ОБ ОБТЕКАНИИ ПОЛУТЕЛ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Л. И. ПЕТРОВА, О. С. РЫЖОВ

(*Москва*)

Рассматривается обтекание тонких тел гиперзвуковым потоком вязкого газа. Вся возмущенная область течения делится на две: вязкую, где справедливы уравнения пограничного слоя, и невязкую, расположенную между ударной волной и пограничным слоем, течение в которой описывается уравнениями идеального газа [1, 2].

Исследуется случай сильного взаимодействия, когда параметр $\chi = M^3/\sqrt{N_{\mathrm{Re}\,x}}$ где M — число Маха и $N_{\mathrm{Re}\,x}$ — число Рейнольдса, много больше 1. В этой области для тел со степенной образующей $y = cx^n$ (координаты x, y отсчитываются от носка вдоль тела и по нормали к ней) при $n > {}^3/_4$ взаимодействие между пограничным слоем и внешним потоком преобладает над эффектом затупления [3]. Это значит, что давление в потоке определяется в первую очередь ростом пограничного слоя, а форма тела вносит лишь малые возмущения. Следовательно, движение в невязкой области можно представить в виде ряда, в котором главный член определяется давлением, индуцированным пограничным слоем на плоской пластине, а второй и последующие учитывают влияние формы тела и других факторов. Это замечание, очевидно, относится и к другим параметрам невязкого потока, в том числе к уравнению ударной волны. Разложение всех искомых функций производится по возрастающим дробным степеням координаты x, а оценка применимости метода следует из условия $\chi \gg 1$. Во всех соотношениях удерживаются два члена, что дает возможность удовлетворить граничным условиям непротекания на поверхности тела.

Введем сразу обозначения: u, u' и v, v' проекции скорости на оси x, y и x', y' соответственно, где x' и y' отсчитываются от носка вдоль образующей тела и по нормали к ней; T, p, ρ, H, μ — температура, давление, плотность, энтальпия торможения и коэффициент вязкости газа; ψ — функция тока; N_{Pr} — число Прандтля. Индексы ∞, c, ω, e относятся соответственно к величинам набегающего потока, к ударной волне, к поверхности тела и к границе пограничного слоя.

В работах [1, 2] показано, что уравнение ударной волны, возникающей при гиперзвуковом обтекании пластины вязким газом, будет $y_c \sim x^{3/4}$. При обтекании плоских и осесимметричных тел с образующей $y \sim x^{3/4}$ главный член в уравнении ударной волны имеет такой же вид [3–5]. Поэтому форму ударной волны для тел $y_\omega = cx^n$, с показателем ${}^3/_4 \leqslant n \leqslant 1$ естественно задать соотношением

$$y_c = ax^{3/4}(1 + bx^\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_4) \tag{1}$$

Постоянная a может быть найдена из условия, что главный член разложения соответствует обтеканию пластины; постоянные b и α, связанные с формой тела, будут определены при склеивании решений в невязкой области и в пограничном слое.

Так как задана форма ударной волны, то решение в невязкой области можно полностью определить. Оно будет зависеть от параметров a, b и α.

Исходя из метода плоских сечений, справедливого при обтекании тонких тел гиперзвуковым потоком, уравнения движения запишем как [6]

$$u_1 = 1, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\varkappa p_1}{\rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\varkappa p_1}{\rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y} \tag{2}$$

$$u_1 = u / U_\infty,\ v_1 = v / U_\infty,\ \rho_1 = \rho / \rho_\infty,\ p_1 = p / \rho_\infty U_\infty^2.$$

Граничные условия заданы на фронте ударной волны y_c

$$\frac{p_c}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{\varkappa+1}\left(\frac{dy_c}{dx}\right)^2, \qquad \frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \qquad \frac{v_c}{U_\infty} = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{dy_c}{dx} \tag{3}$$

Введем новую переменную $\xi = y / ax^{3/4}$ и будем искать p_1, ρ_1 и v_1 в виде

$$p_1 = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{9}{8(\varkappa+1)} a^2 x^{-1/2}[P_0(\xi) + bx^\alpha P_1(\xi)]$$

