УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПАРАМАГНИТНЫХ СРЕД

И. Г. ШАПОШНИКОВ, М. И. ШЛИОМИС

(*Пермь*)

При помощи законов сохранения получена феноменологическим путем полная система уравнений движения проводящей парамагнитной жидкости в магнитном поле. Кроме обычных уравнений магнитной гидродинамики (с дополнительными членами, учитывающими намагниченность среды), эта система включает в себя уравнение для скорости изменения магнитного момента.

Уравнения гидродинамики жидкости с внутренним вращением получены [1], а в случае обусловленных этим вращением парамагнитных свойств [2]: жидкость считалась при этом непроводящей. Рассмотрение, проведенное в работе [2], распространяется на случай жидкости с отличной от нуля электропроводностью. Это будет такое же обобщение магнитной гидродинамики, каким теория [1, 2] служит для гидродинамики обычной.

1. Интенсивность движения рассматриваемой среды характеризуется в каждой точке гидродинамической скоростью $\mathbf{v}$ и объемной плотностью $\mathbf{K}$ внутреннего момента импульса. Последний связан с объемной плотностью $\mathbf{M}$ магнитного момента соотношением

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{K} \tag{1.1}$$

где γ — гиромагнитное отношение. Величины $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ являются макроскопическими характеристиками электронных и ядерных движений, как орбитальных, так и спиновых.

Воспользуемся схемой феноменологического вывода уравнений движения сплошной среды, предложенной Л. Д. Ландау и использованной в [3] и [1, 2]. Будем исходить из следующих уравнений.

Из макроскопических уравнений, выражающих сохранение массы, энергии, импульса (уравнение движения) и момента импульса

$$\partial\rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\partial E / \partial t + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0 \tag{1.3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_{ik} + K_{ik}) + \frac{\partial G_{ikl}}{\partial x_l} = 0 \tag{1.5}$$

$$(L_{ik} = e_{ikl}L_l,\ K_{ik} = e_{ikl}K_l,\ \mathbf{L} = \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v}))$$

Здесь E — объемная плотность энергии, $\mathbf{Q}$ и G_{ikl} — плотности потоков энергии и момента импульса, σ_{ik} — тензор напряжений, p — давление.

Из уравнений для изменения внутреннего момента импульса и энтропии

$$\frac{\partial K_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}(v_l K_{ik}) = f_{ik} \tag{1.6}$$

$$\rho T(\partial s / \partial t + \mathbf{v}\nabla s) = F \tag{1.7}$$

Из уравнений поля в движущейся проводящей среде [4]

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \lambda \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} \qquad (\lambda = c^2 / 4\pi\sigma) \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad (\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) \tag{1.9}$$

Здесь s — энтропия единицы массы, T — абсолютная температура, f_{ik} и F — неконвективные части изменений соответствующих величин (F — диссипативная функция), $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, σ — электропроводность жидкости.

Учитывая, что $L_{ik} = \rho (x_i v_k - x_k v_i)$, после простых вычислений [1] находим из (1.4) — (1.6)

$$f_{ik} = \sigma_{ki} - \sigma_{ik} - \partial g_{ikl} / \partial x_l$$

$$g_{ikl} = G_{ikl} - v_l (L_{ik} + K_{ik}) + x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il} - p (x_i \delta_{kl} - x_k \delta_{il}) \tag{1.10}$$

Из (1.1), (1.6) и (1.10) следует уравнение для намагниченности

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (v_l M_{ik}) = -\gamma \left(\sigma_{ik} - \sigma_{ki} + \frac{\partial g_{ikl}}{\partial x_l} \right) \tag{1.11}$$

Остается выяснить, от каких величин и как зависят E, $\mathbf{Q}$, σ_{ik}, g_{ikl} и F.

