

ПРИМЕРЫ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА СО СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Г. Д. СЕВОСТЬЯНОВ (Саратов)

В работе найдены новые решения околозвуковых уравнений, при помощи которых исследуются установившиеся течения идеального газа, содержащие слабый скачок уплотнения: а) криволинейный скачок, оканчивающийся на свободной границе плоской звуковой струи, обтекающей стенку с изломом границы, б) прямой бесконечный скачок на прифиле в звуковом потоке.

1. Рассмотрим плоские околозвуковые безвихревые установившиеся течения идеального газа, которые описываются системой Кармана — Фальковича

$$\theta_x = -\eta_y, \quad \theta_y = \eta\eta_x \quad (1.1)$$

$$\eta = (\kappa + 1)^{1/2}(1 - w/a_*), \quad x = X/l, \quad y = (\kappa + 1)^{1/2}Y/l, \quad \kappa = c_p/c_v$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси X прямоугольной системы XU координат; w — модуль скорости; a_* — критическая скорость звука, $l > 0$ — масштаб длины (при этом $\eta \approx 0$, изменение θ также мало).

Укажем для системы (1.1) новый класс возможных решений (обобщающий класс из работы [1])

$$\begin{aligned} -\eta &= \sum_{k=0}^{2(4-\alpha)} A_k(z)\zeta^k, & \theta &= \sum_{k=0}^{3(4-\alpha)} C_k(z)\zeta^k & (1.2) \\ x &= \sum_{k=0}^{m+4-\alpha} D_k(z)\zeta^k, & y &= \sum_{k=0}^m E_k(z)\zeta^k & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ & & & & (\alpha = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

В переменных $z\zeta$ система (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial\theta}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial z} &= \frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial\eta}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial z} & (1.3) \\ \eta \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial\eta}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial z} \right) &= \frac{\partial\theta}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

Пусть в (1.2) функции при старших степенях одновременно не являются постоянными, при этом α любых функций выбрано (известно) заранее. Подставив (1.2) в (1.3), получим систему $2m + 4(7 - \alpha)$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения $2m + 4(7 - \alpha)$ неизвестных функций A_k, C_k, D_k, E_k , где m — любое натуральное число. Среди решений (1.2), (1.3) содержатся все известные аналитические решения уравнений (1.1).

Данный способ построения частных решений можно применить к системам и уравнениям в частных производных, составленным только с помощью арифметических операций (например, к уравнениям околозвуковых плоских и осесимметричных течений идеального и вязкого газа).

Взаимнооднозначное соответствие между плоскостями xy и $z\zeta$ будет иметь место при условии, что якобиан $D(x, y) / D(z, \zeta) \neq 0$ и ограничен.

В некоторых случаях система из (1.3) значительно упрощается. Приведем новое решение системы (1.1)

$$-\eta = 6kyA(z) + 9k^2y^4 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 3/2k[A^2(z) - 3z^2] + 18k^2[A(z) + 2z]y^3 - 18k^3y^6 + \delta \\ z &= x + ky^3 \end{aligned}$$

Здесь k и δ — постоянные, функция $A(z)$ удовлетворяет уравнению

$$AA' = 2A + 3z$$

решение которого дается в неявной форме

$$(A + z)(A - 3z)^3 = 9h^4 \operatorname{sgn} h \quad (h = \text{const}) \quad (1.5)$$

или в параметрическом виде

$$z = \mu t^{-1} + \nu t^3, \quad A = -\mu t^{-1} + 3\nu t^3, \quad 0 < t < \infty \quad (1.6)$$

Здесь $\nu = -\mu = \pm \frac{1}{4}\sqrt{3}h$ при $h > 0$, $\nu = \frac{1}{3}\mu = \pm \frac{1}{4}\sqrt{3}^{-1}h$ при $h < 0$
 $A = 3z$ или $A = -z$ при $h = 0$

График $A(z)$ дан на фиг. 1.

Если $h > 0$, то $A(z)$ имеет верхнюю и нижнюю ветви (1 и 2), при этом экстремальные значения $A = \pm h$ имеют место на прямой $A = -z^2/2z$; на оси z наклон $A(z)$ бесконечен ($h < 0$).

Решение (1.4) описывает течение со звуковой свободной границей ($\eta = 0$ при $y = 0$) и напоминает по форме одно из решений работы Томотики и Тамады [2] в теории симметричного сопла Лавалья. Если $A = 3z$ (или $A = -z$), то (1.4) превращается в автомодельное алгебраическое решение Р. Г. Баранцева ([3], гл. IV), описывающее околосвуковое течение вблизи точки пересечения звуковой линии со звуковой границей [4].