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}[R_0(\xi) + bx^\alpha R_1(\xi)], \qquad v_1 = \frac{v}{U_\infty} = \frac{3}{2(\varkappa+1)} ax^{-1/4}[V_0(\xi) + bx^\alpha V_1(\xi)] \tag{4}$$

Величины P_0, R_0, V_0, P_1, R_1, V_1 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{dV_0}{d\xi}+\frac{A}{R_0}\frac{dR_0}{d\xi}=0$$

$$A\left(\frac{dP_0}{d\xi}-\frac{\varkappa P_0}{R_0}\frac{dR_0}{d\xi}\right)=\frac{\varkappa+1}{3}P_0,\qquad A\frac{dV_0}{d\xi}+\frac{\varkappa-1}{2R_0}\frac{dP_0}{d\xi}=\frac{\varkappa+1}{6}V_0 \tag{5}$$

$$\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{A}{R_0}\frac{dR_1}{d\xi}=-\left[\frac{V_1}{R_0}\frac{dR_0}{d\xi}+\frac{R_1}{R_0}\left(2\alpha\frac{\varkappa+1}{3}+\frac{dV_0}{d\xi}\right)\right]$$

$$A\left(\frac{dP_1}{d\xi}-\frac{dR_1}{d\xi}\frac{\varkappa P_0}{R_0}\right)=-\left\{V_1\left(\frac{dP_0}{d\xi}-\frac{\varkappa P_0}{R_0}\frac{dR_0}{d\xi}\right)+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\frac{R_1}{R_0}\left[A\frac{dP_0}{d\xi}-\frac{\varkappa+1}{3}P_0(2\alpha\varkappa+1)\right]+P_1\left[-A\frac{\varkappa}{R_0}\frac{dR_0}{d\xi}+\frac{\varkappa+1}{3}(2\alpha-1)\right]\right\}$$

$$A\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{\varkappa-1}{2R_0}\frac{dP_1}{d\xi}=-\left\{V_1\left[\frac{dV_0}{d\xi}+\frac{\varkappa+1}{6}(4\alpha-1)\right]-\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{\varkappa+1}{6}V_0-A\frac{dV_0}{d\xi}\right)\right\}$$

$$A=V_0-\frac{\varkappa+1}{2}\xi$$

При $\xi=1$ имеем

$$R_0=V_0=P_0=1,\ R_1=-\frac{dR_0}{d\xi},\quad V_1=-\frac{dV_0}{d\xi}+(1+{}^4/_3\alpha)$$

$$P_1=-\frac{dP_1}{d\xi}+2(1+{}^4/_3\alpha)$$

Уравнения (5) и (6) были решены численно в области от ударной волны до линии тока $\psi=0$, которой соответствует $\xi_0=2V_0/(\varkappa+1)$.

Как показано в работах [1–3], внешняя граница пограничного слоя близка к линии тока. Поэтому при склеивании решений в невязкой области и в пограничном слое можно считать, что линия тока $\psi=0$ в первой из названных областей соответствует границе пограничного слоя, т. е.

$$\frac{dy_e}{dx}=\frac{v_e(\xi_0,x)}{U_\infty},\qquad y_e=0\qquad \text{при } x=0 \tag{7}$$

Это уравнение дает зависимость y_e от параметров невязкой области. С другой стороны, y_e можно получить из решения уравнений пограничного слоя. Приравнивая эти два выражения, получим соотношение, связывающее постоянные b и a с формой тела.

Представляя y_e в виде ряда и ограничиваясь двумя членами, из уравнения (7) получаем

$$y_e=\frac{2}{\varkappa+1}V_0ax^{3/4}\left(1+\frac{V_1}{B}bx^\alpha\right),\qquad B=(1+{}^4/_3\alpha)V_0-\frac{dV_0}{d\xi} \tag{8}$$

Соответственно, давление и нормальная составляющая скорости на границе пограничного слоя равны

$$\frac{p_e}{p_\infty}=\frac{9\varkappa}{8(\varkappa+1)}M_\infty{}^2P_0a^2x^{-1/2}\left[1+\left(\frac{V_1}{P_0B}\frac{dP_0}{d\xi}+\frac{P_1}{P_0}\right)bx^\alpha\right]$$
$$\frac{v_e}{U_\infty}=\frac{3}{2(\varkappa+1)}V_0ax^{-1/4}\left[1+\frac{V_1}{V_0}\left(\frac{1}{B}\frac{dV_0}{d\xi}+1\right)bx^\alpha\right] \tag{9}$$

причем V_0, V_1, $dV_0/d\xi$ и $dP_0/d\xi$ определяются при $\xi=\xi_0$.