2. Энергия E складывается из кинетической энергии движущейся жидкости, энергии поля в среде и внутренней энергии парамагнетика

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{8\pi} + E_0 \tag{2.1}$$

Известное термодинамическое соотношение [4]

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{H}}{4\pi} = \frac{\mathbf{B}}{4\pi} - \mathbf{M}$$

позволяет представить E еще и в таком виде:

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} - \mathbf{BM} + U(\rho, s, M^2) \tag{2.2}$$

Намагниченность парамагнетика всегда мала, поэтому в разложении U по степеням M^2 достаточно сохранить члены нулевого и первого порядка

$$U = U_0(\rho, s) + \frac{M^2}{2\varkappa}$$

Из сравнения получающегося выражения для E с (2.1) находим

$$E_0 = U_0(\rho, s) + \frac{\mathbf{M}}{2\varkappa} (\mathbf{M} - \varkappa \mathbf{B}) \tag{2.3}$$

Условие равновесия $E = \min$ дает равновесное выражение для намагниченности

$$\mathbf{M} = \varkappa \mathbf{B} \tag{2.4}$$

причем $\varkappa > 0$ (парамагнетизм). Из термодинамического тождества для внутренней энергии

$$dE_0 = \rho T ds + w d\rho + \varkappa^{-1} (\mathbf{M} - \varkappa \mathbf{B}) d\mathbf{M} - \mathbf{M} d\mathbf{B} + {}^1\!/_2 d(\mathbf{BM}) \tag{2.5}$$

и определения энтальпии $w = \rho^{-1} (E_0 + p)$ следует выражение для дифференциала давления:

$$dp = -\rho T ds + \rho dw - \varkappa^{-1} (\mathbf{M} - \varkappa \mathbf{B}) d\mathbf{M} + \mathbf{M} d\mathbf{B} - {}^1\!/_2 d(\mathbf{BM}) \tag{2.6}$$

3. Перейдем теперь к нахождению выражений для величин $\mathbf{Q}$, σ_{ik}, g_{ikl} и F. Для этого продифференцируем по времени (2.1), воспользовавшись (2.5). В полученное выражение подставим производные по времени от ρ, $\mathbf{v}$, s, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, взятые из (1.2), (1.4), (1.7), (1.8), (1.11), и при помощи (1.9) и (2.6) получим после преобразований (ср. [1,2])

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\sigma\mathbf{v})+\mathbf{v}\frac{\mathbf{BH}}{8\pi}-\frac{\lambda}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma}{\varkappa}(g,\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})\right\}=F-\frac{\lambda}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2+\frac{\gamma}{\varkappa}g_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(M_i-\varkappa B_i)-$$
$$-\left\{\sigma_{ik}+\frac{\mathbf{M}}{\varkappa}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})\delta_{ik}-\frac{1}{4\pi}\left(H_iB_k-\frac{\mathbf{BH}}{2}\delta_{ik}\right)\right\}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\gamma}{\varkappa}(M_{ik}-\varkappa B_{ik})\right] \tag{3.1}$$

где $(\sigma\mathbf{v})\equiv\sigma_{ik}v_k$, $(g,\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})\equiv g_{ik}(M_k-\varkappa B_k)$.

Сравнивая (3.1) с (1.3), заключаем, что $\mathbf{Q}$ определяется выражением, стоящим в левой части (3.1) под знаком div, и

$$F=\frac{\lambda}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2-\frac{\gamma}{\varkappa}g_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(M_i-\varkappa B_i)+\left\{\sigma_{ik}+\frac{\mathbf{M}}{\varkappa}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})\delta_{ik}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\left(H_iB_k-\frac{\mathbf{BH}}{2}\delta_{ik}\right)\right\}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\gamma}{\varkappa}(M_{ik}-\varkappa B_{ik})\right] \tag{3.2}$$

Для дальнейших вычислений удобно записать тензор напряжений в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$\sigma_{ik}=S_{ik}+e_{ikl}A_l \tag{3.3}$$

и симметризовать все члены в правой части (3.2). Условие $F>0$ (закон возрастания энтропии) позволяет определить вид $\mathbf{A}$, S_{ik}, g_{ik} и F.

Удерживая в F только члены, квадратичные по величинам, характеризующим отклонение от равновесия, имеем

$$-2\gamma\mathbf{A}=\gamma(\mathbf{M}\times\mathbf{B})-\frac{1}{\tau}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})-\frac{\alpha\varkappa}{M^2}\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{B}) \tag{3.4}$$

$$S_{ik}=-\frac{\mathbf{M}}{\varkappa}(\mathbf{M}-\varkappa\mathbf{B})\delta_{ik}+\frac{1}{4\pi}\left(B_iB_k-\frac{\mathbf{BH}}{2}\delta_{ik}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}(M_iB_k+M_kB_i)+\pi_{ik} \tag{3.5}$$

$$-\gamma g_{ik}=\delta_1\left[\frac{\partial(M_i-\varkappa B_i)}{\partial x_k}+\frac{\partial(M_k-\varkappa B_k)}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial M_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right]+$$
$$+\delta_2\frac{\partial M_l}{\partial x_l}\delta_{ik}-\delta_3\left[\frac{\partial(M_k-\varkappa B_k)}{\partial x_i}-\frac{\partial(M_i-\varkappa B_i)}{\partial x_k}\right] \tag{3.6}$$

$$\pi_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)+\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$$

Здесь π_{ik} — обычный тензор вязких напряжений и α, τ, λ, δ_1, δ_2, $\delta_3\geqslant 0$.

