

МЕТОД РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ

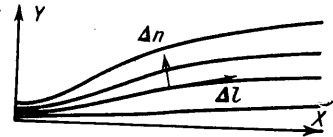
В. В. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Рассматриваются течения вязкого газа в плоских или осесимметричных сверхзвуковых соплах. Исследуются режимы, при которых толщина пограничного слоя сравнима с поперечными размерами сопла. Для случая таких течений решается обратная задача, т. е. рассчитывается форма сопла, обеспечивающая сохранение того же поля потока в невязком ядре течения, какое существует в сопле известной формы, предназначенном для невязкого газа.

При расчетах используются уравнения пограничного слоя второго порядка точности, учитывается скольжение потока и скачок температуры на стенке сопла. Путем проверки выполнения подобия по числам Рейнольдса определяется область применимости к рассматриваемой задаче классических уравнений пограничного слоя.

1. Основные уравнения. Рассмотрим течение вязкого газа в сверхзвуковом плоском или осесимметричном сопле (фиг. 1). Уравнения Навье — Стокса после отбрасывания членов с относительным порядком $1/R$ могут быть записаны в координатах линии тока — нормаль к линии тока следующим образом:



Фиг. 1

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial l} = - \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{y^v} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu y^v \frac{\partial V}{\partial n} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial l} \left(V \frac{\partial \mu}{\partial n} - \mu \frac{\partial V}{\partial n} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho V^2 \frac{\partial \theta}{\partial l} = - \frac{\partial p}{\partial n}, \quad \frac{\partial(\rho V)}{\partial l} + \rho V \frac{\partial \theta}{\partial n} + v \frac{\rho V}{y} \sin \theta = 0 \quad \left(R = \frac{\rho_* V_* d_*}{\mu_*} \right)$$

$$\rho V \frac{\partial h}{\partial l} = V \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{y^v} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left[\mu y^v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h}{P} \right) \right] + \frac{1}{R} \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{R} \mu \frac{\partial \theta}{\partial l} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(V^2 - \frac{h}{P} \right) \right]$$

Здесь ld_* , nd_* — координаты соответственно вдоль и по нормали к линиям тока; θ — угол наклона линии тока к оси сопла; yd_* — расстояние от оси сопла до линии тока; VV_* , $pp_*V_*^2$, $\rho\rho_*$, hV_*^2 , $\mu\mu_*$ — соответственно, полная скорость, давление, плотность, энтальпия и коэффициент вязкости; P — число Праудтля; R — характерное число Рейнольдса; значения $v = 0$ и 1 соответствуют плоскому и осесимметричному случаям; d_* , V_* , ρ_* , μ_* — соответственно размер критического сечения сопла, скорость, плотность и коэффициент вязкости в невязком ядре критического сечения.

Рассмотрим случай течения газа с постоянным значением показателя адиабаты γ и числа P . Тогда, введя обозначения

$$\varphi = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial n} \right) + v \frac{\cos \theta}{y} \mu \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \theta}{\partial l} \left(V \frac{\partial \mu}{\partial n} - \mu \frac{\partial V}{\partial n} \right) \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial h}{\partial n} \right) + \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 + v \frac{\cos \theta}{y} \mu \frac{\partial h}{P \partial n} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} \left(V^2 - \frac{h}{P} \right) \right] \quad (1.2)$$

и разрешив выражения (1.1) относительно $\partial p / \partial l$, $\partial V / \partial l$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{M^2 - 1} \left[M^2 (\gamma - 1) \frac{\sigma}{V} - \varphi - \rho V^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} + v \frac{\sin \theta}{y} \right) \right] \quad \left(M = \frac{V}{a} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\rho V} \left(\varphi - \frac{\partial p}{\partial l} \right), \quad \frac{\partial h}{\partial l} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma}{V} + \frac{\partial p}{\partial l} \right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} = - \frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (1.4)$$

Здесь a — скорость звука.

2. Расчет течения невязкого газа ($\sigma = \varphi = 0$). Будем считать, что форма контура сопла известна. Выделим некоторое нечетное число линий тока, разбивающих поле потока от оси до стенки сопла на полосы¹. Пронумеруем линии тока по порядку так, чтобы линия, соответствующая контуре сопла, имела номер $r = 1$.