Перейдем к исследованию пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя записываются в переменных x', y', которые связаны с x, y следующими соотношениями:

$$x' = \int_0^x \left[1 + \left(\frac{dy_\omega}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx, \qquad y' \cos\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{dy_\omega}{dx}\right) = y - y_\omega \tag{10}$$

Производная $dy_\omega / dx < dy_c / dx \approx ax^{-1/4}$, поэтому в области $ax^{-1/4} \ll 1$ членом $(dy_\omega / dx)^2$ можно пренебречь по сравнению с 1 и тогда $x' = x$. Соответственно

$$y' = y - y_\omega \tag{11}$$

Уравнение пограничного слоя имеет вид [3]

$$\frac{\partial \rho u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho v'}{\partial y'} = 0, \quad \rho\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu \frac{\partial u'}{\partial y'}\right), \quad p = \rho RT \tag{12}$$

$$\rho\left(u' \frac{\partial H}{\partial x'} + v' \frac{\partial H}{\partial y'}\right) = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu \frac{\partial H}{\partial y'}\right) - \left(\frac{1}{N_{Pr}} - 1\right) \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu u' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right)$$

Рассмотрим случай, когда число Прандтля равно 1, коэффициент вязкости пропорционален температуре и тело теплоизолировано. В этом случае, как известно, имеет место интеграл энергии

$$\frac{\rho_e}{\rho} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 \left[1 + \frac{(u')^2 + (v')^2}{U_\infty^2}\right]$$

в котором можно пренебречь v' по сравнению с u'.

Введем переменные Дородницына — Хоуарта

$$t = U_\infty \int_0^{x'} \rho_\omega \mu_\omega dx', \qquad \eta = \frac{U_\infty}{\sqrt{2t}} \int_0^{y'} \rho dy' \tag{13}$$

и заменим $u / U_\infty = \partial f / \partial \eta$. Тогда уравнение количества движения примет вид

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{d \ln p}{d \ln t} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right] = 2t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \tag{14}$$

Давление в пограничном слое, как уже отмечалось, равно давлению в невязкой области при $\psi = 0$. Так как $x' = x$, то $p(x') = p(x)$. Необходимо определить связь между x' и t. Используя интеграл энергии и принимая во внимание, что для теплоизолированного тела μ_ω равняется коэффициенту вязкости заторможенного потока, получаем

$$t = \beta x^{1/2}\left(1 + \frac{\tau x^\alpha}{2\alpha + 1}\right), \quad \beta = \frac{9}{4} \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} U_\infty \rho_\infty \mu_\infty M_\infty^2 a^2 P_0, \quad \tau = \left[\frac{dP_0}{d\xi} \frac{V_1}{P_0 B} - \frac{P_1}{P_0}\right] b \tag{15}$$

В результате

$$\frac{d \ln p}{d \ln t} = -1 + \frac{4\alpha(\alpha + 1)\beta\tau t^{2\alpha}}{1 + 2\alpha}$$

Поэтому и функцию f естественно искать в виде

$$f = f_0(\eta) + 2\beta\tau t^{2\alpha} f_1(\eta)$$

Подставляя разложение $d \ln p / d \ln t$ и f в (14), получаем для f_0 и f_1 следующие уравнения:

$$\frac{d^3 f_0}{d\eta^3} + f_0 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\left[1 - \left(\frac{df_0}{d\eta}\right)^2\right] = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d^3 f_1}{d\eta^3} + f_0 \frac{d^2 f_1}{d\eta^2} + f_1 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} - \frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa}\left\{\frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 + 2\alpha}\left[1 - \left(\frac{df_0}{d\eta}\right)^2\right] + \frac{df_0}{d\eta} \frac{df_1}{d\eta}\right\} =$$

$$= 4\alpha\left[\frac{df_0}{d\eta} \frac{df_1}{d\eta} - f_1 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2}\right]$$

с граничными условиями

$$f_0 = df_0 / d\eta = f_1 = df_1 / d\eta = 0 \qquad \text{при } \eta = 0$$
$$df_0 / d\eta = 1, \quad df_1 / d\eta = 0 \qquad \text{при } \eta \to \infty$$

Эти уравнения были решены численно.

