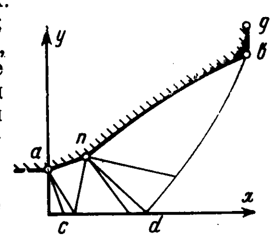
К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. А. ОСИПОВ (*Москва*)

В работах [1, 2] решалась задача оптимизации сверхзвуковой части сопла для течения газа при наличии в нем каких-либо неравновесных процессов. Авторами рассматривалась такая схема течения, когда замыкающая линия Маха первого семейства приходит в начальный пучок волн разрежения. В то же время в работе [3] при решении аналогичной задачи для случая течения газа с инородными частицами было показано, что целесообразно рассмотреть и другую схему, когда замыкающая характеристика приходит на ось симметрии вне начального пучка волн разрежения. Ниже приведены результаты рассмотрения такой схемы для течения газа при наличии в нем неравновесных процессов. Получены необходимые условия, определяющие оптимальный контур, и, в частности, условия, определяющие координату x и величину излома в угловых точках.



Обозначения: w, u, v, p, ρ, h, q, ω — параметры течения; λ^j, $\mathbf{Q}$ — множители Лагранжа; f^j, f^{0j} — известные функции, стоящие в изопериметрических условиях; K^j — заданные константы; Φ, F — известные функции параметров течения и множителей; K — некоторая константа; P — известная функция параметров течения; p^+ — внешнее давление; a — скорость звука.

Индексы: x, y, x', v, p, ρ, q — частные производные; b, n — параметры в точках; плюс и минус — параметры в точке справа, слева.

1. Пусть x, y — прямоугольные координаты. В осесимметричном случае ось x направлена по оси симметрии. При той же постановке задачи и обозначениях параметров течения, что и в работе [1], течение газа при наличии в нем неравновесных процессов может быть описано уравнениями

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\nu\rho v}{y}=0$$

$$u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0, \qquad u\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y}-\omega(p, \rho, \mathbf{q})=0$$

$$(h=h(p, \rho, \mathbf{q}))$$

Здесь $\nu=0$ и 1 в плоском и осесимметричном случае.

Требуется построить контур ag сверхзвуковой части сопла (фигура), обеспечивающий максимум тяги, при заданном течении левее характеристики ac, максимально допустимой длине X и при выполнении определенных изопериметрических условий, которые запишем в виде

$$K^j=\int_a^b f^j(y, x, x', v, p, \rho, \mathbf{q})\,dy+\int_b^g f^{0j}(y, x, x')\,dy \tag{1.1}$$

где K^j — заданная константа ($j=1, 2, \ldots, m$).

2. Метод получения необходимых условий, определяющих оптимальный контур, аналогичен примененному в [3]. При этом оказывается, что оптимальный контур ab должен удовлетворять следующим условиям:

$$(x'\mu_2-\mu_1)v\frac{du}{dy}-\mu_3\left[\frac{d}{dy}(\rho v)+\frac{\nu\rho v}{y}\right]+\Phi_x-(\Phi_{x'})'-\frac{d\alpha_1}{dy}=0$$

Ординаты угловых точек n и величины излома в них определяются уравнениями

$$(\Phi_{x'}+\alpha)_{n-}+(\Phi_{x'}+\alpha)_{n+}-\int_{n-}^{n+}\left[\mu_1 v\,du+\mu_2\left(v\,dv+\frac{1}{\rho}dp\right)+\right.$$
$$\left.+\mu_3 d(\rho v)+\mu_4\left(-v\frac{h_\rho}{a^2}dp+h_\rho v\,d\rho\right)\right]=0$$

$$(\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_{n-} - (\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_{n+} + \int\limits_{n-}^{n+} \left[\mu_1 \left(u\,du + \frac{1}{\rho}\,dp \right) + \right.$$

$$\left. + \mu_2 u\,dv + \mu_3 d(\rho u) + \mu_4 \left(-\frac{h_\rho}{a^2} u\,dp + h_\rho u\,d\rho \right) \right] = 0$$