Рассмотрим некоторое нормальное к линиям тока сечение; будем считать, что в этом сечении на нечетных линиях тока значения величины θ известны, а на четных известны значения остальных параметров. Если число M во всем поле течения больше единицы, то система (1.3), (1.4) является гиперболической, и ее можно решать в полуполосе начальное сечение — ось — стенка сопла. Интегрирование будем вести вдоль линий тока, переходя от одного сечения, нормального линиям тока, к другому и заменяя производные по нормали конечными разностями типа $(\partial\theta/\partial n)_2 = (\theta_3 - \theta_1) / \Delta n_{31}$ (здесь Δn_{31} — расстояние между линиями тока 3 и 1). При этом уравнения (1.3) будем решать совместно вдоль четных, уравнение (1.4) — вдоль нечетных линий тока, а четные линии тока будем считать расположенными на равном расстоянии от соседних нечетных.

3. Расчет сопла с учетом влияния вязкости. Предположим, что течение невязкого газа в заданном исходном сопле рассчитано с помощью методики, изложенной выше. Рассмотрим обратную задачу — построение контура сопла, имеющего для случая течения вязкого газа такое же невязкое ядро потока по крайней мере между линией тока $r = 3$ и осью сопла². Расход газа для случаев вязкого и невязкого течений считаем одинаковым.

Решение будем строить между линией тока $r = 5$ и стенкой сопла (форма стенки неизвестна). Для этого используем следующую систему уравнений, аналогичную уравнениям пограничного слоя второго порядка точности:

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\rho V} \left(\varphi - \frac{\partial p}{\partial l} \right), \quad \frac{\partial h}{\partial l} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma}{V} + \frac{\partial p}{\partial l} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \theta_\delta}{\partial l} = - \frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (\theta_\delta = \theta_r \text{ при } r = 5) \quad (3.2)$$

Уравнение неразрывности запишем вдоль четных линий тока q «вязкого течения» в интегральной форме

$$\rho_q V_q \Delta n_{q-1, q+1} y_q^v = \text{const} \quad (3.3)$$

Значение $\partial \theta_\delta / \partial l$ для каждого нормального к линиям тока сечения и значение p на линии тока $r = 4$ будем брать из решения для случая течения невязкого газа, а уравнение (3.2) использовать при вычислении давления на всех четных линиях тока вязкого течения. Естественно, что для получения достаточно точного решения потребуется более частое разбиение потока.

4. Интегрирование. Интегрирование систем уравнений (1.3), (1.4); (3.1) — (3.3) будем проводить совместно с помощью метода Эйлера. При этом для расчета течения невязкого газа используем соотношения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_r = \frac{f_{r+1} - f_{r-1}}{\Delta n_{r+1, r-1}}, \quad \Delta l_{r-1} = \Delta l_{r+1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_{r+1}}{\partial l} + \frac{\partial \theta_{r-1}}{\partial l} \right) \Delta n_{r+1, r-1} \right] \quad (4.1)$$

$$\Delta x / \Delta l = \cos \theta, \quad \Delta y / \Delta l = \sin \theta \quad (4.2)$$

Разбиение поля течения вязкого газа между линией тока $r = 3$ и стенкой сопла выберем в начальном сечении таким образом, чтобы расход газа между каждой парой нечетных линий тока уменьшался при движении к стенке сопла в два раза. Значения функций φ_q и σ_q вычислим из (1.2) при $\theta = \theta_\delta$. Первые и вторые производные по нормали к линиям тока будем рассчитывать по следующим формулам, полученным квадратичной аппроксимацией:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_q = \left[(f_{q-2} - f_q) \frac{\Delta n_{q-1, q+3}}{\Delta n_{q-3, q+1}} + (f_q - f_{q+2}) \frac{\Delta n_{q-3, q+1}}{\Delta n_{q-1, q+3}} \right] \frac{2}{\Delta n_{q-3, q+1} + \Delta n_{q-1, q+3}} \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right)_q = \left[(f_{q-2} - f_q) \frac{1}{\Delta n_{q-1, q+3}} - (f_q - f_{q+2}) \frac{1}{\Delta n_{q-3, q+1}} \right] \frac{8}{\Delta n_{q-3, q+1} + \Delta n_{q-1, q+3}} \quad (4.4)$$

¹ Если плоское сопло несимметрично относительно оси X , аналогичным образом разбиваем все поле потока.