По формуле (12), с использованием интеграла энергии, получим значение толщины пограничного слоя

$$y_e' = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\varkappa - 1)\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\right)^{1/2}\frac{M_\infty}{a}\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty}\right)^{1/2}\frac{I_0}{\sqrt{P_0}}x^{3/4}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{4\alpha + 1}{1 + 2\alpha} + 2\frac{I_1}{I_0}\right)\tau x^\alpha\right]$$

$$I_0 = \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{df_0}{d\eta}\right)^2\right] d\eta, \qquad I_1 = 2\int_0^\infty \frac{df_0}{d\eta}\frac{df_1}{d\eta}\, d\eta$$

Сравнивая y_e' и y_e по формуле (11) и принимая во внимание, что главные члены разложения соответствуют обтеканию пластины, получаем следующие выражения для a и y_ω

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\varkappa^2 - 1)\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\right)^{1/2} M_\infty^2 \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty}\right)^{1/2}\frac{I_0}{\sqrt{P_0}\, V_0}$$
$$y_\omega = \frac{2}{\varkappa + 1} a V_0 b x^{3/4 + \alpha}\left[\frac{V_1}{B} - \left(\frac{2I_1}{I_0} + \frac{1}{2}\frac{4\alpha + 1}{2\alpha + 1}\right)\left(\frac{V_1}{P_0 B}\frac{dP_0}{d\xi} + \frac{P_1}{P_0}\right)\right] \tag{17}$$

Таким образом, если форма обтекаемого тела $y_\omega = cx^n$, то $\alpha = n - 3/4$

$$b = c\left[\frac{32}{9}\frac{(\varkappa - 1)^2}{\varkappa(\varkappa + 1)} M_\infty^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty}\frac{I_0^2 V_0^2}{P_0}\right]^{-1/4}\left[\frac{V_1}{B} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{2I_1}{I_0} + \frac{1}{2}\frac{4\alpha + 1}{2\alpha + 1}\right)\left(\frac{V_1}{P_0 B}\frac{dP_0}{d\xi} + \frac{P_1}{P_0}\right)\right]^{-1} \tag{18}$$

Подставим a, b и α в выражения для искомых параметров течения и выведем окончательные формулы

$$y_c = \left[\frac{2}{9}\frac{(\varkappa - 1)^2(\varkappa + 1)^3}{\varkappa}\frac{I_0^2}{P_0 V_0^2}\right]^{1/4} x\left(\frac{M_\infty^2 \mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + G(\varkappa, \alpha) c x^n$$
$$y_e = \left[\frac{8}{9}\frac{(\varkappa - 1)^2(\varkappa + 1)}{\varkappa}\frac{I_0^2}{P_0}\right]^{1/4} x\left(\frac{M_\infty^2 \mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + Q(\varkappa, \alpha) c x^n \tag{19}$$
$$\frac{p_e}{p_\infty} = \frac{3}{4\sqrt{2}}(\varkappa - 1)\sqrt{(\varkappa + 1)\varkappa}\frac{I_0}{V_0}\sqrt{P_0}\, M_\infty^3\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/2} +$$
$$+ K(\varkappa, \alpha)\left[M_\infty^3\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/2}\right]^{1/2} M_\infty c x^{n-1}$$
$$\frac{v_e}{U_\infty} = \left[\frac{(\varkappa - 1)^2(\varkappa + 1)}{2\varkappa}\frac{I_0^2}{P_0}\right]^{1/4}\left(M_\infty^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + N(\varkappa, \alpha) c x^{n-1}$$

