pm}$ находим из закона Бернулли:

$$\begin{aligned}
 &\frac{P_{+} - P_0}{1/2 \rho_1 U^2} = \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\operatorname{ch}^4 M_{+} (\cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 M_{+}) [\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/\operatorname{sh} M_{+}) - (\operatorname{sh} M_{+}/\operatorname{ch}^2 M_{+})]^2} \\
 &\frac{P_{-} - P_0}{1/2 \rho_1 U^2} = \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\operatorname{sh}^4 M_{-} (\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 M_{-}) [\operatorname{Ar} \operatorname{th} (1/\operatorname{ch} M_{-}) - (\operatorname{ch} M_{-}/\operatorname{sh}^2 M_{-})]^2}
 \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдем теперь к вычислению отдельных членов, входящих в уравнение энергии (1). Для подсчета кинетической энергии E вычислим интеграл по объему сфероида V , являющийся функцией параметра M

$$E = \rho_2 \int_V \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} dV \quad (10)$$

Используя поле скоростей (2) и сфероидальные координаты (3), координатная поверхность которых в данный момент совпадает с поверхностью капли, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{+}}{4\pi R^2 \sigma} &= \frac{8}{135} \operatorname{th}^{1/3} M_{+} \frac{3\operatorname{sh}^2 M_{+} + 1}{\operatorname{ch}^4 M_{+}} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\operatorname{sh} M_{+}} \right)^2 \\
 \frac{E_{-}}{4\pi R^2 \sigma} &= \frac{8}{135} \frac{3\operatorname{ch}^2 M_{-} - 1}{\operatorname{th}^{1/3} M_{-} \operatorname{sh}^4 M_{-}} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\operatorname{ch} M_{-}} \right)^2, \quad \tau = t \left(\frac{\rho_2 R^3}{8\sigma} \right)^{-1/2}
 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь τ — безразмерное время.

Поверхностная энергия капли пропорциональна площади поверхности капли и равна, соответственно

$$\begin{aligned}
 \frac{\Pi_{+}}{4\pi R^2 \sigma} &= \frac{1}{2} \operatorname{th}^{1/3} M_{+} \operatorname{sh} M_{+} \left(\operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{1}{\operatorname{sh} M_{+}} + \frac{\operatorname{ch} M_{+}}{\operatorname{sh}^2 M_{+}} \right) \\
 \frac{\Pi_{-}}{4\pi R^2 \sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} M_{-}}{\operatorname{th}^{1/3} M_{-}} \left(\operatorname{arc} \operatorname{sin} \frac{1}{\operatorname{ch} M_{-}} + \frac{\operatorname{sh} M_{-}}{\operatorname{ch}^2 M_{-}} \right)
 \end{aligned} \quad (12)$$

Скорость диссипации энергии Φ в невязкой жидкости равна нулю.

При вычислении работы деформации рассмотрим три случая.

а) Капля испытывает очень быстрое (импульсное) воздействие; например, капля пересекает поверхность ударной волны.

В этом случае внешнюю силу, совершающую работу над каплей, можно считать δ — функцией времени.

При этом

$$\int_S p(t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = P_0 \delta(t) \quad (13)$$

Интегрирование по времени уравнения (1) приводит к условию сохранения полной энергии системы (кинетической и поверхностной), причем запас энергии равен совершенной над каплей работе и исходной поверхностной энергии сферической капли:

$$\frac{8}{135} \text{th}^{1/3} M_+ \frac{3 \text{sh}^2 M_+ + 1}{\text{ch}^4 M_+} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\text{sh} M_+} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{th}^{1/3} M_+ \text{sh} M_+ \left(\text{Ar sh} \frac{1}{\text{sh} M_+} + \frac{\text{ch} M_+}{\text{sh}^2 M_+} \right) = 1 + \frac{P_0}{4\pi R^2 \sigma} \quad (14)$$

($a > b$)

$$\frac{8}{135} \frac{3 \text{ch}^2 M_- - 1}{\text{th}^{1/3} M_- \text{sh}^4 M_-} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\text{ch} M_-} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\text{ch} M_-}{\text{th}^{1/3} M_-} \left(\text{arc sin} \frac{1}{\text{ch} M_-} + \frac{\text{sh} M_-}{\text{ch}^2 M_-} \right) = 1 + \frac{P_0}{4\pi R^2 \sigma} \quad (a < b)$$