² Справедливость этого допущения проверяется расчетом. Если оно не выполняется, проводится расчет с меньшим числом линий тока r .

При определении $(\partial^2 f / \partial n^2)_2$ считаем, что стенка сопла соответствует трем линиям тока $(-1, 0, 1)$, которые слились в одну. Значения φ и σ на линии тока, соответствующей линии 4 невязкого течения, полагаем равными нулю. Для вычисления μ применим формулу Сазерленда

$$\mu = \sqrt{\gamma(\gamma-1)h} \left(1 + \frac{Jc_p(\gamma-1)C}{V_*^2} \right) \left(1 + \frac{Jc_p C}{V_*^2 h} \right)^{-1}$$

Здесь c_p — теплоемкость единицы массы газа при постоянном давлении, J — механический эквивалент тепла, C — постоянная (для воздуха $C = 110^\circ \text{K}$).

Значения Δl будем находить с помощью уравнения (4.1) при $\theta = \theta_6$, однако для вычисления Δl используем уравнение неразрывности (3.3), так как нельзя вычислять Δl из уравнений (4.2), если $\theta = \theta_6$.

При расчете течений с учетом скольжения и скачка температуры значения h, V при $q = 1$ находим с помощью значений этих функций на стенке сопла $(h_w, 0)$ по формуле

$$f_1 = \left\{ f_w + \frac{2\lambda_f}{\Delta n_{13} + \Delta n_{15}} \left[(f_2 - f_4) \frac{\Delta n_{13}}{\Delta n_{15}} - f_2 \frac{\Delta n_{15}}{\Delta n_{13}} \right] \right\} \left(1 - \frac{2\lambda_f}{\Delta n_{13} + \Delta n_{15}} \frac{\Delta n_{15}}{\Delta n_{13}} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

Вывод этого выражения основан на применении соотношения (4.3) и следующих уравнений, полученных в работе [4]:

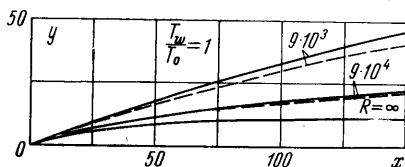
$$V_1 = \lambda_v \left(\frac{\mu}{\rho a} \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1, \quad h_1 = h_w + \lambda_h \left(\frac{\mu}{\rho a} \frac{\partial h}{\partial n} \right)_1$$

Значения λ_v, λ_h при $\gamma = 1.4, P = 0.715$ и коэффициентах аккомодации и отражения, равных единице, будут равны

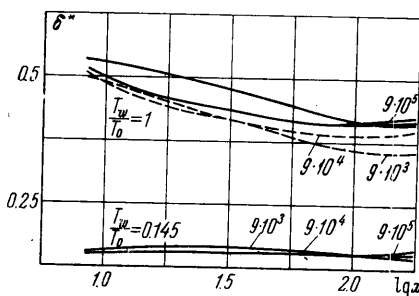
$$\lambda_v = 1.483 / R, \quad \lambda_h = 2.420 / R$$

Система (3.1) (3.2) не позволяет непосредственно вычислять значения $\partial p / \partial l$. Поэтому будем вычислять их по значениям p на двух соседних, нормальных к линиям тока, сечениях, а затем, вычислив в следующем сечении V, h и ρ , находить p с помощью (3.2).

Значения параметров потока в начальном сечении будем задавать следующим образом. Считаем, что течение вблизи критического сечения сопла близко к цилиндрическому (т. е. у исходного сопла радиус кривизны и наклон стенки в критическом сечении равны нулю). Благодаря этому расчет будем начинать с прямого, перпендикулярного оси X сечения, расположенного в критическом сечении сопла. Значения всех параметров потока в этом сечении считаем постоянными, а число $M = 1.01$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Затем при решении системы уравнений (3.1) — (3.3) введем плавное изменение на некоторой малой длине ε параметров V_1 и h_1 от начальных значений до значений, определяемых формулой (4.5) или условиями прилипания. Влияние величины ε на решение будем контролировать.

