

Наконец, заметим, что одно из решений работы [9], описывающее околосзвуковое осесимметричное течение в сопле Лавала с двумя сужениями, можно применить к построению течения в осесимметричном сопле с плоским нормальным скачком уплотнения (аналогично тому, как это сделано для плоского сопла в работе [8]), при этом течение газа в меридианальной плоскости качественно такое же, как в плоском сопле Лавала [8].

Поступило 22 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околосзвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6, стр. 65—68.
2. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Pt. 1, Quart. Appl. Math. 1950, vol. 7, No. 4. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1951, № 4).
3. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1965.
4. Севостьянов Г. Д. Обтекание профиля звуковой свободной струей газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, стр. 53—59.
5. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Рыжов О. С. О работе сопл Лавала в нерасчетных режимах. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4, стр. 859—866.
7. Лифшиц Ю. Б. Об образовании скачков уплотнения у границы звуковой струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 85—87.
8. Севостьянов Г. Д. Плоские трансзвуковые течения газа с прямым скачком уплотнения. ПММ, 1967, т. 31, № 6, стр. 1028—1034.
9. Tomotika S., Hasimoto Z. On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle. J. Math. Phys., 1950, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1951, № 5).

О РАСЧЕТЕ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ В СВОБОДНОЙ СТРУЕ

Ю. Б. ЛИФШИЦ (Москва)

Создание быстродействующих вычислительных машин привело к разработке эффективных методов расчета сложных задач газодинамики, в которых течение содержит дозвуковые и сверхзвуковые области. Характерными примерами может служить обтекание затупленных тел с отшедшей ударной волной и течение в сопле Лавала. В указанных случаях либо скачок уплотнения является границей возмущенной области, либо поток совершенно не содержит разрывов, поэтому решение рассматриваемых задач достигается методами расчета непрерывных течений.

Другим примером смешанного до- и сверхзвукового течения является обтекание профиля со скоростью, величина которой больше критической. Непрерывное течение в возникающей здесь зоне сверхзвуковых скоростей неустойчиво, и расчет получающегося потока со скачком уплотнения должен производиться методами сквозного счета. При этом положение скачка не фиксируется и он получается в виде области больших изменений параметров газа, размазанной на несколько ячеек расчетной сетки.

Существуют два различных направления разработки методов расчета течений рассматриваемого типа. Первое основано на интегрировании в тех или иных упрощающих предположениях приближенного околосзвукового уравнения Кармана. Получаемые результаты распределения давления по профилю в ряде случаев хорошо совпадают с экспериментом, подробный обзор этих методов имеется в статье Спрейтера [1]. Другим направлением является развитие полумпирических методов, общих для определенных типов профилей. Они, вероятно, наиболее пригодны для практических расчетов, так как дают возможность учесть взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем, характер которого заметно влияет на распределение давления по профилю.

Ниже рассматривается разностная схема расчета трансзвукового течения около симметричного профиля под нулевым углом атаки, помещенного в свободную струю с заданной скоростью на бесконечности.

1. Будем считать, что в течении не происходит диссипативных процессов, связанных с вязкостью и теплопроводностью, и возникающие в нем ударные волны настолько слабы, что изменением энтропии можно пренебречь по сравнению с ошибкой аппроксимации на заданной сетке. В этом случае плоское стационарное движение газа описывается уравнением неразрывности, двумя уравнениями Эйлера и условием адиабатичности. Возьмем в качестве независимых переменных функцию тока ψ и по-

тенциал ϕ , а искомыми функциями будут давление p , плотность ρ , модуль скорости w и угол θ наклона вектора скорости к положительному направлению оси x .

Будем считать, что давление и плотность отнесены к их значениям в невозмущенном потоке, а модуль скорости отнесен к величине невозмущенной скорости звука. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \kappa r \rho w^2 \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + w^2 \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\kappa r}{2} \frac{\partial w^2}{\partial \phi} &= 0, & p &= \rho^{\kappa} \\ w^2 \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial \psi} &= 0, & \frac{\partial w^2}{\partial \phi} + \frac{2}{\kappa r} \frac{\partial p}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Координаты физической плоскости x и y связаны с ϕ и ψ при помощи дифференциальных соотношений

$$d\phi = w \cos \theta dx + w \sin \theta dy, \quad d\psi = -\rho w \sin \theta dx + \rho w \cos \theta dy \quad (1.2)$$

Симметрия задачи относительно оси x , вдоль которой расположен профиль и направлен вектор скорости в свободной струе, позволяет рассматривать только верхнюю полуплоскость. Граничные условия задаются на бесконечности вверх по потоку

$$p = \rho = 1, \quad w = M_{\infty}, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \phi = -\infty \quad (1.3)$$

и вдоль граничных линий тока

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\phi) & \text{при } \psi &= 0 \\ p = \rho &= 1, & w &= M_{\infty} & \text{при } \psi &= H \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь H — ширина струи на бесконечности, M_{∞} — число Маха в невозмущенной струе, а функция $\theta(\phi)$ равна нулю вне профиля, а на профиле задает угол его наклона к оси x .