Уравнения (14) описывают незатухающие нелинейные колебания капли около положения равновесия, соответствующего сферической капле. При малых колебаниях $M_{\pm} \rightarrow \infty$, $\text{sch} M_{\pm}$, $\text{csch} M_{\pm} \rightarrow 0$ уравнениям (14) эквивалентно одно уравнение

$$\left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + y^2 = 1 + \frac{P_0}{4\pi R^2 \sigma}, \quad y \approx \frac{e^{-2M}}{2} \approx \frac{2}{\text{sh}^2 M} \approx \frac{2}{\text{ch}^2 M} \quad (15)$$

описывающее гармонические колебания с частотой, равной наименьшей частоте собственных колебаний сферической капли.

Сопоставляя решение уравнения (15) с приведенным в книге [14] решением Рэлея о колебании сферической капли, можно убедиться, что оно тождественно с ним совпадает, если возмущение поверхности капли характеризуется полиномом Лежандра с $n = 2$ (наиболее крупномасштабное возмущение, при котором сохраняется объем капли). Фигурирующая в уравнении (15) величина y связана при этом с относительной амплитудой возмущения поверхности капли χ соотношением $y = -3\chi$.

б) В момент времени $\tau = 0$ капля попадает в поток, обдувающий ее с постоянной скоростью за все время деформации капли ($U = \text{const}$).

В этом случае каждому деформированному состоянию капли однозначно соответствуют постоянные силы давления, так что работа этих сил зависит только от ее деформации. Поэтому можно ввести потенциал аэродинамических сил, который вычислим, интегрируя при $U = \text{const}$ уравнение (1) по времени от момента $\tau = 0$ до τ . Для сплюснутого сфероида

$$\begin{aligned} G_+(M_+) &= \int_0^{\tau} \int_S p(M_+, \theta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS d\tau = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{\infty}^{M_+} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(M_+, \theta) \frac{(1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta}{\text{th} M_+ \text{ch}^2 M_+} d\theta d\varphi dM_+ = \\ &= \frac{\rho_1 U^2}{2} V \int_{\infty}^{M_+} \frac{(1 + 3 \text{sh}^2 M_+) \text{arc tg csch} M_+ - 3 \text{sh} M_+}{\text{sh}^2 M_+ \text{ch}^3 M_+ [\text{arc tg csch} M_+ - \text{sh} M_+ \text{sch} M_+]^2} dM_+ = \\ &= \frac{\rho_1 U^2}{4} V \frac{2 + \text{th}^2 M_+ + 3 \text{sh} M_+ \text{arc tg csch} M_+}{\text{sh} M_+ \text{arc tg csch} M_+ - \text{th}^2 M_+} \quad (V \equiv \frac{4}{3}\pi R^3) \end{aligned} \quad (16)$$

При проведении этих выкладок было использовано выражение для

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \frac{R}{3} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{\text{th}^{1/2} M_+ \text{ch} M_+ (\text{sh}^2 M_+ + \cos^2 \theta)^{1/2}} \frac{dM_+}{d\tau}$$

вычисленное с помощью поля скоростей деформации (2), и выражение для $p(M_+, \theta)$ — формула (9); интеграл по M_+ был вычислен интегрированием по частям.

Аналогично для вытянутого сфероида имеем (здесь будем предполагать, что в момент $\tau = 0$, $\mu_- = M_- \neq \infty$ капля имела форму, отличную от сферической):

$$G_-(M_-) = -\frac{\rho_1 U^2}{4} V \frac{2 + \text{cth}^2 M_- - 3 \text{ch} M_- \text{Ar th sch} M_-}{\text{cth}^2 M_- - \text{ch} M_- \text{Ar th sch} M_-}$$

Здесь использовалась формула (9) и соотношение

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \frac{R}{3} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{\text{th}^{1/2} M_- \text{ch} M_- (\text{sh}^2 M_- + \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{dM_-}{d\tau}$$

В результате энергетическое соотношение (1) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \frac{8}{135} \text{th}^{1/2} M_+ \frac{3 \text{sh}^2 M_+ + 1}{\text{ch}^4 M_+} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\text{sh} M_+} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{th}^{1/2} M_+ \text{sh} M_+ \times \\ & \times \left(\text{Ar sh} \frac{1}{\text{sh} M_+} + \frac{\text{ch} M_+}{\text{sh}^2 M_+} \right) = \frac{W}{24} \frac{2 + \text{th}^2 M_+ + 3 \text{sh} M_+ \text{arc tg csch} M_+}{\text{sh} M_+ \text{arc tg csch} M_+ - \text{th}^2 M_+} + \\ & + 1 + \frac{P_0}{4\pi\sigma R^2} \quad (a > b) \end{aligned} \quad (17)$$