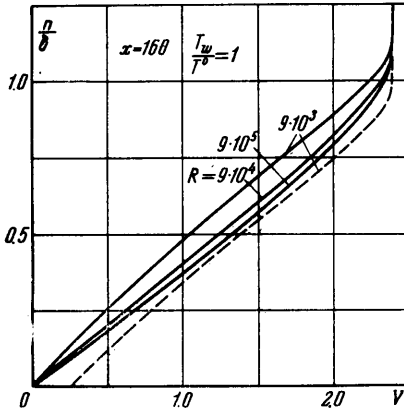
В заключение отметим, что выбранная методика расчета требует при уменьшении значения числа R все более редкого разбиения линиями тока поля течения невязкого газа, обеспечивая, таким образом, примерно одинаковую относительную погрешность расчета вязкой и невязкой части потока. Однако погрешность расчета невязкого течения можно и не увеличивать, если стыковку вязкой и невязкой части потока при уменьшении числа R проводить на все более удаленных от стенки сопла линиях тока.

5. **Результаты расчета.** Расчеты проведены для случая $\gamma = 1.4$, $P = 0.715$ и температуры торможения $T_0 = 2000^\circ \text{K}$. Число R было выбрано равным $9 \cdot 10^3$, $9 \cdot 10^4$ и $9 \cdot 10^5$, температура стенки — $T_w = 2000, 290^\circ \text{K}$.

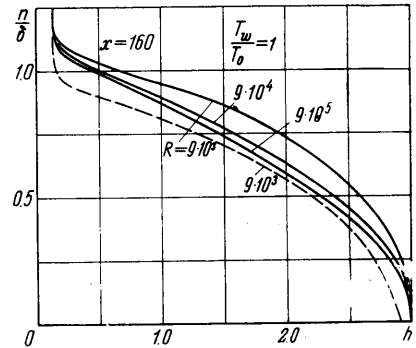
В качестве исходного было взято осесимметричное сопло, обеспечивающее при истечении невязкого газа получение равномерного поля потока с $M = 10$. Расчеты проводились как без учета, так и с учетом скольжения потока и скачка температуры на стенке сопла (соответственно сплошные и пунктирные кривые).

На фиг. 2 показаны контуры сопел, полученные из исходного ($R = \infty$) сопла для различных чисел R . Этот график дает представление об относительной величине пограничного слоя и о степени влияния скольжения для случая горячей стенки сопла.

Как показали расчеты, влияние скольжения потока на течение в холодном сопле весьма незначительно. Так, относительное уменьшение толщины вытеснения при $R = 9 \cdot 10^3$ и $T_w / T_0 = 0.145$ составляет всего лишь 1—2%.



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 3 иллюстрирует величину ошибок, которые могут быть в результатах, полученных для безразмерной толщины вытеснения

$$\delta^* = \delta (M_w R / x)^{1/2} [1 + (\gamma - 1) M_w^2 / 2]^{(3-5\gamma) / (4\gamma-4)}$$

с помощью классической теории пограничного слоя (такой расчет дает одну кривую для δ^* при заданных T_w и T_0). Здесь M_w — число M на стенке сопла при отсутствии вязкости.

Из фиг. 4, 5 можно сделать вывод о степени влияния эффектов второго порядка на профили скорости и энтальпии пограничного слоя (n/δ — безразмерное расстояние по нормали к стенке сопла).

Расчеты показали, что наименее существенное влияние на решение оказывает учет продольной кривизны слоя в уравнении энергии и уравнении импульсов вдоль направления скорости. Для случая течения в горячей сопле ($T_w \approx T_0$) существуют режимы, при которых из всех эффектов второго порядка наиболее важным является скольжение потока и скачок температуры на стенке. В холодном сопле ($T_w \leq 0.15T_0$) эффекты скольжения малы.

Точность полученных решений, определенная сравнением с расчетами классического пограничного слоя (при $R = 9 \cdot 10^5$) и сравнением решений с различной густотой сетки, около 2%. Анализ конечноразностных уравнений невязкого течения и опыт расчета показали, что для обеспечения устойчивости счета шаги по n и l должны подчиняться соотношению $\Delta l / \Delta n^2 = O(1)$. Время расчета варианта на ЭВМ М-20 при общем числе рассчитываемых линий тока около 30 и шаге $\Delta l = 0.0015 \sqrt{M^2} = 1$ порядка одного часа.

Поступило 6 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об эффектах скольжения при обтекании тел гиперзвуковым слаборазреженным потоком. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1.