Выберем начало системы xy на звуковой границе струи, направим ось x по потоку вниз и пусть внутри течения $y < 0$. При $kA < 0$ решение (1.4) описывает непрерывное ($h > 0$) сверхзвуковое течение со звуковой границей. Если $kA > 0$, то внутри непрерывного ($h > 0$) дозвукового течения имеется сверхзвуковая зона, ограниченная звуковой линией

$$y^3 = -(2/3k)A(z)$$

Положив в выражении для θ из (1.4) $\delta = 0$, можем записать

$$\theta = -\frac{3}{2}k^3 \left[\left(\frac{A}{k} + 6y^3 \right)^2 - 3 \left(\frac{z}{k} - 4y^3 \right)^2 \right] \quad (1)$$

Поэтому линии $\theta = 0$ имеют уравнения

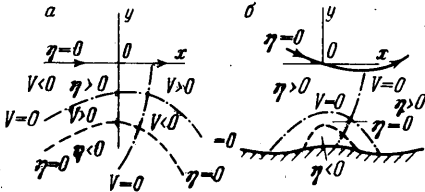
$$A \pm z\sqrt{3} = (\pm 4\sqrt{3} - 6)ky^3$$

и их легко найти, построив графики функций $A \pm \sqrt{3}z$ при помощи фиг. 1. Поведение решения (1.4) на плоскости xy показано на фиг. 2,а при $A < 0, k < 0, h > 0$.

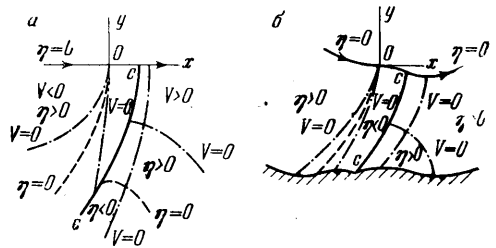
Построив линии тока ([3], стр. 90), придем к течению, показанному на фиг. 2,б, где одна из

линий тока принята за твердую стенку. При $A > 0, k > 0, h > 0$ получаем такой же поток, но газ течет в обратном направлении.

Заметим, что непрерывное течение в местной сверхзвуковой зоне неустойчиво и в ней должен возникнуть ударный скачок.



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Построим решение (1.1) для течения газа, содержащего слабый криволинейный скачок уплотнения, который оканчивается на звуковой свободной границе (вихрями за скачком пренебрегаем).

Пусть до скачка течение описывается решением [3]

$$-\eta = 2axy + \frac{1}{3}a^2y^4, \quad \theta = ax^2 + \frac{1}{3}a^2xy^3 + \frac{1}{9}a^3y^6 \quad (2.1)$$

а за скачком — решением (1.4). Начало системы $xу$ выберем в точке пересечения звуковых линий, ось x направим вниз по потоку (внутри течения $y < 0$), поэтому в (2.1) заданная постоянная $a < 0$. Пусть уравнение скачка есть

$$x = z_0 - ky^3 \quad (z_0 = \text{const} > 0, \quad k = \text{const})$$

Имеем условия вдоль скачка ([5], стр. 145)

$$\eta_1 + \eta_2 = -2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\eta_2 - \eta_1} \quad (2.2)$$

Здесь индекс 1 относится к величинам на передней стороне скачка, индекс 2 — на задней. Подставив в (2.2) уравнение скачка и величины θ, η из (2.1) и (1.4), получим после упрощений

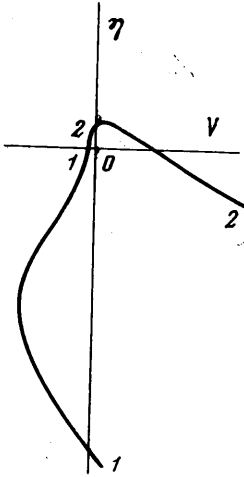
$$3kA(z_0) = -az_0, \quad \delta = 0, \quad k = 1/9a \quad (2.3)$$

или $-1/3a$

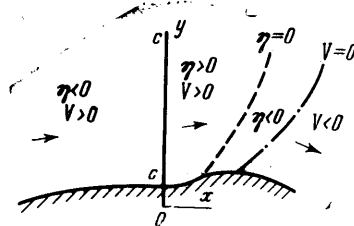
Рассмотрим случай $k = 1/9a < 0$, когда $A(z_0) = -3z_0 < 0$ и скачок вогнут вверх по потоку. За скачком $z_0 < z$ и на фиг. 1 выбираем ветвь 2 (правее точки M_0 имеем $A = -3z$).

Поведение решения на плоскости $xу$ показано на фиг. 3, а, линии тока и твердая стенка построены на фиг. 3, б.

Появление скачка в струе вызвано изломом твердой стенки в сверхзвуковой области,



Фиг. 4



Фиг. 5

при этом за скачком вдали от его вершины может возникнуть сверхзвуковая зона (на фиг. 3, б за твердую стенку взята линия тока, идущая выше сверхзвуковой зоны).

На скачке имеем, учитывая (2.3)

$$\begin{aligned} -\eta_1 &= 2az_0y + 1/9a^2y^4, & \theta_1 &= az_0^2 + 10/9a^2z_0y^3 - 2/81a^3y^6 \\ -\eta_2 &= -2az_0y + 1/9a^2y^4, & \theta_2 &= az_0^2 - 2/9a^2z_0y^3 - 2/81a^3y^6 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$a < 0, \quad z_0 > 0, \quad y \leq 0$

На фиг. 4 показан образ скачка на плоскости $\theta\eta$ (линия 1-1 — передняя сторона скачка, 2-2 — задняя сторона).