Предполагая следовать идее метода установления, прибавим к первому и третьему уравнениям системы (1.1) производные по времени от p и θ соответственно, а к четвертому уравнению (1.1) прибавим производную $\partial w^2 / \partial t$, предварительно умножив его на w^2 . В качестве начальных условий возьмем, например, равномерный поток с $p = \rho = 1$, $w = M_{\infty}$, $\theta = 0$.

Полученная, таким образом, смешанная задача для системы гиперболических уравнений требует еще одного граничного условия при $\phi \rightarrow \infty$. Возьмем в качестве него условие равенства нулю производных искомых функций по ϕ .

2. Чтобы перейти от бесконечной полосы в плоскости ϕ , ψ к конечной области, в которой сетка будет равномерной, воспользуемся каким-либо преобразованием координат

$$\phi_1 = \phi_1(\phi), \quad \psi_1 = \psi_1(\psi) \quad (2.1)$$

Возьмем в полученной прямоугольной области сетку размерностью $(M+1) \times (L+1)$, так что

$$\phi_1(l) = lh_2, \quad \psi_1(m) = mh_1 \quad (2.2)$$

Для аппроксимации производных искомых функций воспользуемся изложенным в работе [2] методом, который позволяет конструировать итерационные разностные схемы, неявные всегда вдоль одного и того же направления и явные вдоль другого направления.

Обозначим через $Z_{m,l}^n$ значение какой-либо из функций на слое n по времени ($t = n\tau$) в точке с координатами m, l . Введем операторы сдвига

$$IZ_{m,l}^n = Z_{m,l}^n, \quad SZ_{m,l}^n = Z_{m+1,l}^n, \quad TZ_{m,l}^n = Z_{m,l+1}^n \quad (2.3)$$

В первом и третьем уравнениях нестационарного аналога системы (1.1) заменим производные по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &= \frac{1}{2\tau} (S+I) Z_{m,l}^{n+1} - \frac{1}{2\tau} (S+I) [I + k_2 \sigma_1 (T - 2I + T^{-1})] Z_{m,l}^n \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_1} \right)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &= \frac{1}{2\tau} 2k_1 (S-I) (\alpha Z_{m,l}^{n+1} + \beta Z_{m,l}^n) \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \phi_1} \right)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &= \frac{1}{2\tau} \frac{k^2}{2} (S+I) (T - T^{-1}) (\alpha Z_{m,l}^{n+1} + \beta Z_{m,l}^n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Производные, входящие в четвертое уравнение, которое является нестационарным аналогом уравнения Бернулли, заменим несколько другим способом

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{m,l}^{n+1/2} &= \frac{1}{\tau} I Z_{m,l}^{n+1} - \frac{1}{\tau} [I + k_2 \sigma_2 (T - 2I + T^{-1})] Z_{m,l}^n \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi_1}\right)_{m,l}^{n+1/2} &= \frac{1}{\tau} \frac{k_2}{2} (T - T^{-1}) (\alpha Z_{m,l}^{n+1} + \beta Z_{m,l}^n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Приведенные формулы (2.4) и (2.5) дают аппроксимацию производных с точностью $O(h)$. В них положено $k_i = \tau/h_i$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > \beta$ и коэффициенты σ_i при вторых разностях положительны. Аппроксимация с точностью $O(h)$ необходима в методах сквозного счета, если требовать монотонного изменения искомых функций при переходе через скачок уплотнения [3].

В два первых дифференциальных уравнения исходной системы входят производные по ψ и φ , третье дифференциальное уравнение не содержит производных по ψ . Разностная схема, выбранная для интегрирования задачи, является неявной по переменной ψ и явной по φ . Поэтому исходная система уравнений расщепляется.

Рассмотрим сначала два первых уравнения. Подстановка формул (2.4) приводит к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} E(S+I)X_{m,l}^{n+1} + \frac{d\psi_1}{d\psi} 2k_1 \alpha A(S-I)X_{m,l}^{n+1} &= E(S+I)[I + k_2 \sigma_1 (T - 2I + T^{-1})] X_{m,l}^n + \\ + \frac{d\psi_1}{d\psi} 2k_1 \beta A(S-I)X_{m,l}^n - \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \frac{k_2}{2} C(S+I)(T - T^{-1})(\alpha Y_{m,l}^{n+1} + \beta Y_{m,l}^n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь E — единичная матрица, а матрицы A и C даются выражениями

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1/\kappa \\ \kappa p r w^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & \kappa p/2 \end{vmatrix}$$

В формуле (2.6) их элементы, как и значения производных $d\psi_1/d\psi$ и $d\varphi_1/d\varphi$ берутся в точках с координатами $n + 1/2$, $m + 1/2$, l .