где коэффициенты

$$G(\varkappa, \alpha) = \frac{\varkappa + 1}{2V_0}\left[\frac{V_1}{B} - \frac{1}{P_0}\left(2\frac{I_1}{I_0} + \frac{1}{2}\frac{4\alpha + 1}{2\alpha + 1}\right)\left(\frac{dP_0}{d\xi}\frac{V_1}{B} + P_1\right)\right]^{-1}$$
$$Q(\varkappa, \alpha) = G(\varkappa, \alpha)\frac{2V_1 V_0}{B(\varkappa + 1)}, \qquad N(\varkappa, \alpha) = G(\varkappa, \alpha) V_1\left(\frac{dV_0}{d\xi}\frac{1}{B} + 1\right)$$
$$K(\varkappa, \alpha) = G(\varkappa, \alpha)\left(\frac{dP_0}{d\xi}\frac{V_1}{B} + P_1\right)\left[0.356\frac{\varkappa^3(\varkappa - 1)^2}{\varkappa + 1}\frac{I_0^2}{P_0 V_0^2}\right]^{1/4}$$

Приведем результаты расчетов для $\varkappa = 1.4$ и $n = 0.8, 0.9, 1$.

Коэффициенты главных членов зависят только от отношения удельных теплоемкостей и остаются постоянными при любых значениях n. При $\varkappa = 1.4$ имеем

$$V_0 = 0.709, \qquad P_0 = 0.596, \qquad dV_0 / d\xi = 0.571$$

$$dP_0 / d\xi = 0.436 \cdot 10^{-3}, \qquad I_0 = 1.314$$

Эти значения соответствуют данным Стюартсона [1, 2]. Формулы (19) для $\varkappa = 1.4$ принимают вид

$$y_c = 1{,}192x \left(M_\infty{}^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + Gcx^n$$

$$y_e = 0.705x \left(M_\infty{}^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + Qcx^n \tag{20}$$

$$\frac{p_e}{p_\infty} = 0.556 M_\infty{}^3 \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/2} + K \left[M_\infty{}^3 \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/2}\right]^{1/2} M_\infty c x^{n-1}$$

$$\frac{v_e}{U_\infty} = 0.528 \left(M_\infty{}^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}\right)^{1/4} + Ncx^{n-1}$$

Значения коэффициентов G, Q, K, N для $n = 0.8, 0.9, 1$

n	V_1	P_1	I_1	G	Q	K	N
1	1.282	2.374	0.0866	1.06	2.145	1.97	2.144
0.9	0.859	1.839	0.0582	1.545	2.8	2.224	2.52
0.8	0.517	1.389	0.0232	2.545	4.19	2.767	3.35

При $n = 1$ реализуется обтекание тела с прямолинейной образующей.

Разложение для p_e / p_∞ совпадает с формулой, следующей из применения метода касательных клиньев, с точностью до коэффициента, зависящего от n. По методу касательных клиньев во втором члене разложения коэффициент при выражении

$$[M_\infty{}^3 (\mu_\infty / \rho_\infty U_\infty x)^{1/2}]^{1/2} M_\infty c x^{n-1}$$

пропорционален n, на самом же деле, как следует из приведенных выше результатов, он равен $K(\alpha, \varkappa)$, т. е. более сложным образом зависит от n.

Приведем в заключение оценку области применимости построенного решения через параметры набегающего потока. Как было указано раньше, должны выполняться неравенства $ax^{-1/4} \ll 1 \ll \chi$. Следовательно

$$\frac{M_\infty{}^2 \mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty} \ll x \ll \frac{M_\infty{}^6 \mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty}$$

Авторы выражают искреннюю благодарность О. Е. Власову за проведение расчетов.

Поступило 25 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson K. On the motion of a flat plate at high speed in viscous compressible fluid, I., Impulsive motion, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, vol. 51, No 1.
2. Stewartson K. On the motion of a flat plate at high speed in viscous compressible fluid, II., Steady motion, J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 5.
3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Jasuhara H. Axisymmetric viscous flow past very slender bodies of revolution, J. Aeronaut Sci., 1962, vol. 29, No. 6
5. Лунев В. В. Автомодельный случай гиперзвукового обтекания осесимметричного тела вязким теплопроводным газом. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
6. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.