Если в (2.3) $k = -1/3a > 0, A(z_0) = z_0 > 0$, то на фиг. 1 надо выбрать вновь 4 выше точки $M_1 (A = z, h < 0)$, при этом скачок вогнут вниз по потоку. Аналогичное трехмерное течение со скачком в сопле Лавала рассмотрено О. С. Рыжовым [6]; автомодельное решение вблизи точки встречи скачка со звуковой свободной границей построено в [7] с показателем автомодельности $n = 11$ (в рассматриваемом примере вблизи вершины скачка течение приближенно автомодельно), неавтомодельное течение с прямым скачком рассмотрено в [8].

3. В дополнение к примерам течений с прямым скачком уплотнения из [8] можно построить течение (фиг. 5) при помощи решения системы (1.1)

$$\begin{aligned} -\eta &= -\frac{a^2}{y} \operatorname{sgn} x + \left(\frac{x}{y} \right)^2, & \theta &= a^2 \frac{x}{y^2} \operatorname{sgn} x - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y} \right)^3 \\ & & & y \geq y_0 > 0, \quad a = \text{const} \end{aligned}$$

где уравнение прямого скачка $x = 0$.

До скачка поток всюду сверхзвуковой, за ним течение смешанное, а на бесконечности поток имеет звуковую скорость и однороден (при $|x| < \infty$).

Такое течение можно приближенно интерпретировать как течение при обтекании невыпуклого профиля звуковым потоком, когда образуется скачок уплотнения в его хвостовой части. Можно рассмотреть также течение со скачком в криволинейном канале, взяв на фиг. 5 две линии тока за твердые стенки.

Наконец, заметим, что одно из решений работы [9], описывающее околосзвуковое осесимметричное течение в сопле Лавала с двумя сужениями, можно применить к построению течения в осесимметричном сопле с плоским нормальным скачком уплотнения (аналогично тому, как это сделано для плоского сопла в работе [8]), при этом течение газа в меридианальной плоскости качественно такое же, как в плоском сопле Лавала [8].

Поступило 22 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околосзвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6, стр. 65—68.
2. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Pt. 1, Quart. Appl. Math. 1950, vol. 7, No. 4. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1951, № 4).
3. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1965.
4. Севостьянов Г. Д. Обтекание профиля звуковой свободной струей газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, стр. 53—59.
5. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Рыжов О. С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4, стр. 859—866.
7. Лифшиц Ю. Б. Об образовании скачков уплотнения у границы звуковой струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 85—87.
8. Севостьянов Г. Д. Плоские трансзвуковые течения газа с прямым скачком уплотнения. ПММ, 1967, т. 31, № 6, стр. 1028—1034.
9. Tomotika S., Hasimoto Z. On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle. J. Math. Phys., 1950, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1951, № 5).

О РАСЧЕТЕ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ В СВОБОДНОЙ СТРУЕ

Ю. Б. ЛИФШИЦ (Москва)

Создание быстродействующих вычислительных машин привело к разработке эффективных методов расчета сложных задач газодинамики, в которых течение содержит дозвуковые и сверхзвуковые области. Характерными примерами может служить обтекание затупленных тел с отшедшей ударной волной и течение в сопле Лавала. В указанных случаях либо скачок уплотнения является границей возмущенной области, либо поток совершенно не содержит разрывов, поэтому решение рассматриваемых задач достигается методами расчета непрерывных течений.

Другим примером смешанного до- и сверхзвукового течения является обтекание профиля со скоростью, величина которой больше критической. Непрерывное течение в возникающей здесь зоне сверхзвуковых скоростей неустойчиво, и расчет получающегося потока со скачком уплотнения должен производиться методами сквозного счета. При этом положение скачка не фиксируется и он получается в виде области больших изменений параметров газа, размазанной на несколько ячеек расчетной сетки.

Существуют два различных направления разработки методов расчета течений рассматриваемого типа. Первое основано на интегрировании в тех или иных упрощающих предположениях приближенного околосзвукового уравнения Кармана. Получаемые результаты распределения давления по профилю в ряде случаев хорошо совпадают с экспериментом, подробный обзор этих методов имеется в статье Спрейтера [1]. Другим направлением является развитие полумпирических методов, общих для определенных типов профилей. Они, вероятно, наиболее пригодны для практических расчетов, так как дают возможность учесть взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем, характер которого заметно влияет на распределение давления по профилю.

Ниже рассматривается разностная схема расчета трансзвукового течения около симметричного профиля под нулевым углом атаки, помещенного в свободную струю с заданной скоростью на бесконечности.

1. Будем считать, что в течении не происходит диссипативных процессов, связанных с вязкостью и теплопроводностью, и возникающие в нем ударные волны настолько слабы, что изменением энтропии можно пренебречь по сравнению с ошибкой аппроксимации на заданной сетке. В этом случае плоское стационарное движение газа описывается уравнением неразрывности, двумя уравнениями Эйлера и условием адиабатичности. Возьмем в качестве независимых переменных функцию тока ψ и по-