Векторы X и Y составлены из неизвестных функций

$$X = \begin{vmatrix} \psi \\ p \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} \psi \\ p \\ w^2 \end{vmatrix}$$

Для решения разностной системы (2.6) применим итерационный процесс [2], согласно которому для вычисления $X_{m,l}^{n+1}$ на $q+1$ итерации заменим в левой части все X^{n+1} на $X^{n+(q+1)}$, а в правой части все Y^{n+1} на $Y^{n+(q)}$. Элементы матриц A и C будем брать в точке $n + (1/2)q$, $m + 1/2$, l , согласно формуле

$$g_{m+1/2,l}^{n+(1/2)q} = 1/4 (g_{m+1,l}^{n+(q)} + g_{m,l}^{n+(q)} + g_{m+1,l}^n + g_{m,l}^n)$$

Теперь система уравнений (2.6) на каждой итерации расщепляется на L линейных систем вида

$$a_{m+1/2,l}^{n+(1/2)q} X_{m+1,l}^{n+(q+1)} + b_{m+1/2,l}^{n+(1/2)q} X_{m,l}^{n+(q+1)} = f_{m+1/2,l}^{n+(1/2)q} \quad (2.7)$$

с граничными условиями

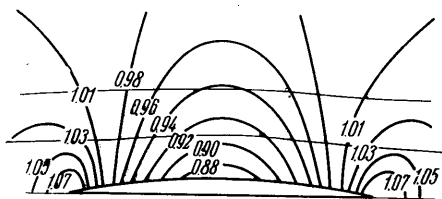
$$\begin{aligned} \psi_{0,l}^{n+(q+1)} &= \theta_l^{n+1} && \text{при } m = 0 \\ p_{M,l}^{n+(q+1)} &= 1 && \text{при } m = M \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение системы (2.7) с граничными условиями (2.8) на каждом луче l осуществляется прогонкой. Устойчивость последней легко доказывается при помощи методов, изложенных в работах [2, 4].

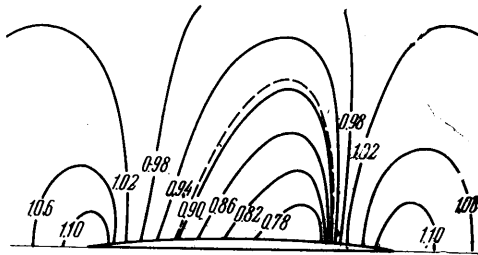
После вычисления векторов $X_{m,l}^{n+(q+1)}$ находится значение w^2 на $q+1$ итерации по формуле, получаемой путем подстановки (2.5) в нестационарный аналог третьего уравнения исходной системы и применения итерационного процесса

$$(w^2)_{m,l}^{n+(q+1)} = (w^2)_{m,l}^n - \frac{k_2}{2} \left(w^2 \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \right)_{m,l}^{n+(1/2q)} (T - T^{-1}) [\alpha (w^2)_{m,l}^{n+(q)} + \beta (w^2)_{m,l}^n] - \frac{k_2}{\chi} \left(\frac{w^2}{\rho} \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \right)_{m,l}^{n+(1/2q)} (T - T^{-1}) (\alpha p_{m,l}^{n+(q+1)} + \beta p_{m,l}^n) + k_2 \sigma_2 (T - 2I + T^{-1}) (w^2)_{m,l}^n \quad (2.9)$$

После окончания итерационного расчета слоя происходит переход к новому слою и весь расчет повторяется. Устойчивость схемы, скорость выхода решения на



Фиг. 1

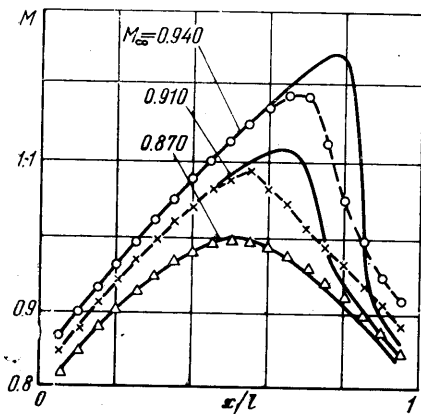


Фиг. 2

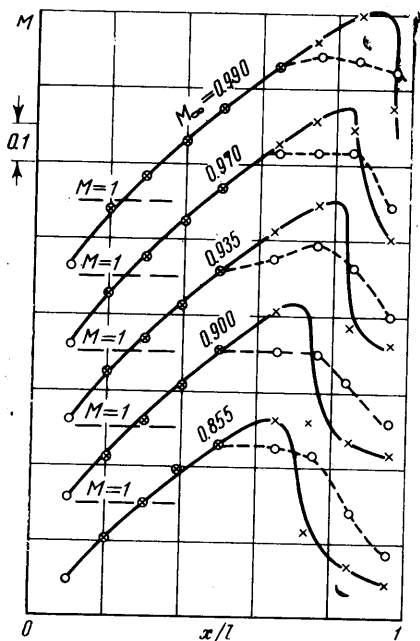
стационарное, отсутствие колебаний в построенном решении достигается выбором величин k_i , α , β и σ_i , который осуществляется экспериментально.