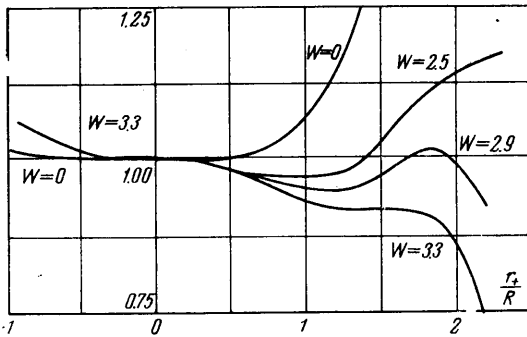
$$\begin{aligned} & \frac{8}{135} \frac{3 \text{ch}^2 M_- - 1}{\text{th}^{1/2} M_- \text{sh}^4 M_-} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\text{ch} M_-} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\text{ch} M_-}{\text{th}^{1/2} M_-} \left(\text{arc sin} \frac{1}{\text{ch} M_-} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{sh} M_-}{\text{ch}^2 M_-} \right) = -\frac{W}{24} \frac{2 + \text{cth}^2 M_- - 3 \text{ch} M_- \text{Ar th sch} M_-}{\text{cth}^2 M_- - \text{ch} M_- \text{Ar th sch} M_-} + \\ & + 1 + \frac{P_0}{4\pi\sigma R^2} \quad (a < b) \end{aligned}$$

Таким образом, деформация капли при ее движении относительно газа с постоянной скоростью описывается уравнением, похожим на уравнение свободных нелинейных колебаний сферической капли, подвергавшейся действию начального импульса, с тем отличием, что эффективная потенциальная энергия деформации составляется не только из поверхностной энергии капли, но и из потенциала внешних аэродинамических сил. На фиг. 2 изображен вид эффективной потенциальной энергии

$$\Sigma = (\Pi_{\pm} - G_{\pm}) / 4\pi R^2 \sigma$$

в зависимости от r_{\pm} / R при разных значениях числа Вебера W . Величина $r_{\pm} = 0$ соответствует сферической капле, величина r_{\pm} / R характеризует степень деформации; при малых деформациях она пропорциональна квадратному корню из амплитуды отклонения капли от сферической.

Характерной особенностью кривых является наличие потенциальной ямы, которая, однако, в отличие от свободных колебаний капли ($W = 0$), для капли в потоке имеет соответствующий равновесию капли минимум, деформированный потоком, и, кроме того, ограничена справа потенциальным горбом. Это означает, что при достаточно больших деформациях



Фиг. 2

и запасах энергии капля не возвратится к устойчивому состоянию, а будет непрерывно деформироваться, пока не раздробится. Величина максимума потенциального барьера зависит от числа Вебера W : при увеличении числа Вебера максимум уменьшается и, наконец, при некотором значении W пропадает совсем. Это число Вебера и соответствует условиям, когда жидкая капля в потоке не может находиться в устойчивом состоянии, даже если она помещена в поток таким образом, что выполняется энергетическое условие равновесия; обязательно возникает непрерывно возрастающая деформация капли.

Если же капля при попадании в поток газа имеет форму, не соответствующую аэродинамическим силам, то дробление ее будет происходить и при меньших числах Вебера. Так, например, при попадании сферической капли при $P_0 = 0$ (не сообщается импульс) в поток газа постоянной скорости, то капля раздробится, если максимум потенциального барьера лежит ниже, чем значение эффективной потенциальной энергии Σ при $r_{\pm}/R = 0$. Если же капле вдобавок сообщается еще некоторый импульс $P_0 \neq 0$, то дробление будет происходить при еще меньших W , так как сообщенной при этом капле энергии будет достаточно, чтобы преодолеть потенциальный барьер с большим максимумом (соответствующий меньшему числу W). На фиг. 3 представлена зависимость W от значения r_{\pm}/R (кривая 1) при котором потенциальная кривая для данного W на фиг. 2 проходит через экстремумы:

$$W \frac{3 \operatorname{sh} M_* / \operatorname{ch}^2 M_* - (1 + 2 \operatorname{th}^2 M_*) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{csch} M_*}{[\operatorname{sh} M_* \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{csch} M_* - \operatorname{th}^2 M_*]^2} = \quad (18)$$

$$= 6 \operatorname{th}^{1/3} M_* \operatorname{ch} M_* \left(\frac{1 + 3 \operatorname{ch}^2 M_*}{3 \operatorname{ch} M_*} \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{1}{\operatorname{sh} M_*} + \frac{1}{3 \operatorname{sh}^2 M_*} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 M_*} \right)$$