Условия в точке b имеют вид

$$(\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_{b-} - F_{x'b+} \geqslant 0, \qquad (\Phi_{x'} + \alpha)_{b-} - F_{x'b+} \geqslant 0.$$

На участке $x = X$ контура bg должно выполняться неравенство

$$F_x - (F_{x'})' \geqslant 0$$

$$\Phi = y^\nu p + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j f^j(y, x, x', v, p, \rho, \mathfrak{q}) \qquad F = y^\nu p^+ + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j f^{0j}(y, x, x')$$

Здесь λ^j — постоянные множители Лагранжа, выбираемые из условий удовлетворения изопериметрическим условиям (1.1). Переменные множители $\mu_i(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют уравнениям:

на линиях Маха

$$(v + ux')\,d\mu_3 + \frac{u}{\rho}(u - vx')\,d\mu_2 + \frac{v}{\rho}(vx' - u)\,d\mu_1 -$$

$$- dx \left[\mu_1 \left\{ \frac{ux' + v}{x'\rho} \frac{du}{dy} + \frac{v(vx' - u)}{x'\rho^2} \frac{d\rho}{dy} + \frac{(vx' - u)\nu v}{\rho x' y} \right\} + \right.$$

$$+ \mu_2 \left\{ \frac{ux' + v}{x'\rho} \frac{dv}{dy} - \frac{u(vx' - u)}{\rho^2 x'} \frac{d\rho}{dy} - \frac{\nu v(vx' - u)}{\rho y} \right\} +$$

$$+ \frac{\mu_3 \nu}{x' y}(ux' + v) + \mu_4 \left\{ \frac{h_\rho}{x'\rho}(ux' + v) \frac{d\rho}{dy} + \frac{(vx' - u) h_\rho}{a^2 x'} \left(v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu h_\rho v}{y} \left(\frac{1}{x'} + x' \right) \right\} + \frac{(vx' - u)^2}{x'} Q\omega_p + \left(\frac{1}{x'} + x' \right) Q\omega_\rho +$$

$$\left. + (\mu_4 h_{\mathfrak{q}} + Q) \left\{ \frac{\omega}{\rho} \left(x' + \frac{1}{x'} \right) - \frac{ux' + v}{x'\rho} \frac{d\mathfrak{q}}{dy} \right\} \right] = 0$$

$$\left(x' = \frac{-uv \pm a\sqrt{w^2 - a^2}}{a^2 - v^2} \right)$$

на линиях тока

$$u\frac{d\mu_1}{dy} + v\frac{d\mu_2}{dy} + \rho\frac{d\mu_3}{dy} - \mu_1 \left(\frac{du}{dy} + \frac{\nu u}{y} \right) - \mu_2 \left(\frac{dv}{dy} + \frac{\nu v}{y} \right) -$$

$$- \frac{d\rho}{dy} \left(\frac{\mu_1 u}{\rho} + \frac{\mu_2 v}{\rho} + \mu_4 h_\rho \right) + \frac{\mu_4 h_\rho}{a^2} \frac{dp}{dy} - \frac{\nu\rho\mu_3}{y} + (\mu_4 h_{\mathfrak{q}} + Q) \frac{d\mathfrak{q}}{dy} = 0$$

$$v\frac{d\mu_3}{dy} + vh_\rho \frac{d\mu_4}{dy} - \frac{\mu_1 v}{\rho} \frac{du}{dy} - \frac{\mu_2 v}{\rho} \frac{dv}{dy} - \frac{\mu_4 v}{\rho^2} \frac{dp}{dy} -$$

$$- \frac{\mu_4 h_\rho \nu v}{y} - \frac{\nu v \mu_3}{y} - \frac{\mu_4 h_\rho v}{\rho} \frac{d\rho}{dy} - Q\omega_\rho = 0$$

$$(h_{\mathfrak{q}}\mu_4 + Q) \left(\frac{v}{\rho} \frac{d\rho}{dy} + \frac{\nu v}{y} \right) - Q\omega_{\mathfrak{q}} = 0$$