Следует отметить, что полученная разностная схема близка к рассмотренной К. И. Бабенко, А. М. Молчановыми В. В. Русановым для решения одной нестационарной задачи, приведенной в докторской диссертации В. В. Русанова.

3. В качестве примера применения изложенного метода был проведен расчет трансзвукового течения около профиля, составленного из дуг окружности. На фиг. 1 построены линии постоянного давления и линии тока для профиля с относительной толщи-



Фиг. 3



Фиг. 4

ной в 10% при $M_\infty = 0.7$. В этом случае поток чисто дозвуковой и картина обтекания симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через середину хорды. На фиг. 2 приведены линии уровня давления для 6%-ного профиля при $M_\infty = 0.920$. Полученное течение содержит местную зону сверхзвуковых скоростей, ограниченную звуковой линией, которая показана штрихом. Поле течения уже не-

симметрично и на расстоянии 80% хорды видно сгущение линий $p = \text{const}$. Это и есть место локализации скачка уплотнения, который показан жирной линией.

На фиг. 3 приведено распределение чисел Маха по 6%-ному профилю для различных значений M_∞ . Там же нанесены результаты эксперимента, взятые из работы [5] и полученные для течения с турбулентным пограничным слоем. Существенное различие результатов расчета и эксперимента в области, начинающейся несколько выше по потоку от скачка уплотнения и простирающейся до конца профиля, объясняется, вероятно, различным характером диссипативных факторов в применяемой схеме расчета уравнений Эйлера и в реальном вязком газе.

Имеющийся на профиле пограничный слой взаимодействует со скачком уплотнения и формирует соответствующее распределение параметров газа, которое невозможно получить в предположении идеальной жидкости. Качественно похожий эффект наблюдается при сравнении результатов эксперимента при ламинарном и турбулентном пограничных слоях. На фиг. 4 приведены взятые из работы [5] кривые распределения числа M по 12%-ному профилю, составленному из дуг окружности. Штрихом показан случай ламинарного слоя. Сравнение результатов, изображенных на фиг. 3 и 4, показывает, что взаимодействие скачка с турбулентным погранслоем более близко к течению невязкой жидкости, хотя и отличается от него весьма сильно.

В заключение автор благодарит В. В. Русанова и О. С. Рыжова за обсуждение результатов.

Поступило 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Spreiter J. R. Aerodynamics of wings and bodies at transonic speeds. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, No. 8.
2. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. И., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. 1964, М., «Наука».
3. Годунов С. К. Разностный метод расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, № 3.
4. Рябенский В. С. Необходимые и достаточные условия хорошей обусловленности краевых задач для систем обыкновенных разностных уравнений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2.
5. Michel R., Marchand F., de Gallo J. Etude des écoulements transsoniques autour des profils lenticulaires, a incidence nulle. ONERA Publ, 1953, No. 5.

О РАСЧЕТЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ЛОМОНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Н. А. МАХИН, В. Ф. СЯГАЕВ

(Москва)

Численно, методом характеристик, решается задача об обтекании сверхзвуковым потоком плоских и осесимметричных тел с ломаной образующей. Расчетным путем определяются форма и положение «внутренних» ударных волн и тангенциальных разрывов. Полученная в результате расчетов общая картина обтекания тел сравнивается с экспериментальными данными.

1. Для расчета обтекания плоских и осесимметричных тел с ломаной образующей используется метод характеристик [1], стандартная методика которого дополняется методикой расчета внутренних ударных волн и тангенциальных разрывов, возникающих в возмущенной области течения.

Рассмотрим кратко построение внутренней ударной волны. Полагая в окрестности точки излома течение плоским, начальный наклон ударной волны получим из решения кубического уравнения ударной поляры при числе M на контуре, соответствующем точке излома. Начальные параметры потока в точках характеристики второго семейства за ударной волной получаются при этом по формулам перехода через скачок уплотнения [1] с учетом того, что тангенс угла наклона вектора скорости набегающего потока $\zeta \neq 0$. При этом

$$S = S_0 + \ln \left[\frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{w_0^2}{1 - \kappa w_0^2} \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} - \kappa \right] + \kappa \ln \frac{\tau^2 + 1 - \kappa w_0^2}{w_0^2 \tau^2}$$

$$\tau' = (\tau - \zeta_0) / (1 + \tau \zeta_0)$$