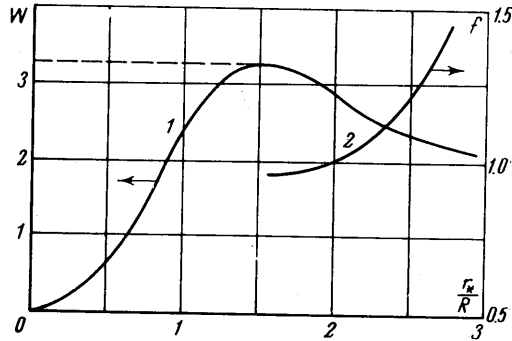
$$\frac{r_*}{R} = \frac{1}{\operatorname{th}^{1/3} M_* \operatorname{ch} M_*}$$

(она получена дифференцированием эффективной потенциальной энергии $(\Pi_{\pm} - G_{\pm}) / 4\pi R^2 \sigma$ по r_*).

Максимальное значение W , при котором имеется экстремум, равно 3.30. Оно оказалось меньше критического значения, вычисленного в работе [10] из условия соблюдения постоянства давления по капле, рассчитанного у критической точки капли и у ее самой боковой точки. Таким образом, оказалось, что из-за энергетических соображений неустойчи-

вость капли наступает раньше, чем из условия ее динамического равновесия (конечно, в рамках приближенного метода задания формы капли).

На фиг. 3 нанесена также зависимость величины максимума потенциальной кривой от r_*/R (кривая 2). Пользуясь этой кривой, можно определять число Вебера, приводящее к дроблению капли, если начальная форма не соответствует условиям обтекания ее газом.

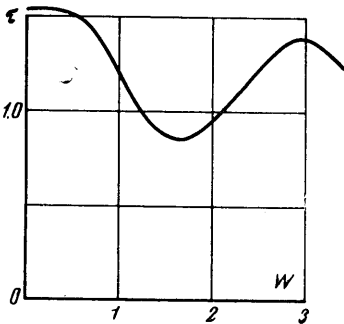


Фиг. 3

Так, для сферической капли, помещенной в поток постоянной скорости, $\Sigma = 1$ (фиг. 2). Откладывая на оси ординат для кривой 2 (фиг. 3) значение $f(r_*/R) = 1$, находим абсциссу, соответствующую этой точке кривой. Тогда значение критического W определяется ординатой кривой 1 (фиг. 3), соответствующей той же абсциссе, и равно 2.88 — сообщаемая капле при деформации кинетическая энергия

внутреннего движения жидкости снижает критическое число Вебера.

При определении времени, необходимого для того, чтобы капля успела изменить форму и раздробиться, следует еще раз проинтегрировать уравнение (17). Получающийся при этом интеграл может быть рассчитан численно для разных значений чисел Вебера. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. При этом предполагалось, что в поток газа попадает невозбужденная сферическая капля $P_0 = 0$; за время деформации капли τ_d в случае колебаний (при $W < 2.88$) принималось время достижения ее максимальной деформации, а при необратимых деформациях — время достижения каплей формы, соответствующей максимуму потенциальной кривой.



Фиг. 4

Вначале это время уменьшается, потому что при колебаниях на каплю наряду с поверхностными силами начинают действовать более значительные аэродинамические силы; затем время начинает расти из-за увеличения деформации капли и возрастающей роли нелинейных эффектов, но по достижении $W = 2.88$ оно вновь начинает быстро падать, поскольку при достижении максимума потенциальной кривой в этой области чисел W не вся кинетическая энергия, запасенная в капле, переходит в потенциальную энергию.

Отметим, что во всем диапазоне чисел Вебера до (3.30) время деформации не сильно отличается от полупериода свободных колебаний сферической капли при наименьшей собственной частоте колебаний.