граничным условиям на db

$$(u - vx')\mu_1 + \rho\mu_3 = 0, \qquad \mu_3 + h_\rho \mu_4 = 0$$

$$(u - vx')\mu_2 - x'\rho\mu_3 = 0, \qquad \mu_4 h_{\mathfrak{q}} + Q = 0$$

и соотношениям на линиях разрыва, являющихся характеристиками первого и второго семейства

$$(u - ux')[\mu_1] + \rho[\mu_3] = 0, \qquad [\mu_3] + h_\rho[\mu_4] = 0$$
$$(u - vx)[\mu_2] - x'\rho[\mu_3] = 0, \qquad [\mu_4]h_q + [Q] = 0$$

При этом вдоль линии Маха первого семейства

$$[\mu_2] = K_1 x' \left\{ \frac{\rho y^\nu}{(ux'+v)(u-vx')} \right\}^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^y P\,dy \right)$$

$$\left(P = \frac{h_q}{(ux'+v)h_\rho} [(v_x' - u)^2 \omega_p + (1 + x'^2)\omega_\rho] \right)$$

На отраженной линии Маха второго семейства

$$[\mu_2] = K_2 x' \left\{ -\frac{\rho y^\nu}{(ux'+v)(u-vx')} \right\}^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^y P\,dy \right)$$

Из условия отражения следует, что $K_1 = K_2$.

На замыкающей линии Маха db множитель μ_2 определяется выражением

$$\mu_2 = Kx' \left\{ \frac{\rho y^\nu}{(ux'+v)(u-vx')} \right\}^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^y P\,dy \right)$$

где K определяется из соотношения

$$K \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{y_b} P\,dy \right) = \left\{ v \left(\frac{u - vx'}{(ux'+v)\rho y^\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{v\Phi_v}{w^2} - \rho\Phi_p - \rho\frac{\Phi_\rho}{a^2} \right) \right\}_b$$

На линии Маха второго семейства, выходящей из точки d, разрыв $[\mu_2]$ определяется выражением

$$[\mu_2] = Kx' \left\{ -\frac{\rho y^\nu}{(ux'+v)(u-vx')} \right\}^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^y P\,dy \right)$$

Соотношения, определяющие множители Лагранжа $\alpha_i(y)$, $\gamma(y)$ и условие для $\mu_i(x, y)$ на твердой стенке ab запишутся в виде

$$\rho\mu_3 + \frac{\alpha_1}{v} + u\frac{d\alpha_2}{dy} = 0, \qquad \Phi_v - \frac{w^2}{v}\frac{d\alpha_2}{dy} + \gamma\frac{dq}{dy} = 0$$

$$\frac{\mu_1}{\rho} - \frac{x'\mu_2}{\rho} - \Phi_p + \frac{1}{\rho}\frac{d\alpha_2}{dy} - \frac{1}{\rho}\frac{d\alpha_3}{dy} + \frac{\alpha_3}{\rho^2}\frac{d\rho}{dy} + h_p\frac{d\alpha_3}{dy} + \gamma\omega_p - \frac{\alpha_2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dy} = 0$$

$$\Phi_\rho + \frac{\alpha_3}{\rho^2}\frac{dp}{dy} - h_\rho\frac{d\alpha_3}{dy} - \frac{\alpha_2}{\rho^2}\frac{dp}{dy} - \gamma\omega_\rho = 0$$

$$\frac{d\alpha_3}{dy} h_q + \frac{d}{dy}(\gamma v) + \omega_q\gamma + \Phi_q = 0$$

В точке b множители α_2, α_3 и γ определим условием $\alpha_2 = \alpha_3 = \gamma = 0$.

Если изопериметрические условия не зависят от v, p, ρ, q, т. е. соответствующие частные производные Φ_v, Φ_p, Φ_ρ, Φ_q тождественно равны нулю, то можно показать, что в этом случае множители Лагранжа α_2, α_3 и γ также равны нулю на ab.

Поступило 10 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 285—295.
2. Hoffman J. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contours for chemically reacting gas flows (AIAA Paper, No. 66—638, 1966); AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 4, pp. 670—676. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 4, стр. 76—84.)
3. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.