4. Подставляя найденные выражения для σ_{ik} и $g_{ikl} = e_{ikm}g_{ml}$ в (1.4) и (1.11), получаем

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla\left[p + \frac{\mathbf{M}}{\varkappa}(\mathbf{M} - \varkappa\mathbf{B}) + \frac{\mathbf{BH}}{8\pi}\right] + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{H} +$$

$$+ \eta\nabla^2\mathbf{v} + (\zeta + {}^1/_3\eta)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} + \frac{1}{2\gamma\tau}\left[1 + \alpha\tau\varkappa\frac{(\mathbf{MB})}{M^2}\right]\times$$

$$\times \operatorname{rot}(\mathbf{M} - \varkappa\mathbf{B}) - \frac{\alpha\varkappa}{2\gamma}\mathbf{M}\times\nabla\left[\frac{(\mathbf{MB})}{M^2}\right] \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{M} = \gamma(\mathbf{M}\times\mathbf{B}) - \mathbf{M}\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{1}{\tau}(\mathbf{M} - \varkappa\mathbf{B}) - \frac{\alpha\varkappa}{M^2}\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{B}) -$$

$$- D_1\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{M} - \varkappa\mathbf{B}) + D_2\nabla\operatorname{div}\mathbf{M} \qquad (D_1 \equiv \delta_1 + \delta_3, \qquad D_2 \equiv \delta_2 + {}^4/_3\delta_1)$$

Уравнения (4.1), (1.2), (1.8) и (1.9) образуют полную систему уравнений движения рассматриваемой среды; при $\varkappa = \mathbf{M} = 0$ они переходят в обычные уравнения магнитной гидродинамики [4].

При взаимодействии магнитных и гидродинамических явлений возникают следующие основные физические эффекты.

1°. В проводящей жидкости, движущейся в приложенном магнитном поле, индуцируются токи:

(*а*) поле этих токов изменяет исходное магнитное поле;

(*б*) взаимодействие токов и поля создает электромагнитную силу, изменяющую первоначальное движение.

Эти два эффекта служат причиной различных явлений, изучаемых в обычной магнитной гидродинамике, где намагниченность жидкости не учитывается. С учетом последней связаны дополнительные эффекты.

2°. Приложенное поле намагничивает среду:

(*в*) взаимодействие магнитного момента с полем приводит к появлению добавочных пондеромоторных сил в уравнении движения;

(*г*) магнитное поле токов, индуцируемых при движении жидкости (*а*), изменяет намагниченность;

(*д*) изменение плотности среды за счет сжимаемости сопровождается изменением плотности магнитного момента.

В заключение необходимо сделать одно замечание. При выводе уравнений движения существенно использовано выражение (2.1) для плотности энергии E. Гидродинамическая скорость $\mathbf{v}$ входит в (2.1) через ${}^1/_2\rho v^2$. Но для жидкости с внутренним вращением $\mathbf{v}$ должно входить в E еще и через выражение, характеризующее связь внутреннего и «внешнего» (с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = {}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{v}$) вращений. Необходимость такой связи вытекает из сохранения полного момента импульса. Соответствующее выражение было найдено в [2], оно имеет вид $\mathbf{K\Omega} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}/\gamma)$.

В данной работе это выражение не учитывалось, потому что, как установлено в [2], учет его привел бы только к появлению в некоторых членах уравнений (4.1) в сумме с $\mathbf{B}$, «гиромагнитного поля» $\boldsymbol{\Omega}/\gamma$, которое, как показывает оценка, для всех разумных значений $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ очень мало по сравнению с $\mathbf{B}$.

Поступило 23 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлиомис М. И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 1
2. Шлиомис М. И. Об уравнениях движения жидкости с гиромагнитными свойствами. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 3.
3. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М., «Наука», 1965.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.