При малых значениях числа Вебера, когда равновесная форма капли мало отличается от сферической ($M_+ \rightarrow \infty$, $\text{csch } M_+ \rightarrow 0$), уравнение (17) можно упростить. Ограничиваясь членами четвертой степени по $\varepsilon = \text{csch } M_+$, получаем следующее упрощенное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{9}{16}Wy + \left(1 + \frac{9}{70}W\right)y^2 = 0 \quad \left(y = \frac{1}{\text{sh}^2 M}\right) \quad (19)$$

с начальным условием $\tau = 0, y = 0$. Его решение имеет вид

$$y = \frac{9}{32} W \frac{1}{1 + \sqrt[9]{70} W} \left\{ 1 - \cos \left[\left(1 + \frac{9}{70} W \right)^{1/2} \tau \right] \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, гармонические колебания капли при малых деформациях имеют более высокую частоту, чем при свободных колебаниях

$$\omega = \omega_0 (1 + \sqrt[9]{70} W)^{1/2} \quad (21)$$

и амплитуду, зависящие от числа Вебера. Условием применимости решения (20) является малость максимальной деформации капли ($\varepsilon \ll 1$), т. е.

$$\varepsilon = \sqrt[9]{y} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt[9]{W}}{(1 + \sqrt[9]{70} W)^{1/2}} \ll 1, \text{ или } \sqrt[9]{W} \ll 1 \quad (22)$$

(при этом, однако, должно выполняться условие квазистационарного обтекания капли газом). Полученное условие малости числа Вебера, необходимое для того, чтобы рассматривать равновесную форму капли в потоке как сферическую, показывает необоснованность выводов работ [4-6], в которых дробление рассматривалось как нарушение устойчивости сферической капли при числах Вебера порядка единицы.

Отметим в заключение, что наиболее грубым допущением, принятым в данной работе, является предположение о потенциальном обтекании капли. В действительности же в экспериментах отмечалось, что вблизи предела дробления капель происходит срыв струй. Чтобы оценить влияние этого эффекта на дробление капли, был произведен расчет эффективной потенциальной энергии при отрывном обтекании капли в рамках рассмотренной выше энергетической модели. При этом принималось, что распределение давления по лобовой поверхности капли такое же, как и в случае отрывного обтекания диска идеальной жидкостью, а срыв струй происходит в крайних боковых точках поверхности капли. Расчет показал, что в рамках этих предположений дробление капель не наступает ни при каких числах W . Таким образом, срыв струй, который наблюдается в экспериментах, может оказывать стабилизирующее влияние и увеличивать критическое число W .

Поступило 11 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Hinze J. O. Forced deformation of viscous liquid globules. Appl. Scient. Res. A. I., 1949, p. 249.
2. Hinze J. O. Fundamentals of splitting in dispersion process. A.I.Ch.E. Journal, 1955, vol. 1, No. 3, p. 289.
3. Isshiki N. Theoretical and experimental study of atomization of liquid drop in high speed gas stream. Rep. Transp. Techn. Research. Inst., 1959, No. 35.
4. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Ягодкин В. И. О дроблении сферической капли в газовом потоке. ПМТФ, 1962, № 1.
5. Головин А. М. К теории колебаний и дробления капли в газовом потоке при наличии вихревого движения внутри капли, I. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 7.
6. Головин А. М. К теории колебаний и дробления капли в газовом потоке при наличии потенциального движения внутри капли, II. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1964, № 8.
7. Клязнер О. Процесс вспыскивания в бескомпрессорных двигателях. В сб.: «Двигатели внутреннего сгорания», М.—Л., ОНТИ, 1936, т. I.
8. Лышевский А. С. О критерии распада жидких капель. Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та, 1959, 86.
9. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М, Физматгиз, 1959.
10. Клячко Л. А. К теории дробления капли потоком газа. Инж. журн., 1963, вып. 3.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
13. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., Изд-во Машиностроение, 1967.
14. Раушенбах Б. В., Белый С. А., Беспалов И. В., Бородачев В. Я., Волынский М. С., Прудников А. Г. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М., Изд-во Машиностроение, 1964, ст. 58—66.
15. Hanson A., Donich E, Adams H. Shock tube investigation of the breakup of drops by air blasts. Phys. Fluid., 1963, vol. 6, No. 8, p. 1070.
16. Haas F. C. Stability of droplet suddenly exposed to a high velocity gas stream. A.I.Ch.E. Journal, 1964, vol. 10, No. 6, p. 290.
17. Serafini J. S. Impingement of water droplets on wedges and double — wedge air foils at supersonic speeds. NACA, Rep. 1159, 1954.